Četvrti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Slavonski Brod, 10. lipnja 2011.

VJEROJATNOSNA INŽENJERSKA MEHANIKA

Kalman Žiha, Joško Parunov, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, +385 1 6168132, kziha@fsb.hr

Sažetak: Prikaz se bavi odnosom tradicionalne mehanike i područja koje se već dulje vrijeme razvija pod imenom „Probabilistic Engineering Mechanics". Najprije će se navesti razlozi koji su doveli do razvoja ovog područja. Potom će se vidjeti na kojim se podacima zasniva. Pobrojat će se postupci koji se koriste. Na kraju će se dati primjer. Zaključak će razmotriti odnos prema klasičnoj mehanici, važnost područja, mogućnosti praktične primjene i očekivani razvoj.

Ključne riječi: *Vjerojatnost, statistika, pouzdanost, granična čvrstoća*

1 UVOD

Razlozi za razvoj Vjerojatnosne Inženjerske Mehanike (VIM) su neizvjesnosti i varijabilitet pojava s kojima se susreće inženjerska mehanika. Dvije vrste neizvjesnosti utječu na ishode inženjerskog rada. Aleatorna, ili kako se još označava, objektivna, externa ili ireducibilna variabilnost, nastaje zbog prirodnih nepredvidljivosti pojava. Slučajnosti te vrste se ne mogu mijenjati premda poznavanje pojava može pomoći. Epistemijska neizvjesnost, ili subjektivna, unutarnja odnosno neizvjesnost modeliranja, potječe od manjka znanja o nekom području. Smanjuje se istraživajima, mjerenjima i boljim modeliranjem pojava u čemu stručnjaci imaju važnu ulogu.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

Problemi s kojima se susreće i bavi VIM u praksi su metode i podaci. Osim jednoznačno odredljivih, determinističkih podataka, inženjeri se susreću s podacima slučajne naravi [1]. Iskustvene odrednice podataka s kojima se opisuje njihova slučajna narav su njihove težnje srednjoj vrijednosti, rasipanje te razdioba njihove učestalosti.

Uobičajene mjere rasipanja podataka su realni brojevi jednaki nuli kada su sve vrijednosti podataka međusobno jednake a rastu s porastom razlike među vrijednostima. Često korištene mjere rasipanja su: raspon, srednja razlika,varianca, standardna devijacija, koeficijent variacije. Determinističke veličine se u inženjerstvu opisuju s N – nazivnom veličinom, i s mogućim odstupanjima T – tolerance odnosno $t=T/N$ - relative tolerance. Slučajne veličine se opisuju sa:

- $\mu=ON+N$ Srednja vrijednost, gdje je $O=\mu/N-1$ Odstupanje od nazivne veličine,
- $Var=\sigma^2$ Varijanca, $\sigma=Var^{1/2}$ standardna devijacija, $COV=\sigma/\mu$ koeficijent varijacije

Slučajim veličinama pripadaju pomoćni i središnji momenti r-toga reda [1]:

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx \qquad\qquad M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx \,.$$

Razdioba učestalosti F se prikazuju sa razdiobama gustoće vjerojatnosti (PDF) i kumulativnim funkcijama gustoće vjerojatnosti (CDF).

Po potrebi se mogu iskustveno povezati i determinističke veličine toleranci sa statističkim rasipanjima slučajnih veličina, na primjer $T=n\ \sigma$.

Osim saznanja o prirodi slučajnih veličina od osobito su značaja dva teorema [1].

Teorem 1: Srednja vrijednost linearne kombinacije slučajnih varijabli je zbroj srednjih vrijednosti sastavnica: $\mu = a_1\mu_1 + a_1\mu_2 + \ldots + a_k\mu_k$.

Teorem 2: Varijanca linearne kombinacije slučajnih varijabli je zbroj varijanci sastavnica: $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_k^2\sigma_k^2$.

