

## Primjena vezane interpolacije na konačne elemente Mindlinovih ploča

### Application of linked interpolation to Mindlin plate finite elements

**Dragan Ribarić\*, Edita Papa\*, Gordan Jelenić\***

**Sažetak.** U ovome radu analizira se upotreba vezane interpolacije pri proračunu pločastih nosača metodom konačnih elemenata. Prednosti vezane interpolacije dobro su poznate i jasno uočljive kod konačnih elemenata Timošenkovih (debelih) greda i u ovome radu polazimo od analogije između te teorije i Mindlinove teorije pločastih nosača i primijenjujemo koncept vezane interpolacije na konačne elemente debelih ploča.

Za razliku od grednih nosača, vezana interpolacija kod pločastih nosača nije u mogućnosti reproducirati analitičko rješenje čak niti za relativno jednostavne slučajeve opterećenja i u ovome radu usporedit će se postupci i rezultati dobiveni na ovaj način s postupcima i rezultatima u literaturi. U numeričkim primjerima analizirat će se efekt progušćivanja mreže konačnih elemenata.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, Mindlinova teorija ploča, vezana interpolacija

**Abstract.** In this work the use of linked interpolation in the design of plate structures using the finite elements is analysed. Benefits of the linked interpolation are very obvious and well known in the Timoshenko (thick) beam finite elements and the basis for the development of a family of the Mindlin plate elements presented in this paper is found in the analogy between the Timoshenko beam theory and the Mindlin plate theory.

In contrast to beams, the linked interpolation in plate elements cannot completely reproduce the analytical solution, not even for the relatively simple load cases. The results obtained in this way will be compared and numerically assessed against the reference results from literature using various mesh densities.

**Key words:** finite element method, Mindlin beam theory, linked interpolation

\* Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Viktora Cara Emina 5, Rijeka  
E-mail: {dragan.ribaric,edita.papa,gordan.jelenic}@gradri.hr

## 1. Uvod

Ozbiljan problem koji se javlja kod numeričke analize Timošenkovih (visokih) greda i Mindlin-Reissnerovih ploča, kod kojih se u obzir uzima i utjecaj poprečnih sila na deformaciju, jest *shear locking* ili fenomen blokiranja zbog utjecaja poprečnih sila [1]. Uz običnu deformaciju poprečnog presjeka od savijanja, naime, doprinos poprečne sile očituje se i u klizanju poprečnog presjeka zbog čega poprečni presjek više ne ostaje okomit na težišnu plohu. Ukoliko ovaj efekt nije propisno tretiran, promatrani element dobiva umjetnu krutost što rezultira iznimno malenim vrijednostima pomaka. Ovaj problem moguće je umanjiti ili riješiti smanjenjem točnosti integriranja pojedinih elemenata matrice krutosti (reducirana integracija) [2-4], povećanjem stupnja interpolacijskih Lagrangeovih polinoma [2-4], lokalnom interpolacijom presječnih sila (miješana metoda) [5-10] ili upotrebom novih interpolacijskih funkcija koje povisuju stupanj interpolacijskih polinoma bez dodavanja dodatnih čvorova na konačnom elementu [1,3,5,6,8,9,11,12]. Primjenom zadnje od navedenih tehnika prepoznaje se utjecaj rotacija na poprečne pomake na razini definiranja interpolacijskih funkcija i u ovome radu ona će se detaljnije analizirati. Ovakvu interpolaciju nazivamo *vezanom interpolacijom* (linked interpolation).

Potrebno je uočiti da, za razliku od grednih problema, analitički točnoga rješenja uz pomoć konačnog broja parametara za problem ploča nema, čime je onemogućeno dobivanje analitičkoga rezultata metodom konačnih elemenata. Ipak, vještim odabirom interpolacijskih funkcija želimo se maksimalno približiti ovome rješenju, uz najmanji mogući računski napor. U ovome radu međusobno će se usporediti rezultati dobiveni različitim konačnim elementima iz familije elemenata s vezanom interpolacijom za pomake i rotacije.

U 2. poglavlju ovoga rada ukratko izložimo Mindlinovu teoriju debelih ploča, gdje dajemo naglasak na definiranju deformacijske energije i rada vanjskih sila, što omogućava standardnu primjenu metode konačnih elemenata. U 3. poglavlju predstavljamo standardne Lagrangeve interpolacijske funkcije za potpun opis linearne i kvadratne promjene traženih veličina (pomaka i rotacija), koje u 4. poglavlju koristimo kao osnovu za razvoj kvadratne i kubne vezane interpolacije na način inspiriran našim prethodnim radom na grednim nosačima [11,13,14]. U 5. poglavlju predstavljamo nekoliko mogućih varijanti najjednostavnijega elementa iz familije elemenata s vezanom interpolacijom, kod kojega je pomak opisan bikvadratnom interpolacijom ovisnom o čvornim pomacima i rotacijama, od kojih je jedan preuzeta iz literature [6]. U 6. poglavlju analiziramo ponašanje predstavljenih konačnih elemenata na standardnim testnim primjerima, a u 7. poglavlju izvodimo zaključke i predlažemo smjernice za daljnji rad.

## 2. Mindlinova teorija debelih ploča

Osnovna razlika između teorija tankih i debelih ploča jest u tome što se kod debelih (visokih) ploča uzimaju u obzir posmične deformacije. Prema Mindlinovoj teoriji debelih ploča normale na srednju plohu prije deformacije ostaju ravne, ali ne i okomite na srednju plohu nakon deformacije (razlika u odnosu na tanke ploče kod kojih vrijedi Kirchhoffova teorija), dok su naprezanja ortogonalna na srednju plohu zanemariva u odnosu na opterećenje ( $\sigma_{zz} = 0$ ) [2]. Kinematičke i deformacijske veličine, opterećenje i ko-ordinatne osi prikazani su na Slici 1.

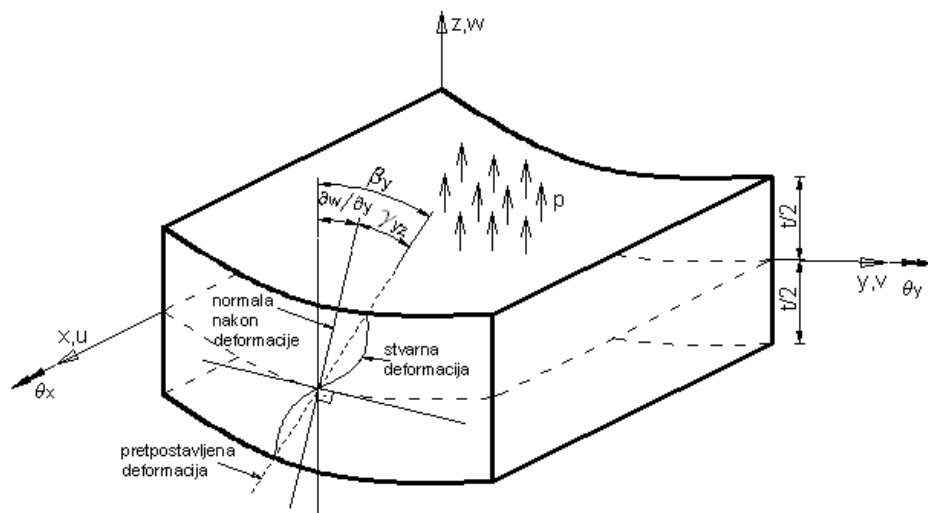
Kod debelih ploča, ukupnu rotaciju  $\beta_y$  čine rotacija uslijed savijanja  $\partial w / \partial y$  i posmična deformacija  $\gamma_{yz}$  (deformacija od klizanja). Kao nepoznate veličine u svakom čvoru javljaju se pomak  $w$  i dva kuta zaokreta  $\beta_x$  i  $\beta_y$ . Kut  $\beta_x$  djeluje tako da savija poprečni presjek u smjeru osi  $x$ , dok kut  $\beta_y$  djeluje na način da savija poprečni presjek u smjeru osi  $y$ .

### 2.1. Veza naprezanja i deformacija

Komponente pomaka neke točke  $T$  s koordinatama  $(x, y, z)$  prema teoriji malih pomaka su:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\beta_x(x, y) \\ z\beta_y(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

gdje je  $w$  poprečni pomak, a  $\beta_x = \theta_y$  i  $\beta_y = -\theta_x$  su rotacije normale na središnju plohu uslijed kojih dolazi do pomicanja materijalnih točaka na normali duž odgovarajuće koordinatne osi proporcionalno njihovoj udaljenosti od središnje plohe. Deformacije od savijanja  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  i  $\gamma_{xy}$  se mijenjaju linearno po visini ploče, a posmične deformacije  $\gamma_{xz}$  i  $\gamma_{yz}$  su konstantne po visini ploče.



