



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# HERMITEOVA INTERPOLACIJA RADIJALNIM BAZNIM FUNKCIJAMA U METODI KONTROLNIH VOLUMENA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor:

Doc. dr.sc. Željko Tuković

Dubravko Matijašević

ZAGREB, 2011.

## Podaci za bibliografsku karticu

*UDK:* 532.5:519.6

*Ključne riječi:* Metoda kontrolnih volumena, metoda visokog reda točnosti, proizvoljna poliedarska mreža, generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama, skalarna radijalna reproducirajuća jezgra, konvekcijsko-difuzijska jednadžba, nestlačivo strujanje, projektivna metoda.

*Znanstveno područje:* tehničke znanosti

*Znanstveno polje:* zrakoplovstvo, raketna i svemirska tehnika

*Institucija u kojoj je rad izrađen:* Fakultet strojarstva i brodogradnje

*Mentor:* dr.sc. Željko Tuković, doc.

*Broj stranica:* 177

*Broj slika:* 80

*Broj tablica:* 3

*Broj korištenih bibliografskih jedinica:* 198

*Datum obrane:* 27. rujna 2011.

*Povjerenstvo:* Prof. dr.sc. Zdravko Terze,  
Doc. dr.sc. Željko Tuković,  
Prof. dr.sc. Zdravko Virag,  
Prof. dr.sc. Josip Tambača,  
Prof. dr.sc. Hrvoje Jasak

*Institucija u kojoj je rad pohranjen:* Fakultet strojarstva i brodogradnje,  
Sveučilište u Zagrebu

*Zahvala: Prvo se želim zahvaliti prof. dr.sc Zdravku Terzeu, kao glavnom istraživaču na projektu u okviru kojeg sam izradio ovaj rad, i na podršci u ključnim trenucima, Zatim se posebno želim zahvaliti doc. dr.sc. Željku Tukoviću, mom mentoru pri izradi ovog rada, s kojim sam vodio brojne korisne diskusije tijekom njegove izrade. Nadalje bih se želio zahvaliti prof. dr.sc. Hrvoju Jasaku, koji je svojim prijedlozima doprinijeo da tema dobije svoj konačan oblik. Također se želim zahvaliti prof. dr.sc. Josipu Tambači, koji mi je pomogao da usvojim potrebne matematičke koncepte. Na kraju se želim zahvaliti mag.math. Tomislavu Pažuru na sugestijama vezanim na matematičke formulacije korištene u tekstu, i svim ostalima koji su na bilo koji način doprinijeli tijekom izrade rada.*

# Predgovor

Vrlo je popularna upotreba metode kontrolnih volumena za rješavanje problema koji se susreću u inženjerskoj praksi, pogotovo kada se računa strujanje fluida. Dva su glavna razloga njene popularnosti. Prvo, metoda ima jasnu fizikalnu interpretaciju, i drugo, moguće ju je koristiti na nestrukturiranim mrežama sastavljenima od proizvoljnih poliedarskih kontrolnih volumena. Takve proizvoljne mreže u velikoj mjeri olakšavaju prostornu diskretizaciju složenih domena, koje su vrlo česte u inženjerskoj praksi, i omogućuju upotrebu bilo kojega generatora mreže.

U prethodnih nekoliko godina ubrzan je razvoj metoda kontrolnih volumena visokog reda točnosti od kojih se očekuje da će, kao računalno jeftinija alternativa koja daje vrlo točna rješenja već na grubim mrežama, uskoro u praksi početi zamjenjivati osnovnu metodu kontrolnih volumena, koja je drugog reda točnosti.

Uobičajeni problem metoda visokog reda točnosti je taj što interpolacija njima postavlja određene pretpostavke na tip mreže, što onda te metode ograničava samo na proračune strujanja u jednostavnijim domenama. Nadalje, problem je što određeni tipovi rubnih uvjeta ruše red točnosti metode kontrolnih volumena, obzirom da je često potrebno koristiti jednostranu interpolaciju nižeg reda točnosti od interpolacije u ostatku domene. Poželjno je dakle da takve metode ne ruše red točnosti uz rub, gdje je obično i potrebna najveća točnost proračuna.