3 OPIS INŽENJERSKIH PROBLEMA SA SLUČAJNIM SVOJSTVIMA

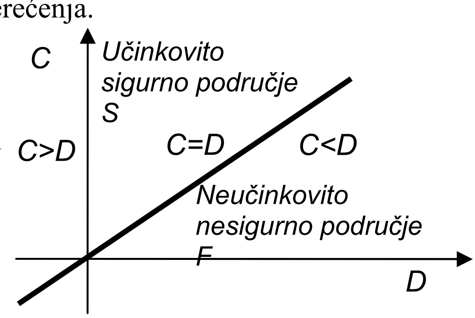
Inženjerski se problemi se razborito mogu predočiti konačnim skupom osnovnih odrednica koje čine osnovne varijable X, parametri P i konstante C, kojima se opisuju svojstva problema kao što su geometrija , topologija, svojstva materijala i opterećenja:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n, P_1, P_2, \cdots P_p, C_1, C_2, \cdots, C_c)$$

Ovisno o pridijeljenim svojstvima inženjerski se problem razmatraju kao deterministički, probabilistički (vjerojatnostni), polu-probabilistički ili miješani.

Mnogi se inženjerski problemi opisuju svojim mogućnostima (C-capability, capacity, S-strength, R-resistance) u odnosu na zahtjeve za njihovom učinkovitošću (D-demand, L-loads). Učinkovitosti odnosno sigurnosti djelovanja se izražavaju kroz odnose mogućnosti i zahtjeva, Sl. 1. Uobičajene mjere su razlika sigurnosti $m(\mathbf{X}) = f_C \cdot C(\mathbf{X}) - f_D \cdot D(\mathbf{X})$, faktori sigurnosti $f(\mathbf{X}) = f_C \cdot C(\mathbf{X}) / f_D \cdot D(\mathbf{X})$ ili iskoristivosti izdržljivosti $i(\mathbf{X}) = 1 / f(\mathbf{X})$; f_C i f_D su deterministički iskustveni faktori smanjenja izdržljivosti i povećanja opterećenja.

$$g(\mathbf{X}) \begin{cases} C < D & \text{za } \mathbf{X} \in \mathbf{F} \\ C = D & \text{za } \mathbf{X} \text{ na plohi} \\ C > D & \text{za } \mathbf{X} \in \mathbf{S} \end{cases}$$



Slika 1. Značenje funkcija graničnog stanja

4 OCJENE UČINKOVITOSTI

Razne su mogućnosti i razine postupaka za ocjenjivanje učinkovitosti odnosno sigurnosti inženjerskih problema suočenih sa slučajnim pojavama [2-11].

Na samom početku VIM koristi karakteristične vrijednosti na osnovi statističkih podataka o izdržljivosti i zahtjevima (Postupak 0-te razine).

Jednostavni, prvi predloženi složeni oblik za procjenu učinkovitosti odnosno sigurnosti je Cornellov indeks sigurnosti (1966):

$$\beta_C = \frac{\overline{M}}{\sigma_M} = \frac{\overline{C} - \overline{D}}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}, \tag{1}$$

koji se označava i kao postupak drugih momenata (Postupak 1. razine) (Second Moment SM methods). Odmah je potom postalo bjelodano da se formulacija (1) može proširiti na sve linearne kombinacije slučajnih varijabli s poznatim momentima prvog i drugog reda (aritmetička sredina označena s potegom i varijanca σ^2) u definiciji graničnih stanja $g(\mathbf{X}) = -a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < 0$, vidjeti Sl. 1. i teoreme 1 i 2,. kako slijedi:

$$\beta_{SM} = \left[-a_o + \sum_i a_i \cdot \overline{x}_i \right] / \sqrt{\sum_i \left(a_i \cdot \sigma_{xi} \right)^2} \tag{2}$$

U slijedećem koraku se uvodi linearizacija nelinearnih funkcije graničnih stanja razvojem u Taylorov niz korištenjem prvog člana reda i statističkih momenata drugog reda (the First Order Second Moment (FOSM)) (Postupak 1-razine):

$$\beta_{FOSM} = \left[-a_o + \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\overline{x}_i} (\overline{x}_i - x_i) \right] / \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{X^*}^2 \sigma_{X_i}^2} \tag{3}$$

Kad se linearizacija provodi u srednjoj vrijednost (the Mean Value First Order Second Moment (MVFOSM). Mora se mađutim naomenuti da točnost rezultata bitno ovisi o karakteru funkcije ogranočenja i odabranoj točki linearizacije.