**Slika 1.** Zaokret poprečnog presjeka debele ploče. Vidljiv je doprinos poprečne sile, što se očituje u klizanju poprečnog presjeka.

Stanje naprezanja u ploči dobivamo iz uvjeta da je  $\sigma_z = 0$ , pa je veza između naprezanja i deformacija dana na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \kappa_2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

pri čemu su  $\sigma_{xx}$  i  $\sigma_{yy}$  komponente normalnih naprezanja, a  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  su komponente posmičnih naprezanja. Također,  $\nu$  je Poissonov koeficijent, a  $E$  je modul elastičnosti materijala.

## 2.2. Potencijalna energija deformacija

Ukupna potencijalna energija deformacija jednaka je zbroju potencijalne energije od savijanja ( $\varphi_1$ ) i potencijalne energije od klizanja odnosno smicanja ( $\varphi_2$ ). Preko izraza za potencijalnu energiju deformacija, dobit ćemo izraz za matricu krutosti. Potencijalna energija deformacija jest

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (4)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int \left\langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\rangle \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz dA = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \kappa \varepsilon dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int u^T D_1 \kappa_1 D_1^T u z^2 dz dA = \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int \rho^T N^T D_1 \kappa_1 D_1^T N \rho z^2 dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \rho^T B_1^T \kappa_{1p} B_1 \rho dA = \frac{1}{2} \rho^T K_1 \rho \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_{A-t/2}^{t/2} \int \left\langle \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\rangle \frac{E k}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dz dA = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \kappa \varepsilon dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int u^T D_2 \kappa_2 D_2^T u z^2 dz dA = \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int \rho^T N^T D_2 \kappa_2 D_2^T N \rho z^2 dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \rho^T B_2^T \kappa_{2p} B_2 \rho dA = \frac{1}{2} \rho^T K_2 \rho \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= D_1^T N \\ B_2 &= D_2^T N \\ K_1 &= \int_0^a \int_0^b B_1^T \kappa_{1p} B_1 dx dy \\ K_2 &= \int_0^a \int_0^b B_2^T \kappa_{2p} B_2 dx dy \\ \varphi &= \frac{1}{2} \rho^T (K_1 + K_2) \rho \end{aligned} \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{N}$  matrica funkcija oblika, kojom je definiran oblik nepoznatih funkcija pomaka i rotacija središnje plohe ploče u ovisnosti o traženim čvornim vrijednostima pomaka i rotacija. U  $\mathbf{B}$  matrici su dane odgovarajuće derivacije funkcija oblika, a  $\kappa_{1p}$  i  $\kappa_{2p}$  su konstitutivne matrice ploče, dane sljedećim izrazima:

$$\kappa_{1p} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \kappa_{2p} = \frac{Etk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{D}_2$  su matrice diferencijalnih operatora

$$\mathbf{D}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

a koeficijentom  $k$  se uzima u obzir nejednolikost posmičnih naprezanja i najčešće se uzima da je jednak  $5/6$  [2].

Također, u gornjim izrazima  $V$  je volumen ploče određen površinom težišne plohe  $A$  i visinom ploče  $t$ ,  $a$  je dimenzija pločastog nosača u smjeru koordinatne osi  $x$ ,  $b$  je dimenzija pločastog nosača u smjeru osi  $y$ ,  $\mathbf{K}_1$  je matrica krutosti uslijed savijanja,  $\mathbf{K}_2$  je matrica krutosti uslijed smicanja, a  $\rho$  je vektor osnovnih nepoznanica našega problema, koji sadrži pomake i rotacije u odabranim čvornim točkama.

### 2.3. Presječne sile

Presječne sile su dane preko sljedećih izraza:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \sigma_x z dz \\ \int \sigma_y z dz \\ \int \tau_{xy} z dz \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \tau_{xz} dz \\ \int \tau_{yz} dz \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] \\ M_y &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{Et^3}{24(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right] = -\frac{Gt^3}{12} \left[ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right) \\
 Q_y &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

gdje je  $M_x$  moment savijanja u smjeru osi  $x$ ,  $M_y$  je moment savijanja u smjeru osi  $y$ ,  $M_{xy}$  je torzijski moment,  $Q_x$  i  $Q_y$  su poprečne sile u smjeru  $x$ , odnosno  $y$  osi, a  $G$  je modul smika.

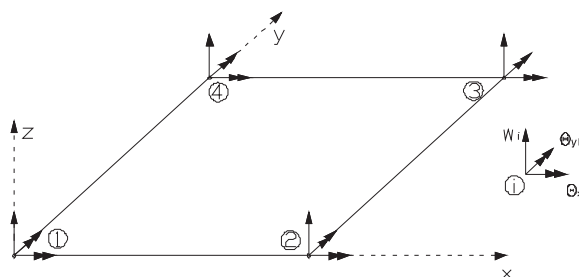
### 3. Lagrangeve interpolacijske funkcije

Ključni korak u primjeni metode konačnih elemenata jest definiranje načina raspodjele nepoznatih funkcija u ovisnosti o vrijednostima nepoznatih veličina u unaprijed odabranim čvorovima. Položaj i karakter čvora (njegovo svojstvo da su u njemu kao nepoznate veličine definirani pomaci, rotacije ili oboje) te oblik funkcije kojom se pretpostavlja raspodjela nepoznatih veličina po središnjoj plohi je stvar odabira prilikom definiranja konačnog elementa.

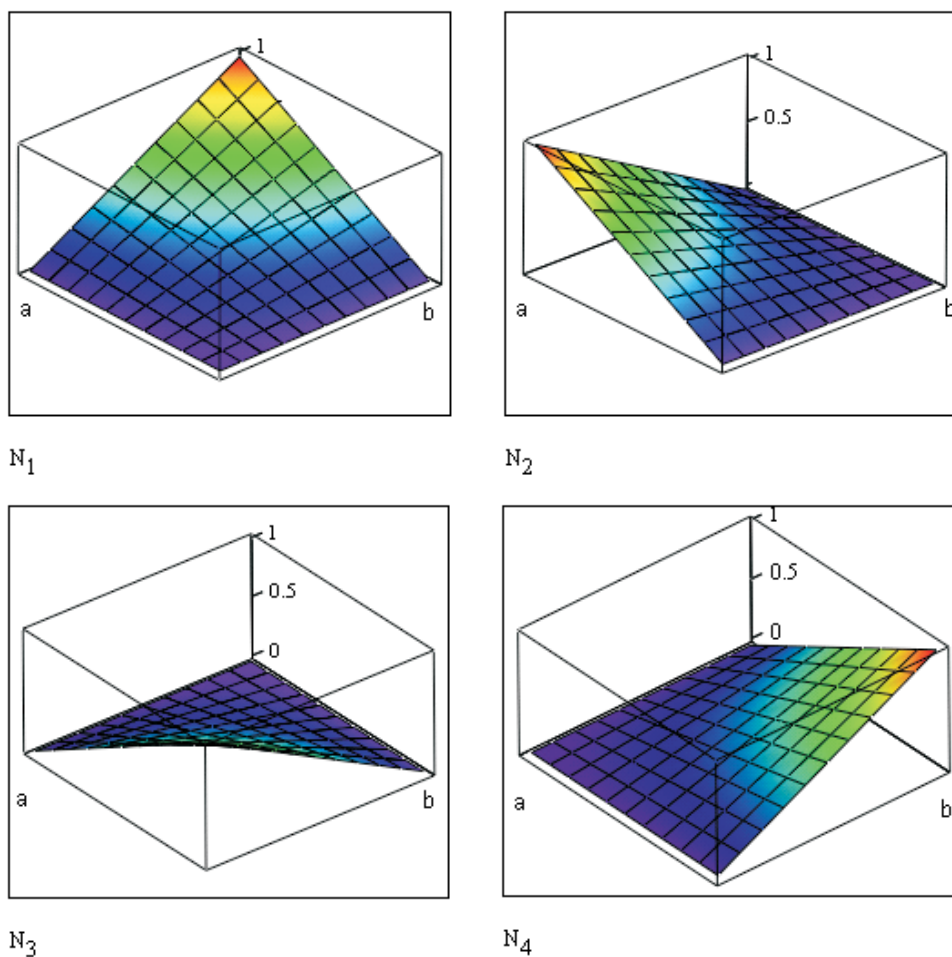
#### 3.1. Linearni pločasti konačni element (4 čvora)

Jedan od najjednostavnijih konačnih elemenata jest četveročvorni element prikazan na Slici 2, u kojem su kao nepoznate čvorne veličine odabrane vrijednosti pomaka i rotacija u uglovima četverokutnoga segmenta središnje plohe ploče, za koje je pretpostavljeno da se po elementu mijenjaju bilinearno, što je najjednostavnije opisati primjenom Lagrangevih polinoma.