Razvoj metoda visokog reda točnost na proizvoljnim mrežama omogućilo bi njihovu puno širu primjenu u problemima kakvi se sreću u inženjerskoj praksi.

# Sadržaj

Predgovor	iv
Sadržaj	v
Sažetak	ix
Summary	x
Popis oznaka	xi
Popis slika	xvii
Popis tablica	xxi
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja . . . . .	2
1.2. Klasična i slaba rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi . . . . .	3
1.3. Motivacija . . . . .	5
1.4. Hipoteza . . . . .	5
1.5. Organizacija rada . . . . .	6
<b>2. Matematički model strujanja fluida</b>	<b>9</b>
2.1. Jednačbe mehanike kontinuuma za kontrolni volumen . . . . .	10
2.2. Izotermno strujanje nestlačivog newtonovskog fluida . . . . .	11
<b>3. Interpolacija radijalnim baznim funkcijama</b>	<b>13</b>
3.1. Uvod . . . . .	16

---

3.2.	Interpolacija radijalnim baznim funkcijama . . . . .	17
3.2.1.	Interpolacijski problem . . . . .	18
3.2.2.	Rješivost interpolacijskog problema . . . . .	19
3.2.3.	Optimalnost interpolacije radijalnim baznim funkcijama . . . . .	21
3.2.4.	Radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču . . . . .	22
3.2.5.	Greška interpolacije . . . . .	25
3.2.6.	Numerička stabilnost . . . . .	27
3.3.	Generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama . . . . .	29
3.4.	Hilbertovi prostori s reproducirajućom jezgrom . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Particija jedinice</b>	<b>37</b>
4.1.	Metoda particije jedinice . . . . .	38
4.2.	Funkcije u particiji jedinice . . . . .	41
<b>5.</b>	<b>Metoda kontrolnih volumena</b>	<b>45</b>
5.1.	Uvod . . . . .	45
5.2.	Osnovna metoda kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži	47
5.2.1.	Definicija poliedarske mreže . . . . .	47
5.2.2.	Diskretizacija prostornih integrala . . . . .	50
5.2.3.	Vremenska diskretizacija . . . . .	53
5.2.4.	Primjena rubnih uvjeta . . . . .	54
5.2.5.	Sustav linearnih algebarskih jednadžbi . . . . .	55
5.2.6.	Diskretizacija Navier-Stokesovih jednadžbi . . . . .	58
5.2.7.	Jednadžba za tlak . . . . .	60
5.2.8.	Povezivanje brzine i tlaka . . . . .	63
5.2.9.	Rekonstrukcija iz vrijednosti funkcije . . . . .	66
5.3.	Metoda kontrolnih volumena visokog reda točnosti na proizvoljnoj poli- edarskoj mreži . . . . .	68
5.3.1.	Uvod . . . . .	68
5.3.2.	Kompozitne poliedarske ćelije . . . . .	71
5.3.3.	Rekonstrukcija iz prosjeka u ćelijama . . . . .	73
5.3.4.	Povezivanje brzine i tlaka . . . . .	74
5.3.5.	Konvektivni i difuzni protoci . . . . .	75
5.3.6.	Postupak rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi . . . . .	76