Zbog dugogodišnje tradicije faktora sigurnosti i navike nihove primjene VIM korist parcijalne faktore sigurnosti određene na osnovi statističkih podataka. Na primjer, za marginu sigurnosti $M = C - D$ i pripadajući indeks sigurnosti $\beta = (\overline{C} - \overline{D}) / \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}$ parcijalni faktori su $f_C = 1 - \alpha_C \cdot \beta \cdot COV_C$ i $f_D = 1 + \alpha_D \cdot \beta \cdot COV_D$ što marginu redefinira u skladu sa statističkim podacima kao $M' = f_C \cdot \overline{C} - f_D \cdot \overline{D} = 0$. Normalizirane standardne devijacije su u gornjim izrazima $\alpha_C = -\sigma_C / \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}$ i $\alpha_D = +\sigma_D / \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}$.

Međutim, krajnji cilj vjerojatnosne mehanike je analiza pouzdanosti i određivanje vjerojatnosti općenitih inženjerskih problema definiranih višestrukim integralima multivariatnih funkcija gustoće razdiobe *f(X)* razapetih preko područja integracije određenih nelinearnim funkcijama ograničenja $g(\mathbf{X}) \leq 0$ kako slijedi:

$$p_F = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \iiint_{g(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \tag{4}$$

U većini se slučajeva ovaj zadatak ne može točno rješiti zbog čega se pristupa raznim približenjima koje odlikuju područje vjerojatnosne inženjerske mehanike.

Jednostavno prikazivanje multivariatnih funkcija gustoće razdiobe u (4) je moguće samo za nezavisne slučajne varijable i to u obliku umnoška pojedinih funkcija:

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_i) \cdots f(x_n) \tag{5}$$

4 RJEŠAVANJA PROBLEMA VJEROJATNOSNE MEHANIKE

Prvi je pokušaj u rješavanj problema s proizvoljnim, ne-normalnim funkcijama distribucije bio aproksimacija repa krivulje gustoće razdiobe s normalnom krivuljom. Međutim, poslije se pokazalo da je mnogo jednostavniji i učinkovitiji postupka moguće ostvariti neposrednim transformacijama proizvoljnih distribucija u normalnu razdiobu.

4.1 Monte-Carlo integracija ili simulacija (MCS)

Ovo je jdini postupak koji nudi mogućnost ocjene rezultat problema kakav je izvorno opisan složeniim integralima (4) ali u okvirima intervala pouzdanosti [9]. Sirova Monte-Carlo simulacija Crude Monte Carlo Simulation (CMCS) potrebuje ogroman broj pokusa da bi se odredio interval pouzdanosti rezultata od praktične važnosti. U međuvremenu su se razvili postupci koji jako ubrzavaju proračun kao na primjer uzimanje uzoraka po važnosti Importance Sampling, Stratified Sampling, Directional Sampling, Descriptive Sampling, Latyn Hypercube Sampling itd.

4.2 Napredni analitički postupci

U cilju transformacije opće nelinearne funkcije graničnih stanja $g\left[C(\mathbf{X}), D(\mathbf{X})\right]$, odnosno $g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots X_n)$ Sl. 1, osnovni je zadatak izjednačiti zadane kumulativne funkcije distribucije osnovnih varijabli X_i sa standardnom normalnom varijablom vjerojatnostit u_i kao $F(X_i) = \Phi(u_i)$ za sve i. Ovom se transformacijom jamči isti sadržaj vjerojatnosti u odabranoj domeni integracije i može se postići transformacijama $X_i = F^{-1}\left[\Phi(u_i)\right]$ $u_i = \Phi^{-1}\left[F(X_i)\right]$ primjenjenih na graničnu plohu:
$g(\mathbf{X}) = g\left\{F^{-1}[\Phi(u_1)], F^{-1}[\Phi(u_2)], \dots, F^{-1}[\Phi(u_n)]\right\}$ ili $g(\mathbf{U}) = g\left\{\Phi^{-1}[F(X_1)], \Phi^{-1}[F(X_2)], \dots \Phi^{-1}[F(X_n)]\right\}$.

Samo za normalnu distribuciju je $u_i = \left(X_i - \bar{X}_i\right) / \sigma_{X_i}$.

Napredni se postupak Advanced First Order Reliability Method (AFORM) (2-razina) definira kao nelinearni optimizacijski problem s nelinearnim ograničenjima:

> Za i-ti razmatrani slučaj i za zadani skup osnovnih slućajnih varijabli $\mathbf{X}_i$:
> Naći minimalnu udaljenost β_i (indeks sigurnosti) od ishodišta u standardnom normalnom prostoru do hiper-ravnine primjenom transformacije $u_i = \Phi^{-1}[F(X_i)]$ na lineariziranu granična ploha $g_i(X_i)$),
> tako da je zadovoljeno ograničenje $g_i(X_i)=0$.