Svojstvo Lagrangeovih interpolacijskih funkcija jest da je njihova vrijednost u promatranom čvoru jednaka jedinici, a u svim ostalim čvorovima je jednaka nuli. U slučaju visokih (Mindlinovih) ploča, nije neuobičajeno da se iste funkcije upotrebljavaju za pomake i rotacije budući da između tih veličina nema jednoznačne veze koja postoji kod tankih (Kirchhoffovih) ploča.



**Slika 2.** Četveročvorni konačni element ploče i njegovi stupnjevi slobode.



**Slika 3.** Grafički prikaz funkcija  $N_1 - N_4$ . Čvorovi su numerirani u smjeru suprotnom od kazaljke na satu počevši od ishodišta koordinatnog sustava.

Bilinearne interpolacijske funkcije prikazane su na Slici 3, a imaju sljedeći oblik:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, \quad N_2 = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}, \quad N_3 = \frac{xy}{ab}, \quad N_4 = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \quad (13)$$

Raspodjela pomaka i rotacija po središnjoj plohi elementa je prema tome

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \rho \quad (14)$$

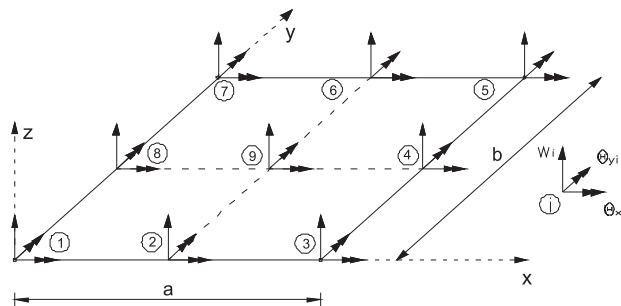


gdje je  $\rho$  vektor čvornih nepoznanica

$$\rho^{-T} = \langle w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4} \rangle. \quad (15)$$

### 3.2. Četverokutni pločasti konačni element (9 čvorova)

Na sličan način možemo definirati i bikvadratni element sa devet čvorova (Slika 4), u kojem su kao nepoznate čvorne veličine ponovo odabrane vrijednosti pomaka i rotacija u uglovima, ali osim toga još i u središtima stranica te u samome geometrijskome središtu četverokutnoga segmenta središnje plohe ploče.



Slika 4. Stupnjevi slobode četverokutnog pločastog konačnog elementa.

Pretpostavljeno je da se nepoznate veličine po elementu sada mijenjaju bikvadratno, što također možemo izraziti odgovarajućim Lagrangevim polinomima. Neke od Lagrangeovih interpolacijskih funkcija za element prikazan na slici 4 su:

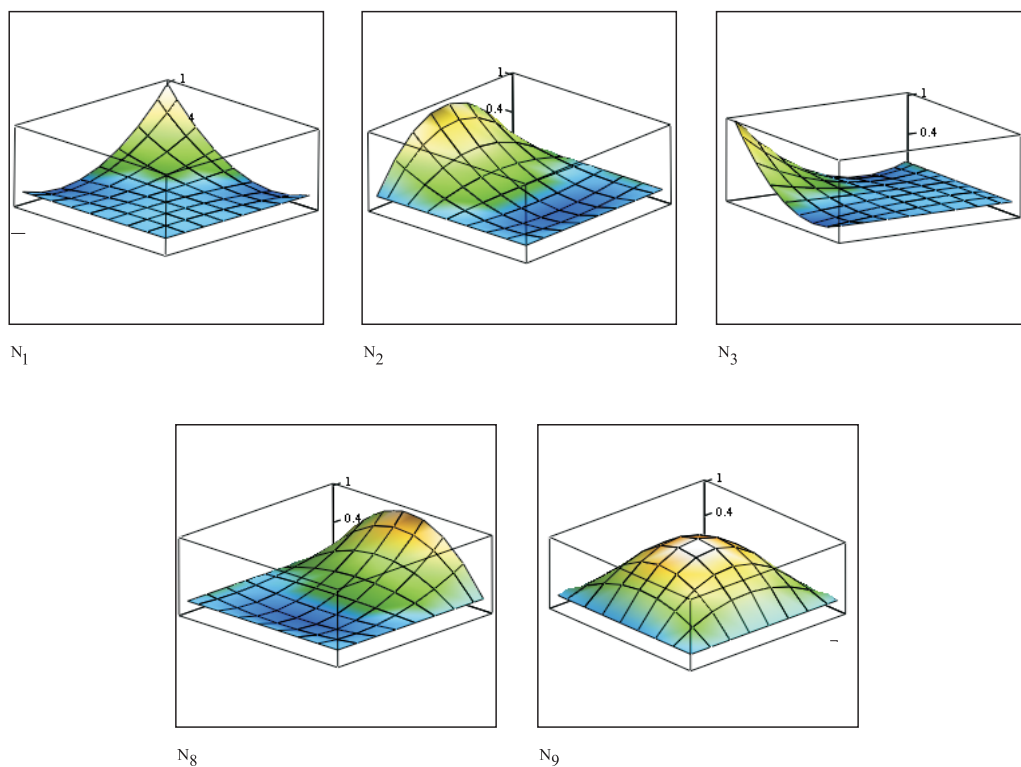
$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= 1 - 3\frac{x}{a} - 3\frac{y}{b} + 2\frac{x^2}{a^2} + 9\frac{xy}{ab} + 2\frac{y^2}{b^2} - 6\frac{x^2y}{a^2b} - 6\frac{xy^2}{ab^2} + 4\frac{x^2y^2}{a^2b^2} \\ N_2(x, y) &= 4\frac{x}{a} - 4\frac{x^2}{a^2} - 12\frac{xy}{ab} + 12\frac{x^2y}{a^2b} + 8\frac{xy^2}{ab^2} - 8\frac{x^2y^2}{a^2b^2} \\ N_3(x, y) &= -\frac{x}{a} + 2\frac{x^2}{a^2} + 3\frac{xy}{ab} - 6\frac{x^2y}{a^2b} - 2\frac{xy^2}{ab^2} + 4\frac{x^2y^2}{a^2b^2} \\ &\vdots \\ N_8(x, y) &= 4\frac{y}{b} - 12\frac{xy}{ab} - 4\frac{y^2}{b^2} + 8\frac{x^2y}{a^2b} + 12\frac{xy^2}{ab^2} - 8\frac{x^2y^2}{a^2b^2} \\ N_9(x, y) &= 16\frac{xy}{ab} - 16\frac{x^2y}{a^2b} - 16\frac{xy^2}{ab^2} + 16\frac{x^2y^2}{a^2b^2} \end{aligned} \quad (16)$$

a ilustrirane su na Slici 5. Raspodjela pomaka i rotacija po središnjoj plohi elementa bi u ovome slučaju bila

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \rho, \quad (17)$$

gdje je  $\rho$  sada vektor nepoznanica u devet čvornih točaka elementa:

$$\rho^T = \langle w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \dots \quad w_9 \quad \theta_{x9} \quad \theta_{y9} \rangle \quad (18)$$

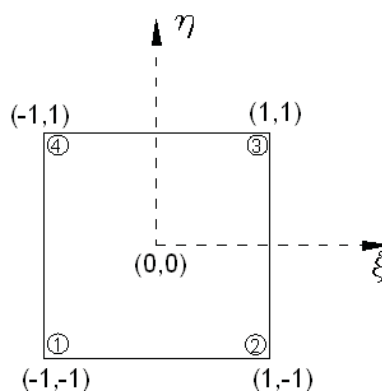


*Slika 5. Grafički prikazi polinoma  $N_1, N_2, N_3, N_8, N_9$ .*

#### 4. Vezana interpolacija

Vezanom interpolacijom nastoji se uzeti u obzir utjecaj rotacija na pomake Mindlinove ploče na način analogan deformiranju tankih (Kirchhoffovih) ploča, gdje je raspodjela rotacija jednaka odgovarajućoj parcijalnoj derivaciji

funkcije pomaka. Odgovarajuća analogija postoji i između teorija tankih (Euler-Bernoullijevih) i debelih (Timošenkovih) greda [14], a interpolaciju koju na taj način dobivamo kod debelih greda nazivamo vezanom interpolacijom i može se dokazati da ona ima sposobnost potpunoga reproduciranja analitičkih rezultata za polinomsko opterećenje proizvoljnog stupnja [13]. Na sličan način možemo pristupiti i interpolaciji kod Mindlinovih ploča iako, za razliku od Timošenkovih greda, ne postoji interpolacija s konačnim brojem parametara koja može reproducirati analitičke rezultate.