<b>6. Numerički primjeri</b>	<b>79</b>
6.1. Interpolacija . . . . .	79
6.1.1. Interpolacija bez particije jedinice . . . . .	82
6.1.2. Interpolacija u particiji jedinice . . . . .	90
6.2. Difuzija metodom kontrolnih volumena . . . . .	93
6.2.1. Metoda kontrolnih volumena bez particije jedinice . . . . .	93
6.2.2. Metoda kontrolnih volumena s particijom jedinice . . . . .	101
6.3. Konvekcija-difuzija . . . . .	107
6.4. Konvekcija . . . . .	110
6.5. Strujanje u šupljini . . . . .	113
<b>7. Zaključak</b>	<b>119</b>
7.1. Zaključak doktorskoga rada . . . . .	119
7.2. Sažeti prikaz znanstvenog doprinosa rada . . . . .	120
7.3. Prijedlog smjerova daljnjih istraživanja . . . . .	121
<b>A. O povezivanju brzine i tlaka pri modeliranju nestlačivog toka metodom kontrolnih volumena</b>	<b>123</b>
A.1. Uvod . . . . .	123
A.2. Tipovi mreža u metodi kontrolnih volumena . . . . .	125
A.2.1. Međusobni položaj proračunskih čvorova u mreži . . . . .	126
A.3. Metode za povezivanje brzine i tlaka . . . . .	128
A.3.1. Penalty formulacije . . . . .	128
A.3.2. Formulacija umjetne stlačivosti . . . . .	129
A.3.3. Faktorizacija operatora i "fractional step" metode . . . . .	130
A.3.4. Poissonova jednačba za tlak . . . . .	131
A.4. Projektivne metode . . . . .	132
A.4.1. SIMPLE klasa metoda . . . . .	140
A.4.2. Povezivanje brzine i tlaka u metodi kontrolnih volumena sa primitivnim varijablama na mrežama centriranim u ćelijama . . . . .	143
A.4.3. Nova metoda . . . . .	143
<b>B. Povezivanje brzine i tlaka u metodi konačnih elemenata</b>	<b>145</b>
B.1. Mješoviti konačni elementi . . . . .	145
B.2. Stabilizirani konačni elementi . . . . .	148

<b>C. Numerička integracija</b>	<b>151</b>
C.1. Kvadraturene formule na trokutima . . . . .	151
<b>D. Osnovni koncepti normiranih prostora</b>	<b>153</b>
D.1. Fourierovi redovi . . . . .	153
D.2. Hilbertovi prostori . . . . .	154
D.3. Prostori Soboljeva . . . . .	158
<b>Literatura</b>	<b>160</b>
<b>Životopis</b>	<b>179</b>
<b>Biography</b>	<b>180</b>



# Sažetak

Primjena metode kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži poželjna je kod rješavanja inženjerskih problema zbog svoje konzervativnosti i upotrebljivosti kod vrlo složenih geometrija. S druge strane, nedostatak korištenja poliedarske mreže očituje se u ograničenom broju upotrebljivih shema interpolacije i aproksimacije gradijenta, koje su potrebne za računanje konvekcijskog i difuzijskog toka. Taj je problem posebno naglašen kada se radi o metodama visokog reda točnosti. Općenito, razvoj metode kontrolnih volumena visokog reda točnosti za proračune nestlačivih viskoznih tokova zaostaje za razvojem metoda za stlačive neviskozne tokove. Hermiteova interpolacija radijalnim baznim funkcijama primjerena je u metodi kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži, jer ne nameće topologiju točaka u kojima se zadaju interpolacijski uvjeti. Nadalje, generalizacija Hermiteove interpolacije omogućuje računanje interpolanta, kako u slučajevima s Neumannovim rubnim uvjetom, tako i iz prosjeka u ćelijama u formulaciji visokog reda točnosti. U ovom se radu generalizirana interpolacija koristi za rekonstrukciju u konvektivnom i difuzivnom članu. U fokusu su metode za eliptične i degenerirane eliptične-parabolične probleme, jer se metoda koristi za računanje nestlačivog viskoznog toka. Nadalje, istražuje se particija jedinice koja je primjerena promatranoj klasi problema, a koja je efikasnija od particija jedinice WENO tipa čije korištenje tipično prilikom proračuna hiperboličkih tokova u kojima se pretpostavlja da će se diskontinuiteti pojavljivati u domeni kao dio rješenja.

Ovaj je rad doprinos razvoju metode kontrolnih volumena visokog reda točnosti za računanje nestlačivih viskoznih tokova fluida na proizvoljnim poliedarskim mrežama.

**Ključne riječi:** Metoda kontrolnih volumena, metoda visokog reda točnosti, proizvoljna poliedarska mreža, generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama, skalarna radijalna reproducirajuća jezgra, konvekcijsko-difuzijska jednadžba, nestlačivo strujanje, projektivna metoda.