Gornji se optimizacijski problem s ograničenjima rješava na računalu. Najviše je u upotrebi Rackwitz-Fiesler iterativni algoritam za određivanje indeksa sigurnosti [6-8].

Osim gore spomenute FORM procedure koristi se i Second Order Reliability Method (SORM) (3-razina) koja u razvoju koristi i članove drugog reda u razvoju u Taylorov niz [9] što može pogodovati točnosti kod nekih nelinearnih problema.

Za zavisne varijable koriste se Rosenblath-ova i Nataf-ova transformacija [2-8].

4 POUZDANOST SUSTAV

Prethodna su se razmatranja odnosila na određivanje učinkovitosti odnosno sigurnosti jednog jedinog načina djelovanja jedne neovisne sastavnice sustava. Svaka analiza sustava koristi postupak za ocjenu učinkovitosti zvan Functional Modes and Effects Analysis (FMEA) uz pomoć funkcionalnih dijagrama i stabala grešaka (fault tree)[2-5]. Složeni mehanički problemi se sastoje od mnogih sastavnica od kojih svaka može ostvarivati nekoliko načina djelovanja. Tako neka konačni broj n_v slučajnih varijabli čini slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_v})$ kojim se opisuje m pojedinačnih načina djelovanja. Granične funkcije za sva stanja $k=1,2,\dots,m$, neka su $g_k(\mathbf{X}) = 0$.

Kako su projektne varijable slučajnog karaktera tako se i ishod djelovanja smatra slučajnim događajem $A_k^o = [g_k(\mathbf{X}) > 0]$ kojemu pripada pouzdanost u njegovo ispravno djelovanje određeno s vjerojatnošću $p(A_k^o) = p[g_k(\mathbf{X}) > 0] = \iiint_D f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$.

Vjerojatnost nedjelovanja je tada dana sa izrazom $p(A_k^f) = 1 - p(A_k^o) = p[g_k(\mathbf{X}) \leq 0]$.

Ta dva događaja čine jednastavne alternative $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \overline{A} \\ p(A) & 1 - p(A) \end{pmatrix}$.

Združena funkcija razdiobe *f(X)* slučajnih varijabli ***X*** in (4) sadrži u sebi inženjerske spoznaje o neizvjesnostim problema. Domenu integracije D određuju funkcije graničnih stanja koje uključuju inženjerska znanja o mehaničkim svojstvima i uvjetima korištenja. Pokazuje se da se pojedinačni načini djelovanja mogu razmatrati i okvirima teorije sustava te da vrijedi Boolova algebra koja se prikazuje Venn-ovim diagramima.
U inženjerskim se problemima javlaju isključivi događaji, neisključivi (korelirani) događaji, moguće zavisni ili nezavisni. U praksi VIM-a susreću se modeli serijskih, paralelnih, mješovitih i složenih sustava [2-8]. Serijski sustavi su nedjelotvorni u slučaju da je bilko koja sastavnica nedjelotvorna što se može prikazati kao:

$$P_f = p\left(\bigcup_{all\ k} A_k^f\right) = p\left\{\bigcup_{all\ k} [g_k(X) \leq 0]\right\} \tag{6}$$

a pouzdanost nije veća od djelotvornosti najslabije sastavnice, R<min($p(A_i)$).
Paralelni sustavi su nedjelotvorni kad su sve sastavnice nedjelotvorne, ili matematički:

$$P_f = p\left(\bigcap_{all\ k} A_k^f\right) = p\left\{\bigcap_{all\ k} [g_k(X) \leq 0]\right\} \tag{7}$$

5 PRIMJER

VIM je našla primjenu u provjeri granične čvrstoće trupa na savijanje u pravilima za gradnju broda klasifikacijskih društava [12-14], Tablica 1. Funkcija graničnog stanja je opisana slučajnim veličinama i podliježe postupcima VIM ovako:

$$\hat{\chi}_u M_u - \hat{M}_{sw} - \psi \hat{\chi}_w \hat{\chi}_{nl} \hat{M}_w < 0 \tag{8}$$

U (8) su: M_u -deterministički granični moment savijanja brodskog trupa
M_{sw} -moment savijanja na mirnoj vodi Gumbelova distribucija
M_w - moment savijanja na valovima Gumbelova distribucija
ψ - deterministički faktor kombinacije opterećenja
χ_u, χ_w, χ_{nl} - neizvjesnosti modeliranja granične čvrstoće (normalna), linearnih valnih opterećenja (normalna) i nelinearnih valnih opterećenja (lognormalna).