*Slika 6. Prirodni koordinatni sustav.*

Vezana interpolacija će biti dana u prirodnim koordinatama, prikazanima na Slici 6. Interpolacije za kutove zaokreta još će uvijek biti predstavljene Lagrangeovim polinomima koji su isti za oba kuta. Interpolacije za pomak sastojat će se također od Lagrangeovih polinoma uz dodatak polinoma višeg reda koji uzima u obzir doprinos pomacima zbog zaokretanja. Pomak želimo interpolirati polinomom višeg stupnja od polinoma kojima interpoliramo kutove zaokreta, kako bismo osigurali jednakost derivacija pomaka i kutova zaokreta za granični slučaj tankih ploča

#### **4.1. Vezana interpolacija za četveročvorni konačni element**

Općenito, na temelju analogije s vezanom interpolacijom kod greda s dva čvora [3,5,11,13], vezana interpolacija za pomak kod četveročvornog konačnog elementa ploče ima slijedeći oblik:

$$w = N^1 w_1 + N^2 w_2 + N^3 w_3 + N^4 w_4 - \frac{1}{2} a K_{\xi}^1 (\theta_{1y} - \theta_{2y}) + \frac{1}{2} a K_{\eta}^1 (\theta_{2x} - \theta_{3x}) - \frac{1}{2} a K_{\xi}^2 (\theta_{4y} - \theta_{3y}) + \frac{1}{2} a K_{\eta}^2 (\theta_{1x} - \theta_{4x}) \quad (19)$$

gdje je

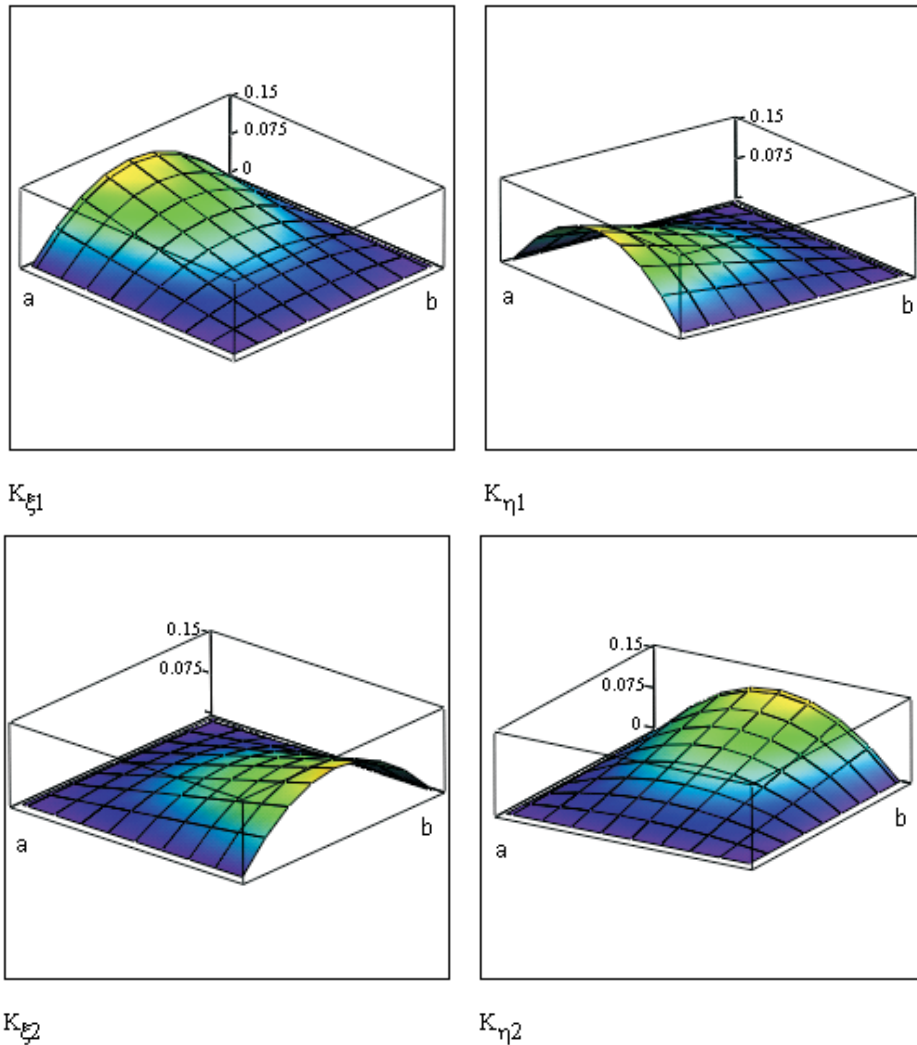
$$\begin{aligned}
 N^1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}(1-\eta) = N_\xi^1 N_\eta^1 \\
 N^2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}(1-\eta) = N_\xi^2 N_\eta^1 \\
 N^3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}(1+\eta) = N_\xi^2 N_\eta^2 \\
 N^4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}(1+\eta) = N_\xi^1 N_\eta^2
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 K_\xi^1 &= \frac{1}{8}(1-\xi^2)(1-\eta) = N_\xi^1 N_\eta^1 N_\xi^2 \\
 K_\eta^1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta^2) = N_\xi^2 N_\eta^1 N_\eta^2 \\
 K_\xi^2 &= \frac{1}{8}(1-\xi^2)(1+\eta) = N_\xi^2 N_\eta^2 N_\xi^1 \\
 K_\eta^2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta^2) = N_\xi^1 N_\eta^1 N_\eta^2
 \end{aligned} \tag{21}$$

a funkcije  $N_\xi^1, N_\xi^2, N_\eta^1$  i  $N_\eta^2$  su definirane kao

$$N_\xi^1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_\xi^2 = \frac{1}{2}(1+\xi), \quad N_\eta^1 = \frac{1}{2}(1-\eta), \quad N_\eta^2 = \frac{1}{2}(1+\eta) \tag{22}$$

Funkcije  $K_\xi^1, K_\xi^2, K_\eta^1$  i  $K_\eta^2$  su grafički prikazane na Slici 7.



**Slika 7.** Grafički prikaz funkcija  $K_j^i$

Vidimo da je ovakvim oblikom funkcija postignuta zakrivljenost prilikom deformiranja linearnog elementa (kod kojeg su geometrija elementa a time i na tradicionalan način definirano polja pomaka opisani preko linearnih funkcija) bez dodavanja dodatnih čvorova na konačnom elementu. Funkcije  $N_i$  su prikazane u prethodnom poglavlju na Slici 3.

Provjerimo što se događa u slučaju kada ploču gledamo kao gredu. U tom slučaju,  $w_4 = w_1$ ,  $w_3 = w_2$ ,  $\theta_{4y} = \theta_{1y} = \theta_1$ ,  $\theta_{3y} = \theta_{2y} = \theta_2$ ,  $\theta_{1x} = \theta_{2x} = \theta_{3x} = \theta_{4x} = 0$  i gornji izraz za pomak  $w$  korištenjem vezane interpolacije postaje

$$w = (N^1 + N^4)w_1 + (N^2 + N^3)w_2 - \frac{1}{2}a(K_\xi^1 + K_\xi^2)(\theta_1 - \theta_2) \quad (23)$$

Pošto je u ovome izrazu  $N^1 + N^4 = \frac{1}{2}(1 - \xi) = N_\xi^1$ ,  $N^2 + N^3 = \frac{1}{2}(1 + \xi) = N_\xi^2$  i  $K_\xi^1 + K_\xi^2 = \frac{1}{4}(1 - \xi^2) = N_\xi^1 N_\xi^2$ , vezana interpolacija se svodi na

$$w = N_\xi^1 w_1 + N_\xi^2 w_2 - \frac{a}{2} N_\xi^1 N_\xi^2 (\theta_1 - \theta_2), \quad (24)$$

odnosno na poznat izraz za vezanu interpolaciju dvočvornog grednog elementa [3,5,11,13,14].