# Summary

Polyhedral finite volume method is attractive when dealing with engineering problems, due to its conservativeness and ability to describe complex geometries. On the other hand, disadvantage of the polyhedral mesh description is in a rather limited set of schemes for interpolation and gradient approximation, which are required for convection and diffusion flux calculation. That issue is even more emphasised in high order accurate methods. Generally, development of high order finite volume methods for incompressible viscous flow seems to be lagging behind development of methods for compressible inviscid flow. Hermitian radial basis function interpolation can be used in the finite volume method on arbitrary polyhedral mesh description, since it is scattered data interpolation method. Also, with generalised Hermitian radial basis function interpolation one is able to obtain interpolation with Neumann boundary points as subset of data centres, and cell averages in high order methods. In this work, generalised radial basis function interpolation is used for reconstruction of convection and diffusion fluxes. A focus is on elliptical and degenerate elliptic-parabolic problems since method is intended for incompressible viscous flow calculation. This motivates use of more efficient partition of unity method for such problems than WENO-type partition of unity, typically used in hyperbolic flow calculations where discontinuities naturally occur as part of the solution.

This work is a contribution to the effort in development of high order accurate polyhedral finite volume method for incompressible viscous flow calculations.

**Keywords:** Finite volume method, high-order method, arbitrary polyhedral mesh, generalised radial basis function interpolation, scalar radial reproducing kernel, convection-diffusion equation, incompressible flow, projection method.

# Popis oznaka

$\mathbf{A}$	Interpolacijska matrica, vidi jednadžbu (3.4) . . . . .	19
$\mathfrak{A}(\Omega_P)(\cdot)$	Operator osrednjavanja po ćeliji $\Omega_P$ , vidi jednadžbu (5.1) . . . . .	45
$\mathbf{A}_{\partial_n \partial_n}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara usmjerenim derivacijama funkcionala usmjerenih derivacija, vidi jednadžbu (5.40) . . . . .	66
$\mathbf{A}_{e \partial_n}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara funkcionalima usmjerenih derivacija, vidi jednadžbu (5.40) . . . . .	66
$\mathbf{A}_{ee}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara funkcionalima evaluacija u točkama, vidi jednadžbu (5.40) . . . . .	66
$\mathbf{A}_{f \partial_n}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara integralima funkcionala usmjerenih derivacija, vidi jednadžbu (5.48) . . . . .	73
$\mathbf{A}_{fe}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara integralima funkcionala evaluacija u točkama, vidi jednadžbu (5.48) . . . . .	73
$\mathbf{A}_{ff}$	Dio interpolacijske matrice koji odgovara integralima funkcionala integracija u ćelijama, vidi jednadžbu (5.48) . . . . .	73
$a_{i,j}^{\partial_n \partial_n}$	Element matrice $\mathbf{A}_{\partial_n \partial_n}$ , vidi jednadžbu (5.42) . . . . .	67
$a_{i,j}^{e \partial_n}$	Element matrice $\mathbf{A}_{e \partial_n}$ , vidi jednadžbu (5.42) . . . . .	67
$a_{i,j}^{ee}$	Element matrice $\mathbf{A}_{ee}$ , vidi jednadžbu (5.42) . . . . .	67
$a_{i,j}^{f \partial_n}$	Element matrice $\mathbf{A}_{f \partial_n}$ , vidi jednadžbu (5.49) . . . . .	73
$a_{i,j}^{fe}$	Element matrice $\mathbf{A}_{fe}$ , vidi jednadžbu (5.49) . . . . .	73
$a_{i,j}^{ff}$	Element matrice $\mathbf{A}_{ff}$ , vidi jednadžbu (5.49) . . . . .	73
$a_P$	Dijagonalni koeficijent za ćeliju, vidi jednadžbu (5.21) . . . . .	57
$a_S$	Koeficijent koji odgovara susjednoj ćeliji, vidi jednadžbu (5.21) . . . . .	57