Tablica 1. Rezultati provjere granične čvrstoće brodskog trupa metodama FORM, FOSM, CMCS [15-16], za novi brod za puni brod (FL), brod u balastu (BL) i djelomično krcanje (PL)

Postupak		FL	BL	PL	p_f(annual)
FORM	β(p_f)	4.75(1.02E-06)	3.84(6.15E-05)	4.5(3.40E-06)	3.82(.59E-05)
FOSM	β(p_f)	4.40(5.36E-06)	3.85(5.65E-05)	4.01(3.05E-05)	3.74(9.24E-05)
CMCS	β(p_f) Interval	4.80(7.93E-07) (+1.034/-0.91)	3.96(3.75E-05) (+0.15/-0.14)	4.47(3.91E-06) (+0.61/+0.63)	3.93(4.22E-05)

6 ZAKLJUČAK

Ovaj je rad napisan da bi se potražio odgovor na pitanja treba li mehaničarima vjerojatnosna inženjerska mehanika (VIM). Može se reći, da mehaničari mogu bez nje ali da VIM ne može bez mehanike. Ali kako god ta spoznaja izgledala bjelodana, ipak valja priznati da informacije s kojima se koristi i koje VIM može pružiti u ocjeni sigurnosti mehaničkih sustava zaslužuju mjesto u inženjerskim primjenama koje su nose sa slučajnim pojavama. Postupci FORM I SORM koji su do sada razvijeni u okviru VIM-a pružaju prihvatljivo točna rješenja za pojedinačne i složene načine djelovanja mehaničkih sustava. Rezultati se po potrebi provjeravaju postupcima MCS. Međutim u pogledu potrebnih inžejerskih podataka postoje nedoumice. Pribavljanje statističkih podataka je vremenski dugotrajan i skup postupak zbog kojega je njihova pribavljivost jako otežana. Čini se da je nedostatak pouzdanih podataka jedan od glavnih razloga zašto VIM nema značajniju primjenu u inženjerskim djelatnostima. Osobito je teško doći podataka o međuzavisnostima slučajnih pojava. Razvoj područja ovisit će o interesu inženjerske zajednice i o spremnosti za prikupljanje podataka.

Literatura:

[1] Pavlić, I., Statistička teorija i primjena, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[2] Barlow, R. B., Proschan, F., Mathematical Theory of Reliability, Wiley, NY, 1965.

[3] Kapur, K.C., L.R. Lamberson, Reliability in Engineering Design, Wiley, New York, 1977.

[4] Rao, S. S., Reliability Based Design, McGraw-Hill, NY, 1992.

[5] Gnedenko, B., Ushakov, I., Probabilistic Reliability Engineering, Ed, Falk, J,, Wiley, NY, 1995.

[6] Madsen, H. O., Krenk, S., Lind, N. C., Methods of Structural Safety, Prentice-Hall, New Jersey, 1986.

[7] Ditlevsen, O., Madsen, H. O., Structural Reliability methods, Wiley, NY, 1996.

[8] Melhers, R.E. Structural reliability analysis and prediction, Wiley, 2002.

[9] Hammersley, J.M., Handscomb, D.C., Monte Carlo Methods, Methuen and Co., London, 1964.

[10] Žiha, K., Event Oriented System Analysis, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 13., No. 3., April (2000), p.p. 261-275.

[11] Žiha, K., Redundancy and Robustness of Systems of Events, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 15., (2000), p.p. 347-357.

[12] ABS, DNV, LLOYD'S REGISTER. Common Structural Rules for Double Hull Oil Tankers, 2006.

[13] IACS Recommendation No.34. Standard Wave Data. Rev.1, 2000.

[14] Guedes Soares, C. Combination of Primary Load Effects in Ship Structures, Probabilistic Engineering Mechanics 1992;7:103-111.

[15] Parunov J, Senjanović I, Guedes Soares C, Hull-girder Reliability of New Generation Oil Tankers, Mar Struct 2007; 20, No.1-2, 49-70.

[16] Parunov J, Senjanović I. Incorporating Model Uncertainty in Ship Reliability Analysis. Trans SNAME 2003;111:377-408.