#### 4.2. Vezana interpolacija za konačni element s devet čvorova

Interpolacija pomaka za ovakav element (Slika 8) je dana na slijedeći način:

$$w = I^i w_i - \frac{1}{3}a[K_\xi^1(\theta_{y1} - 2\theta_{y2} + \theta_{y3}) + K_\xi^2(\theta_{y8} - 2\theta_{y9} + \theta_{y4}) + K_\xi^3(\theta_{y7} - 2\theta_{y6} + \theta_{y5})] \\ + \frac{1}{3}b[K_\eta^1(\theta_{x1} - 2\theta_{x8} + \theta_{x7}) + K_\eta^2(\theta_{x2} - 2\theta_{x9} + \theta_{x6}) + K_\eta^3(\theta_{x3} - 2\theta_{x4} + \theta_{x5})] \quad (25)$$

gdje su  $I_i$  Lagrangeovi polinomi:

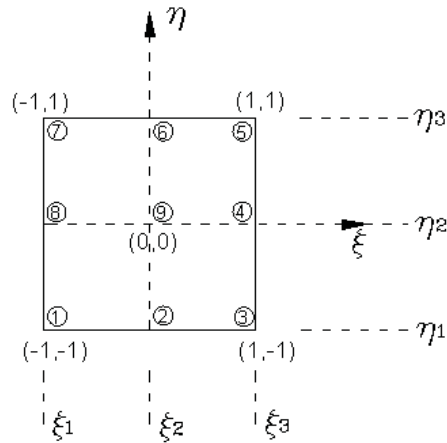
$$\begin{aligned} I^1 &= N_\xi^2 N_\eta^2 N_\xi^3 N_\eta^3 & I^4 &= -4N_\xi^1 N_\eta^1 N_\xi^2 N_\eta^3 & I^7 &= -N_\xi^2 N_\eta^1 N_\xi^3 N_\eta^2 \\ I^2 &= 4N_\xi^1 N_\eta^2 N_\xi^3 N_\eta^3 & I^5 &= N_\xi^1 N_\eta^1 N_\xi^2 N_\eta^2 & I^8 &= 4N_\xi^2 N_\eta^1 N_\xi^3 N_\eta^3 \\ I^3 &= -N_\xi^1 N_\eta^2 N_\xi^2 N_\eta^3 & I^6 &= -4N_\xi^1 N_\eta^1 N_\xi^3 N_\eta^2 & I^9 &= 16N_\xi^1 N_\eta^1 N_\xi^3 N_\eta^3 \end{aligned} \quad (26)$$

funkcije  $N_j^i$  su definirane kao

$$N_j^1 = \frac{1}{2}(1 + j), \quad N_j^2 = -j, \quad N_j^3 = \frac{1}{2}(1 - j), \quad j = \xi, \eta, \quad (27)$$

a  $K_\xi^i$  i  $K_\eta^i$  su funkcije definirane kao

$$\begin{aligned} K_\xi^1 &= N_\xi^1 N_\xi^2 N_\xi^3 N_\eta^2 N_\eta^3 & K_\eta^1 &= N_\eta^1 N_\eta^2 N_\eta^3 N_\xi^2 N_\xi^3 \\ K_\xi^2 &= -4N_\xi^1 N_\xi^2 N_\xi^3 N_\eta^1 N_\eta^3 & K_\eta^2 &= -4N_\eta^1 N_\eta^2 N_\eta^3 N_\xi^1 N_\xi^3 \\ K_\xi^3 &= N_\xi^1 N_\xi^2 N_\xi^3 N_\eta^1 N_\eta^2 & K_\eta^3 &= N_\eta^1 N_\eta^2 N_\eta^3 N_\xi^1 N_\xi^2 \end{aligned} \quad (28)$$



**Slika 8.** Konačni element sa devet čvorova u prirodnom koordinatnom sustavu.

Ako ploču promatramo kao gredu, imamo sljedeće:  $\theta_{xi} = 0$  i

$$\begin{aligned} w_8 &= w_7 = w_1 \\ w_6 &= w_9 = w_2 \\ w_5 &= w_4 = w_3 \end{aligned} \quad (29)$$

te

$$\begin{aligned} \theta_{y1} &= \theta_{y8} = \theta_{y7} = \theta_1 \\ \theta_{y2} &= \theta_{y9} = \theta_{y6} = \theta_2 \\ \theta_{y3} &= \theta_{y4} = \theta_{y5} = \theta_3 \end{aligned} \quad (30)$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} w &= (I^1 + I^7 + I^8)w_1 + (I^2 + I^6 + I^9)w_2 + (I^3 + I^4 + I^5)w_3 - \frac{a}{3} \sum_{i=1}^3 K_{\xi}^i (\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3) \\ I^1 + I^7 + I^8 &= -\frac{\xi}{2}(1-\xi) = I^1 \text{ kod grede} \\ I^2 + I^6 + I^9 &= (1-\xi)(1+\xi) = I^2 \text{ kod grede} \\ I^3 + I^4 + I^5 &= \frac{\xi}{2}(1+\xi) = I^3 \text{ kod grede} \\ K_{\xi}^1 + K_{\xi}^2 + K_{\xi}^3 &= -\frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1+\xi) = N_1 N_2 N_3 \\ w &= I^1 w_1 + I^2 w_2 + I^3 w_3 - \frac{a}{3} N_1 N_2 N_3 (\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (31)$$

t.j. interpolacija za pomak svodi se na vezanu interpolaciju za pomak u slučaju grede s tri čvora. Na Slici 9 dan je grafički prikaz oblika funkcija  $K_j^i$  odakle se može vidjeti kako se ovim doprinosima podiže stupanj polinoma u vezanoj interpolaciji u odnosu na Lagrangeove polinome.

Zbrajanjem funkcija  $K_\xi = K_{1\xi} + K_{2\xi} + K_{3\xi}$  i  $K_\eta = K_{1\eta} + K_{2\eta} + K_{3\eta}$  dobivamo funkcije prikazane na Slici 10, koje predstavljaju odgovarajuće obogaćenje prisutno u vezanoj interpolaciji tročvornih grednih elemenata.

## 5. Primjeri elementa izgrađenih na vezanoj interpolaciji

### 5.1. Četveročvorni konačni element Auricchio-Taylor (Q4-LIM)

U svojem radu [6], F. Auricchio i R.L. Taylor opisali su četveročvorni pločasti element razvijen po mješovitoj shemi za konačne elemente, vrlo prikladan za opisivanje ploča po Mindlinovoj teoriji, a koji istovremeno konvergira točnom rješenju tankih ploča (Kirchhoffova teorija ploča).

Polazište za razvoj elementa je nezavisno interpoliranje funkcija progiba i zaokreta u obliku:

$$w = N^w w_i + N^{w\theta} \theta \quad \theta = N^\theta \theta_i + N^b \theta_b, \quad (32)$$

te istovremeno interpoliranje funkcije sile smicanja po elementu:

$$S = N^S S_b, \quad (33)$$

zbog čega je za definiranje matrice krutosti elementa bio nužan mješoviti pristup.

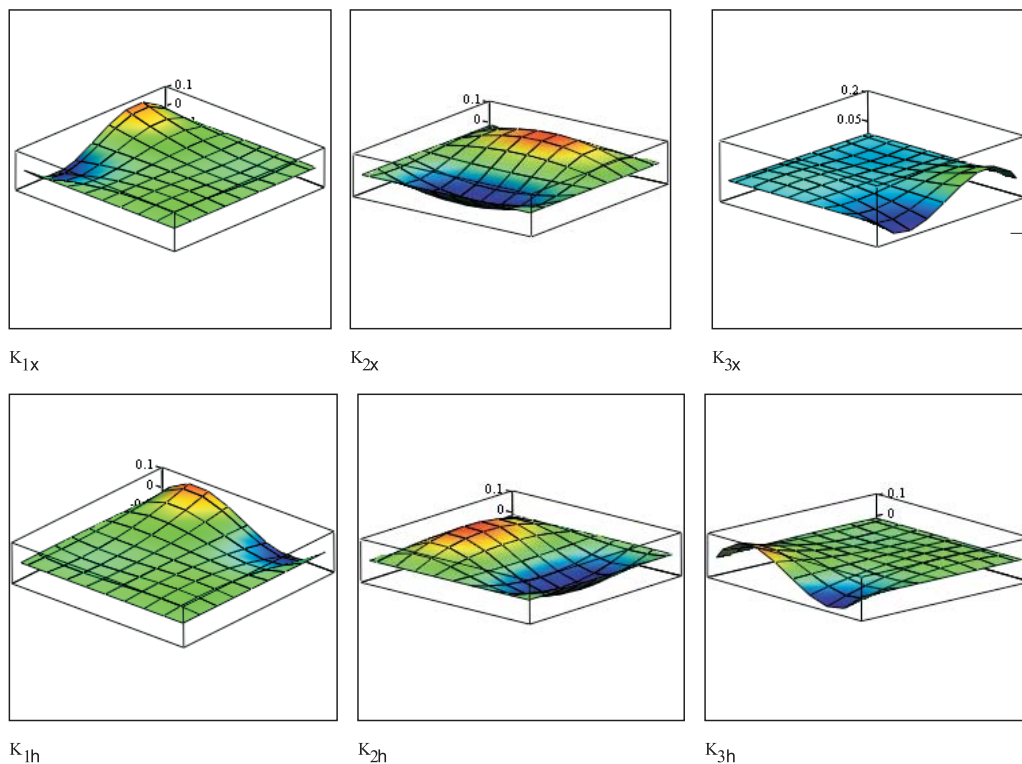
U ovim izrazima funkcija progiba po elementu je opisana preko četiri čvorna pomaka (transverzalne deformacije)  $w_i$  ( $i = 1, 4$ ) i osam čvornih zaokreta  $\theta_i$  ( $\theta_{ix}, \theta_{iy}, i = 1, 4$ ), pri čemu funkcije  $N^w$  su bi-linearne funkcije oblika ("shape functions"), a  $N^{w\theta}$  su vezane kvadratne funkcije opisane komponentama čvornih rotacija projiciranih okomito na stranicu elementa ( $L_j$ ) na koju se odnose:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i^w w_i - \sum_{i=1}^4 N_i^{w\theta} L_i (\theta_j^n - \theta_i^n) \quad (34)$$