$\mathbf{a}(S_f)(\cdot)$	Operator osrednjavanja po stranici $S_f$ , vidi jednadžbu (5.2) . . . . .	46
$\mathbf{a}_u$	Dijagonala operatora $\mathbf{N}$ , vidi jednadžbu (A.19) . . . . .	141
$\mathbf{c}$	Vektor koeficijenata dobivenih iz interpolacijskih uvijeta, vidi jednadžbu (3.5)	20
$c_j$	Koeficijenti dobiveni iz interpolacijskih uvijeta, vidi jednadžbu (3.3) . . . . .	18
$D$	Operator divergencije koji djeluje na diskretan sustav, vidi jednadžbu (A.3)	124
$d$	Dimenzija euklidskog prostora . . . . .	17
$\mathbf{d}_f$	Vektor od težišta ćelije $\mathbf{x}_P$ do težišta ćelije $\mathbf{x}_N$ , koje dijele stranicu $S_f$ , vidi jednadžbu (5.13) . . . . .	51
$e$	Totalna specifična energija, [J/kg], vidi jednadžbu (2.7) . . . . .	11
$\mathbf{e}_i$	Jedinični vektor u smjeru "i" . . . . .	154
$\mathbf{f}$	Vektor volumnih izvora količine gibanja $g$ , vidi jednadžbu (A.3) . . . . .	124
$f$	Indeks stranice $S_f$ , vidi jednadžbu (5.7) . . . . .	48
$\mathbf{G}$	Operator gradijenta koji djeluje na diskretan sustav, vidi jednadžbu (A.3) .	124
$\mathbf{g}$	Specifična masena sila, [m/s <sup>2</sup> ], vidi jednadžbu (2.6) . . . . .	10
$G_\phi$	Ograničenje svojstvenih vrijednosti interpolacijske matrice $\mathbf{A}$ , odozdo . . . . .	28
$H^m$	Prostor Soboljeva definiran pomoću $L^2$ , vidi jednadžbu (D.7) . . . . .	158
$H^w$	Prirodan Hilbertov prostor Wendlandovih funkcija . . . . .	35
$h_{Y,\Omega}$	Udaljenost popunjavanja interpolacijskih centara, vidi jednadžbu (3.9) . . . . .	25
$\mathbf{I}$	Jedinični tenzor . . . . .	11
$K$	Najveći broj nosača koji se preklapaju u bilo kojoj točki domene . . . . .	39
$L^p$	Banachov prostor u općem slučaju, vidi jednadžbu (D.4) . . . . .	155
$L^2$	Kanonski Hilbertov prostor, vidi jednadžbu (D.5) . . . . .	156
$L_\rho$	Diskretni Laplaceov operator za nehomogeni tok, vidi jednadžbu (A.12) . .	135
$M$	Broj nosača u particiji jedinice . . . . .	38
$m$	Red uvjetne pozitivne definitnosti radijalne bazne funkcije . . . . .	19
$\mathbf{N}$	Linearizirani operator konvekcije diskretnog sustava, vidi jednadžbu (A.15)	140
$\mathbf{n}$	Vanjska jedinična normala na stranicu kontrolnog volumena . . . . .	10
$N$	Broj interpolacijskih centara . . . . .	27
$\mathcal{N}$	Nelinearni operator konvekcije-difuzije, vidi jednadžbu (A.3) . . . . .	124
$N_D$	Broj interpolacijskih centara sa Dirichletovim rubnim uvijetom . . . . .	66
$N_N$	Broj interpolacijskih centara sa Neumannovim rubnim uvijetom . . . . .	66
$\mathcal{O}(\star)$	Red veličine $\star$ , vidi jednadžbu (5.4) . . . . .	47