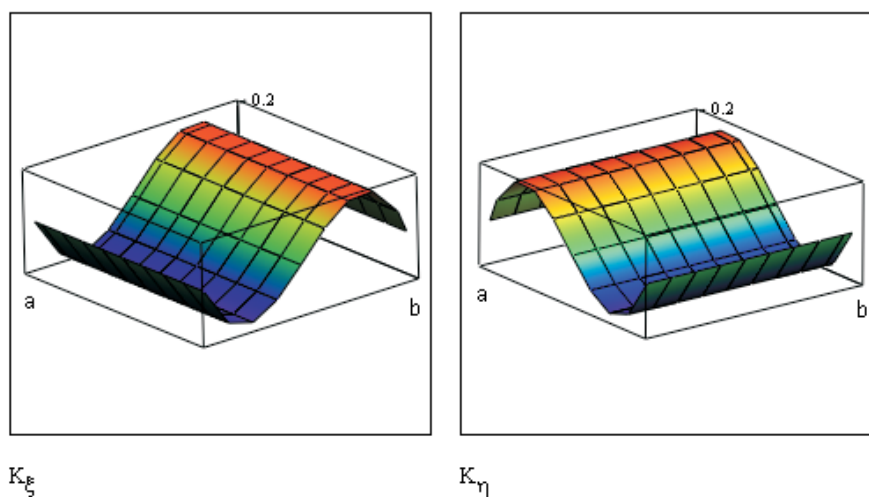
i

$$\begin{aligned} N_1^w &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_1^{w\theta} &= \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_2^w &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & N_2^{w\theta} &= \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_3^w &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_3^{w\theta} &= \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_4^w &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) & N_4^{w\theta} &= \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (35)$$





**Slika 9.** Funkcije  $K_j^i$  koje čine osnovnu razliku između Lagrangeove i vezane interpolacije.



**Slika 10.** Grafički prikaz funkcija  $K_{\xi}$  i  $K_{\eta}$ .

Očito je da je ova interpolacija identična vezanoj interpolaciji iz 4.1.

Za razliku od 4.1, međutim, rotacijska polja sada su opisana izrazima u kojima su  $\theta_i$  parametri čvornih rotacija ( $\theta_{ix}, \theta_{iy}, i=1,4$ ), a  $\theta_b$  su interni rotacijski stupnjevi slobode ( $\theta_b, b=1,4$ )

$$\theta = \sum_{i=1}^4 N_{x,yi}^{\theta} \theta_{x,yi} + \sum_{i=1}^4 N^b \theta_{bi}, \quad (36)$$

pri čemu su  $N^{\theta}$  ponovo iste bi-linearne funkcije oblika kao i  $N^w$ , a  $N^b$  su “bubble” (“mjehurić”) funkcije oblika:

$$\begin{aligned} N_1^{\theta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2^{\theta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3^{\theta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4^{\theta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (37)$$

i

$$N^{bi} = \begin{bmatrix} F_{22}^0 & -F_{12}^0 & F_{22}^0 \eta & -F_{12}^0 \zeta \\ -F_{21}^0 & F_{11}^0 & -F_{21}^0 \eta & F_{11}^0 \zeta \end{bmatrix} \frac{M_b}{\det J} \begin{bmatrix} \theta^{b1} \\ \theta^{b2} \\ \theta^{b3} \\ \theta^{b4} \end{bmatrix} \quad (38)$$

gdje je  $M_b = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ , a  $F_{ij}^0$  su elementi jakobijane izoparametarskog preslikavanja u prirodne koordinate, izračunate za  $\xi = \eta = 0$ :

$$J^0 = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & F_{12}^0 \\ F_{21}^0 & F_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Big|_{\xi=\eta=0} = \begin{bmatrix} \frac{-x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{4} & \frac{-x_1 - x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ \frac{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4}{4} & \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4} \end{bmatrix} \quad (39)$$

a  $x_p, y_i$  ( $i = 1,4$ ) su koordinate čvornih točaka elementa u globalnom koordinatnom sustavu dok je  $\det J = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$  determinanta jakobijane u integracijskoj točki. Unutarnji rotacijski stupnjevi slobode (“bubbles”) omogućavaju obogaćenje

interpolacijskih polinoma za opis rotacija, ujedno održavajući konformnost interpolirane veličine na rubovima elementa, a pritom ne ulazeći u globalnu matricu krutosti (što doprinosi efikasnosti računskog postupka).

U mješovitom pristupu uvedene su dodatne interpolacijske funkcije za sile smicanja unutar elementa ( $S = N^S S_b$ ), kojima je izvršeno dodatno „obogaćenje“ parametara elementa za četiri nove veličine ( $S_b$ ,  $b=1,4$ ), a interpolacijske funkcije  $N^S$  su odabrane na slijedeći kompatibilan način u odnosu na “bubble” funkcije:

$$N^{Si} = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & F_{21}^0 & F_{11}^0 \eta & F_{21}^0 \zeta \\ F_{12}^0 & F_{22}^0 & F_{12}^0 \eta & F_{22}^0 \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{b1} \\ S^{b2} \\ S^{b3} \\ S^{b4} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Iz ovih se interpolacijskih funkcija primjenom Hellinger-Reissnerovog potencijala (detalji su opisani u [5]) može formirati algebarski sistem jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_{Sw}^T \\ 0 & K_{\theta\theta} & K_{b\theta}^T & K_{S\theta}^T \\ 0 & K_{b\theta} & K_{bb} & K_{bS} \\ K_{Sw} & K_{S\theta} & K_{bS}^T & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^i \\ \theta^{x,yi} \\ \theta^{bi} \\ S^{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^w \\ f^\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

u kojima su nepoznanice pomaci  $w_i$  ( $i = 1,4$ ), čvorni zaokreti ( $\theta_{ix}$ ,  $\theta_{iy}$ ,  $i=1,4$ ), unutarnji rotacijski stupnjevi slobode ( $\theta_b$ ,  $b = 1,4$ ) – “bubbles” i unutarnje sile smicanja ( $S_b$ ,  $b = 1,4$ ), tj. ukupno 20 parametara po jednom elementu. Veličine  $K$  u matrici krutosti su integrali deformacijskih energija izračunati preko cijelog elementa za interpolacijske funkcije (integrirani preko 9 Gaussovih točaka) za čije izraze upućujemo na rad [6]. Kako su parametri  $\theta^b$  i  $S^b$  lokalni (svojeviti samo elementu samome), može se provesti kondenzacija sustava jednadžbi i to je učinjeno prvo po unutarnjim rotacijskim stupnjevima slobode, a potom po parametrima smicanja. Na taj način je dobivena slijedeća matrica krutosti izražena samo svojim čvornim stupnjevima slobode (4+8 parametara):

$$\begin{bmatrix} -K_{Sw}^T A_{SS}^{-1} K_{Sw} & -K_{Sw}^T A_{SS}^{-1} A_{S\theta} \\ -A_{S\theta}^T A_{SS}^{-1} K_{Sw} & A_{\theta\theta} - A_{S\theta}^T A_{SS}^{-1} A_{S\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^i \\ \theta^{x,yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^w \\ f^\theta \end{bmatrix}, \quad (42)$$

gdje su  $A_{SS} = K_{SS} - K_{bS}^T (K_{bb})^{-1} K_{bS}$ ,  $A_{\theta\theta} = K_{\theta\theta} - K_{b\theta}^T (K_{bb})^{-1} K_{b\theta}$ ,  $A_{S\theta} = K_{S\theta} - K_{bS}^T (K_{bb})^{-1} K_{b\theta}$ . Nakon formiranja globalne matrice krutosti i vektora vanjskih sila te nanošenja rubnih uvjeta i rješavanja odgovarajućeg sistema linearnih jednadžbi, moguće je

dobiti i unutarnje stupnjeve slobode te odgovarajuće deformacije i napreznja u integracijskim točkama.

### 5.2. Četveročvorni reducirani element (Q4-U01)

Temeljem ovako predloženog konačnog elementa izvedenog po mješovitom modelu, razradili smo novi element koji je formiran iz elementa *Q4-LIM* isključenjem dodatne interpolacije za unutarnje smicanje, pa je to postao “čisti” element opisan vezanom interpolacijom polja pomaka i polja zaokreta:

$$w = N^w w_i + N^{w\theta} \theta_i \quad \text{i} \quad \theta = N^\theta \theta_i + N^b \theta_b \quad (43)$$

s uključenim unutarnjim rotacijama. Interpolacijske funkcije su jednake kao i u slučaju elementa *Q4-LIM*:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i^w w_i - \sum_{i=1}^4 N_i^{w\theta} L_i (\theta_j^n - \theta_i^n) \quad \text{i} \quad \theta = \sum_{i=1}^4 N_{x,yi}^\theta \theta_{x,yi} + \sum_{i=1}^4 N^{bi} \theta_{bi}, \quad (44)$$

te je time određena matrica krutosti elementa u algebarskim jednadžbama [15]:

$$\begin{bmatrix} Ks_{ww} & Ks_{\theta ww}^T & K_{bw}^T \\ Ks_{\theta ww} & K_{\theta\theta} + Ks_{\theta w \theta w} & K_{b\theta}^T + Ks_{b\theta w}^T \\ Ks_{bw} & K_{b\theta} + Ks_{b\theta w} & K_{bb} + Ks_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^i \\ \theta^{x,yi} \\ \theta^{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^w \\ f^\theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Broj nepoznatih parametara je 4 za pomake, 8 za čvorne zaokrete i još 4 za unutarnje zaokrete, tj. ukupno 16 nezavisnih stupnjeva slobode.

U ovim izrazima  $K_{ij}$  su elementi matrice krutosti, koji potječu od energije savijanja, a  $Ks_{ij}$  su elementi koji potječu od energije smicanja na modelu elementa i računaju se iz integrala:

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta} &= \int_A (LN_\theta)^T D_b (LN_\theta) dA \\ K_{bb} &= \int_A (LN_b)^T D_b (LN_b) dA \\ K_{b\theta} &= \int_A (LN_b)^T D_b (LN_\theta) dA \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
Ks_{ww} &= \int_A (\nabla N_w)^T D_s (\nabla N_w) dA \\
Ks_b &= \int_A (eN_b)^T D_s (eN_b) dA \\
Ks_{\theta w \theta w} &= \int_A (eN_\theta + \nabla N_{w\theta})^T D_s (eN_\theta + \nabla N_{w\theta}) dA \\
Ks_{\theta w} &= \int_A (eN_\theta + \nabla N_{w\theta})^T D_s (\nabla N_w) dA \\
Ks_{bw} &= \int_A (eN_b)^T D_s (\nabla N_w) dA \\
Ks_{b\theta w} &= \int_A (eN_b)^T D_s (eN_\theta + \nabla N_{w\theta}) dA
\end{aligned} \tag{47}$$

gdje su  $L$ ,  $\nabla$  i  $e$  operatori koji igraju ulogu operatora  $D_1$  i  $D_2$  iz poglavlja 2.2, ali u nešto drugačijem zapisu

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

a  $D_b$  i  $D_s$  su materijalne matrice za savijanje i smicanje iz istog poglavlja (2.2). Veličine  $f_w$  i  $f_\theta$  na desnoj strani ravnotežne jednadžbe predstavljaju doprinose vanjskoga opterećenja čvornim silama i momentima.

Unutarnji stupnjevi slobode  $\theta^{bi}$  se I ovdje mogu kondenzirati. Kondenzirana matrica krutosti elementa imat će 12 stupnjeva slobode i glasi:

$$K = \begin{bmatrix} Ks_{ww} - Ks_{bw}^T A_{bb}^{-1} Ks_{bw} & Ks_{\theta ww}^T - Ks_{b\theta w}^T A_{bb}^{-1} (K_{b\theta} + Ks_{b\theta w}) \\ Ks_{\theta ww} - (K_{b\theta}^T + Ks_{b\theta w}^T) A_{bb}^{-1} Ks_{bw} & K_{\theta\theta} + Ks_{\theta w \theta w} - (K_{b\theta}^T + Ks_{b\theta w}^T) A_{bb}^{-1} (K_{b\theta} + Ks_{b\theta w}) \end{bmatrix} \tag{49}$$

gdje je  $A_{bb}^{-1}$  inverzna matrica od  $A_{bb} = K_{bb} + Ks_{bb}$ , simetrične matrice sastavljene od deformacijske energije savijanja i deformacijske energije smicanja.

### 5.2.1. Četveročvorni dvaput reducirani element (Q4-U02)

Iz gore opisanog modela daljnjom redukcijom izveden je još jednostavniji konačni element opisan istim interpolacijskim funkcijama, ali bez “bubble” unutarnjih stupnjeva rotacijske slobode, pa je polje pomaka ostalo jednako, polje rotacija reducirano na:

$$w = N^w w_i + N^{\theta} \theta_i \quad \text{i} \quad \theta = N^{\theta} \theta_i \quad (\text{bez unutarnjih rotacija } \theta^{bi}). \quad (50)$$

Matrica krutosti elementa u algebarskim jednadžbama reducirana je na:

$$\begin{bmatrix} K_{S_{ww}} & K_{S_{\theta ww}}^T \\ K_{S_{\theta ww}} & K_{\theta\theta} + K_{S_{\theta w \theta w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^i \\ \theta^{x, yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^w \\ f^{\theta} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

gdje su  $K_{ij}$  isti elementi matrice krutosti kao i za element *Q4-U01*. Ova matrica ima direktnih 12 stupnjeva slobode i ne zahtjeva kondenzaciju, a ovaj element u potpunosti je ekvivalentan elementu opisanom u poglavlju 4.1 [11].

## 6. Numerički primjeri

### 6.1. Primjer savijanja prosto oslonjene trake

U ovom primjeru istražuje se sposobnost elementa pri statičkoj analizi da uključi ili izuzme energiju smicanja u proračunu. Razmatra se prosto oslonjena traka s odnosom raspona i debljine  $L/h = 1$ . Iako izvan područje upotrebljivosti po teoriji ploča (za umjereno debele ploče), ovaj omjer  $L/h$  omogućava usporedbu numeričkih i točnih rješenja. Materijalne veličine u proračunu su:

$$E = 1000.0, \quad \nu = 0.0 \quad (52)$$

Traka je opterećena na sredini raspona koncentriranom silom  $F = 400$  po jedinici širine trake. Iz toga, vertikalni pomaci uslijed savijanja ( $w$ ) i smicanja ( $s$ ) su dati izrazima:

$$w_b(\frac{1}{2}L) = FL^3/(48D) = 0.10, \quad w_s(\frac{1}{2}L) = 3FL/(10Gh) = 0.24, \quad (53)$$

gdje je  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ ,  $L$  je raspon trake, a  $G = E/(2(1+\nu))$  modul smicanja, pa je ukupni pomak

$$w_{\text{tot}} = w_b + w_s = 0.10 + 0.24 = 0.34. \quad (54)$$

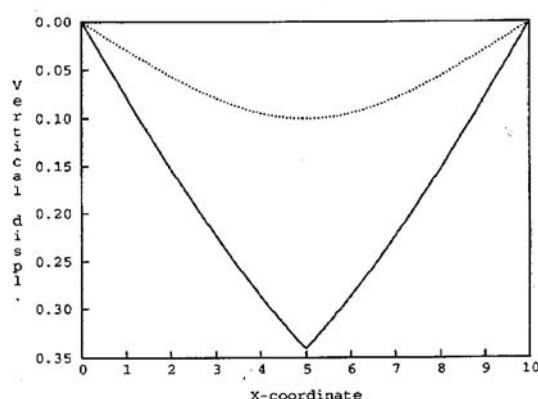
U Tablici 1. dat je pregled numeričkih odgovora za elemente *Q4-LIM*, *Q4-U01* i *Q4-U02* u obliku izračunatih vertikalnih pomaka, momenata i sila smicanja za slučaj sa i bez energije smicanja, izračunatih na sredini raspona trake. Na Slici 11. iscrtani su grafovi vertikalnih pomaka trake za oba slučaja [6]. Može se primijetiti da rezultati svih elemenata konvergiraju točnim rješenjima i prema teoriji deformacijskog smicanja i prema teoriji krutog smicanja, sukladno uračunatoj ili neuračunatoj energiji smicanja. Kod elementa *Q4-LIM*, međutim, ta konvergencija je najbrža.