$\mathcal{P}$	Solenoidni projektor, vidi jednadžbu (A.5) . . . . .	133
$\mathbf{p}$	Vektor diskretnih vrijednosti tlaka $p$ , vidi jednadžbu (A.3) . . . . .	124
$p$	Tlak, [N/m <sup>2</sup> ], vidi jednadžbu (2.9) . . . . .	11
$P$	Indeks poliedarske ćelije u mreži $\mathcal{P}_\Omega$ . . . . .	48
$\mathcal{P}_\Omega$	Poliedarska mreža u domeni $\Omega$ . . . . .	48
$\mathbf{P}$	Matrica polinomnog dijela interpolacije, vidi jednadžbu (3.6) . . . . .	21
$\mathbf{p}'$	Korekcija polja diskretnog tlaka, vidi jednadžbu (A.17) . . . . .	140
$\mathcal{P}_\sigma$	Solenoidni projektor za tok nehomogene gustoće, vidi jednadžbu (A.8) . . . . .	134
$\tilde{\mathcal{P}}$	Približni solenoidni projektor, vidi jednadžbu (A.10) . . . . .	135
$\tilde{\mathcal{P}}_\sigma$	Približni solenoidni projektor za tok nehomogene gustoće, vidi jednadžbu (A.12)	135
$\mathbf{p}^*$	Vektor diskretnih vrijednosti tlaka $p^*$ kojima se ne postiže solenoidnost, vidi jednadžbu (A.15) . . . . .	140
$\mathcal{Q}$	Komplementaran projektor solenoidnom projektoru $\mathcal{P}$ . . . . .	133
$\dot{\mathcal{Q}}$	Volumni protok kroz stranicu ćelije, vidi jednadžbu (5.25) . . . . .	59
$\mathbf{q}_\psi$	Površinska gustoća protoka svojstva $\psi$ . . . . .	10
$\mathcal{Q}_\sigma$	Komplementaran projektor solenoidnom projektoru za tok nehomogene gustoće $\mathcal{P}_\sigma$ , vidi jednadžbu (A.9) . . . . .	134
$\tilde{\mathcal{Q}}_\sigma$	Komplementaran projektor približnom solenoidnom projektoru za tok nehomogene gustoće $\tilde{\mathcal{P}}_\sigma$ , vidi jednadžbu (A.13) . . . . .	136
$q_Y$	Udaljenost razdvajanja interpolacijskih centara, vidi jednadžbu (3.9) . . . . .	25
$r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	euklidska udaljenost točaka $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ . . . . .	17
$\hat{r}_j(\mathbf{x})$	Funkcija udaljenosti na nosaču $\Omega_j$ , vidi jednadžbu (4.3) . . . . .	41
$s$	Specifična entropija, [J/(kg K)], vidi jednadžbu (2.8) . . . . .	11
$s(\mathbf{x})$	Interpolant radijalnim baznim funkcijama, vidi jednadžbu (3.3) . . . . .	18
$\mathfrak{S}_P$	Skup unutrašnjih stranica poliedarske ćelije $\Omega_P$ . . . . .	48
$\mathfrak{S}_P$	Skup indeksa unutrašnjih stranica poliedarske ćelije $\Omega_P$ . . . . .	48
$\bar{\mathfrak{S}}_P$	Skup svih stranica poliedarske ćelije $\Omega_P$ . . . . .	48
$\bar{\mathfrak{S}}_P$	Skup indeksa svih stranica poliedarske ćelije $\Omega_P$ . . . . .	48
$s(\mathbf{x})$	Generalizirani interpolant, vidi jednadžbu (3.11) . . . . .	29
$s_{\psi c}$	Volumna gustoća izvora veličine $\psi$ , vidi jednadžbu (5.10) . . . . .	51
$s_{\psi p}$	Koeficijent proporcionalnosti gustoće izvora sa $\psi$ , vidi jednadžbu (5.10) . . . . .	51