**Tablica 1.** Prosto oslonjena greda sa silom na sredini raspona

Mreža	Q4-LIM			Q4-U01, Q4-U02		
	$w_b$	$w_s$	$w_{tot}$	$w_b$	$w_s$	$w_{tot}$
1x10	0.099829	0.24000	0.33983	0.099000	0.24000	0.33900
1x20	0.099958	0.24000	0.33996	0.099750	0.24000	0.33975
1x50	0.099994	0.24000	0.33999	0.099960	0.24000	0.33996
1x100	0.099999	0.24000	0.34000	0.099990	0.24000	0.33999
<b>Točno rješenje</b>	0.100000	0.24000	0.34000	0.100000	0.24000	0.34000

Mreža	Q4-LIM		Q4-U01		Q4-U02	
	$M$	$S$	$M$	$S$	$M$	$S$
1x10	90.0	200.0	90.0	200.0	90.0	200.0
1x20	95.0	200.0	95.0	200.0	95.0	200.0
1x50	98.0	200.0	98.0	200.0	98.0	200.0
1x100	99.0	200.0	99.0	200.0	99.0	200.0
<b>Točno rješenje</b>	100.0	200.0	100.0	200.0	100.0	200.0

Napomena: Sve izračunate vrijednosti momenata i sila smicanja su točne vrijednosti za točke u kojima su računane – težišta elementa najbližeg sredini raspona grede



**Slika 11.** Prosto oslonjena traka. Vertikalni pomaci trake s energijom smicanja (puni graf) i bez energije smicanja (točkasti graf) [6]

## 6.2. Primjer prosto oslonjene kvadratne ploče

Drugi primjer koji je odabran za usporedbu ponašanja elemenata je kvadratna ploča slobodno oslonjena na svim rubovima. U modelu je zbog dvoosne simetrije opisana samo jedna četvrtina polja i mreže koje su uspostavljene odnose se na tu četvrtinu. Razmatrana su dva odnosa raspona ploče prema debljini,  $L/h = 10$  i  $L/h = 1000$ , sa jednoliko podijeljenim opterećenjem ( $q = 1$ ) po ploči kao teretom, te materijalnim vrijednostima  $E = 1092.0$  i  $\nu = 0.3$ .

Numerički rezultati za prosto oslonjenu kvadratnu ploču prikazani su za sva tri obrađena elementa u Tablicama 2. i 3. zajedno s Navierovim rješenjem (razvojem u redove). Rubni uvjet slobodnog oslonca je modeliran kao tip SS-2 [4] na svim elementima.

U tablicama su s  $w^*$  i  $M^*$  označeni progib i moment na sredini raspona ploče ( $M_x=M_y=M$ ):

$$w^* = w / (qL^4/100D)$$

$$M^* = M / (qL^2/100)$$

gdje je  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ , a  $L$  je raspon ploče ( $L_x=L_y=L$ ).

U svim slučajevima uočljivo je da element Q4-LIM najbrže konvergira točnim rješenjima za pomake, ali u slučaju debelih ploča ne i za unutarnje sile. Također, važno je napomenuti da mješoviti pristup primijenjen na tome elementu u potpunosti eliminira problem shear-lockinga u slučaju tankih ploča te da primjena vezane interpolacije, za razliku od grednih nosača, ovdje sama po sebi ne uspijeva ukloniti tu anomaliju.

**Tablica 2.** Prosto oslonjena kvadratna ploča opterećene podijeljenim opterećenjem,  $L/h = 10$

Mreža	Q4-LIM		Q4-U01		Q4-U02	
	$w^*$	$M^*$	$w^*$	$M^*$	$w^*$	$M^*$
2x2	0.42626	4.125	0.41218	4.146	0.41163	4.140
4x4	0.42720	4.623	0.42512	4.643	0.42448	4.636
8x8	0.42727	4.747	0.42681	4.753	0.42664	4.751
16x16	0.42728	4.778	0.42717	4.780	0.42713	4.779
<b>Navier red</b>	0.42728	4.7886	0.42728	4.7886	0.42728	4.7886

Napomena: Sve izračunate vrijednosti momenata su vrijednosti u točkama težišta elementa najbližeg sredini raspona grede, a rješenje po Navierovom redu se odnosi na točku sredine ploče.

**Tablica 3.** Prosto oslonjena kvadratna ploča opterećene podijeljenim opterećenjem,  $L/h = 1000$

Mreža	Q4-LIM		Q4-U01		Q4-U02	
	$w$	$M$	$w$	$M$	$w$	$M$
2x2	0.40365	4.119	0.0031093	0.03396	0.0031093	0.03396
4x4	0.40586	4.623	0.055621	0.6654	0.055621	0.6654
8x8	0.40616	4.747	0.29659	3.524	0.29658	3.524
16x16	0.40622	4.778	0.39710	4.677	0.39706	4.677
<b>Navier red</b>	0.40624	4.7886	0.40624	4.7886	0.40624	4.7886

Napomena: Sve izračunate vrijednosti momenata su vrijednosti u točkama težišta elementa najbližeg sredini raspona grede, a rješenje po Navierovom redu se odnosi na točku sredine ploče.



## 7. Zaključak

U ovome radu izložena je problematika vezana uz odabir interpolacijskih funkcija kod konačnih pločastih elemenata. Prikazana je nova interpolacija, nazvana vezana interpolacija, prema engl. *linked interpolation*. Bit ove interpolacije jest u tome da se pomak interpolira funkcijom koja je za jedan stupanj viša od stupnja funkcije kojom se interpolira kut zaokreta

Iskustvo na izvedenim primjerima pokazuje je Auricchio –Taylorov element *Q4-LIM* iz rada [6] pokazuje izvrsno ponašanje i već kod rijetkih mreža elemenata daje vrlo bliske vrijednosti deformacija i sila točnim rješenjima i to neovisno od toga da li se promatra deformacija samo od savijanja ili ukupna deformacija (savijanje i smicanje = Mindlinova teorija ploča). Također, element nije znatnije osjetljiv niti na debljinu same ploče u odnosu na raspon.

Elementi *Q4-U01* i *Q4-U02*, koji predstavljaju jednostavnije verzije elementa *Q4-LIM*, znatno su sporiji u približavanju točnim rješenjima. I dok se kod jednodimenzionalnih problema dovoljno brzo približavaju točnim rješenjima, kod dvodimenzionalnih problema zaostajanje postaje znatnije. Razlike u ponašanju između elemenata *Q4-U01* i *Q4-U02* u jednodimenzionalnim problemima uopće ne postoje – deformacije i presječne sile su jednake, što znači da u jednodimenzionalnim problemima unutarnje slobode rotacija nisu aktivirane. U dvodimenzionalnim problemima razlika među njima postoji, ali je minimalna - u četvrtoj znamenici deformacijskih veličina. Doprinos „bubble“ parametara je tek nešto veći kod debljih ploča nego kod tanjih, pa je upitan njihov doprinos točnosti i brzini aproksimacija.

Elementi *Q4-U01* i *Q4-U02* predstavljaju deformacijski bazirane konačne elemente najnižeg reda i u daljnjem radu metodologija njihova razvoja primijenit će se na razvijanje elemenata koji koriste vezanu interpolaciju višeg reda.

**Zahvala.** Prikazani rezultati proizašli su iz znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025 (Unapređenje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama) provedenog uz potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

## Literatura

- [1] R.L. Taylor, S. Govindjee. *A quadratic linked plate element with an exact thin plate limit*. Report No. UCB/SEMM-2002/10, University of California at Berkeley, Department of Civil and Environmental Engineering, Berkeley, 2002.
- [2] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [4] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, inc., Mineola, New York, 2000.
- [5] F. Auricchio, R.L. Taylor. *A new family of quadrilateral thick plate finite elements based on linked interpolation*. Report No. UCB/SEMM-93/10, University of California at Berkeley, Department of Civil Engineering, Berkeley, 1993.
- [6] F. Auricchio, R.L. Taylor. A shear deformable plate element with an exact thin limit. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **118**: 393-412, 1994.
- [7] C. Chinosi, F. Lovadina. Numerical analysis of some mixed finite element methods for Reissner-Mindlin plates. *Computational Mechanics*, **16**: 36-44, 1995.
- [8] F. Auricchio, R.L. Taylor. A triangular thick plate finite element with an exact thin limit. *Finite Elements in Analysis and Design*, **19**: 57-68, 1995.
- [9] F. Auricchio, C. Lovadina. Analysis of kinematic linked interpolation methods for Reissner-Mindlin plate problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**: 2465-2482, 2001.
- [10] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. *The Finite Element Method. Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [11] E. Papa. *Vezana interpolacija u linearnoj analizi debelih ploča metodom konačnih elemenata*. Diplomski rad, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Rijeka, 2007.
- [12] A. Ibrahimbegović. Quadrilateral finite-elements for analysis of thick and thin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **110**: 195-209, 1993.
- [13] G. Jelenić, E. Papa. Linked interpolation of arbitrary order in static linear analysis of 3D thick beam elements. *To be submitted*, 2009.
- [14] E. Papa, G. Jelenić. Vezana interpolacija u konačnim elementima Timošenkovih prostornih greda. U: N. Ožanić, ur., *XI Zbornik radova Građevinskoga fakulteta Sveučilišta u Rijeci*, 131-148. Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2008.
- [15] D. Ribarić. Osobne bilješke, 2009.