$s_\psi$	Volumna gustoća izvora svojstva $\psi$ . . . . .	10
$T$	Apsolutna temperatura, [K], vidi jednadžbu (2.8) . . . . .	11
$t$	vrijeme, [s] . . . . .	10
$\mathbf{t}^0$	”Najmanja” točka ruba hiperkvadratičnog nosača, vidi jednadžbu (4.3) . . . . .	41
$\mathbf{t}^1$	”Najveća” točka ruba hiperkvadratičnog nosača, vidi jednadžbu (4.3) . . . . .	41
$\Delta t$	Vremenski korak, vidi jednadžbu (5.5) . . . . .	47
$t^n$	Vremenski trenutak u kojem se implicitno rješavaju diskretizirane jednadžbe, vidi jednadžbu (5.17) . . . . .	53
$(\cdot)^{n-1}$	Vrijednost iz prethodne iteracije implicitnog rješavača, vidi jednadžbu (5.18) . . . . .	53
$t^o$	Prethodni vremenski trenutak, vidi jednadžbu (5.17) . . . . .	53
$t^{oo}$	Preprethodni vremenski trenutak, vidi jednadžbu (5.17) . . . . .	53
$\mathcal{T}_{\mathcal{P}_\Omega}$	Dualna mreža simpleksa poliedarskoj mreži u domeni $\Omega$ . . . . .	48
$\mathbf{u}$	Vektor diskretnih vrijednosti brzine $\mathbf{v}$ , vidi jednadžbu (A.3) . . . . .	124
$\hat{\mathbf{u}}^*$	Vektor diskretnih brzina dobivenih bez utjecaja gradijenta tlaka, koje onda ne zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta, vidi jednadžbu (A.20) . . . . .	141
$\mathbf{u}'$	Vektor korekcija diskretnih brzina do solenoidnosti, vidi jednadžbu (A.16) . . . . .	140
$\mathbf{V}$	Solenoidna projekcija od $\mathbf{V}^*$ . . . . .	133
$\mathbf{v}$	Brzina gibanja kontinuuma, [m/s] . . . . .	10
$v$	Glatka funkcija koju se interpolira, vidi jednadžbu (3.2) . . . . .	18
$V_j$	Interpolacijski prostor nosača $\Omega_j$ , vidi jednadžbu (4.2) . . . . .	38
$\tilde{\mathbf{V}}$	Brzina, ili njena lokalna derivacija, koja je približno solenoidna, vidi jednadžbu (A.10) . . . . .	135
$\mathbf{V}^*$	Nesolenoidna brzina, ili njena lokalna derivacija. . . . .	133
$\mathbf{v}^*$	Brzina koja ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta, vidi jednadžbu (A.4) . . . . .	132
$W_j$	Težinska funkcija iz particije jedinice . . . . .	38
$w_j$	Normirana težinska funkcija iz particije jedinice, vidi jednadžbu (4.1) . . . . .	38
$\mathbf{x}_c$	Vektor težišta ćelije ili stranice, vidi jednadžbu (5.4) . . . . .	47
$\mathbf{x}_f$	Težište stranice $S_f$ , vidi jednadžbu (5.7) . . . . .	48
$\mathbf{x}_P$	Težište ćelije $\Omega_P$ , vidi jednadžbu (5.6) . . . . .	48
$Y$	Skup interpolacijskih centara . . . . .	16
$Y_0$	Interpolacijski centri u kojima djeluje $\lambda_{id}$ . . . . .	66
$Y_1$	Interpolacijski centri iz Neumannovog dijela ruba . . . . .	66

$\mathbf{y}_j$	Interpolacijski centar . . . . .	16
$Y_j$	Interpolacijski centri u nosaču $\Omega_j$ . . . . .	38
$\alpha$	Koeficijent implicitne podrelaksacije, vidi jednadžbu (5.22) . . . . .	57
$\alpha_p$	Koeficijent podrelaksacije za jednadžbu tlaka, vidi jednadžbu (5.36) . . . . .	65
$\delta_{Y,\Omega}$	Mjera neuniformnosti interpolacijskih centara, vidi jednadžbu (3.10) . . . . .	26
$\Gamma_0$	Rub sa Dirichletovim rubnim uvijetom . . . . .	66
$\Gamma_1$	Rub sa Neumannovim rubnim uvijetom . . . . .	66
$\kappa$	Uvjetovanost interpolacijske matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	27
$\Lambda$	Skup linearno nezavisnih funkcionala u generaliziranoj interpolaciji . . . . .	29
$\lambda_j$	Funktional u generaliziranoj interpolaciji . . . . .	29
$\lambda_{max}$	Najveća svojstvena vrijednost interpolacijske matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	27
$\lambda_{min}$	Najmanja svojstvena vrijednost interpolacijske matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	27
$\lambda_{id}$	Funktional evaluacije u točki, vidi jednadžbu (5.37) . . . . .	66
$\lambda_{\partial n}$	Funktional derivacije u smjeru $\mathbf{n}$ , vidi jednadžbu (5.37) . . . . .	66
$\mu$	Dinamička viskoznost fluida, [N s/m <sup>2</sup> ], vidi jednadžbu (2.9) . . . . .	11
$\mu_\psi$	Koeficijent difuzije za veličinu $\psi$ , vidi jednadžbu (2.3) . . . . .	10
$\nu$	Kinematička viskoznost fluida, [m <sup>2</sup> /s], vidi jednadžbu (2.11) . . . . .	11
$\Omega$	Proračunska domena . . . . .	48
$\Omega_j$	Nosač funkcije $w_j$ . . . . .	38
$\Omega_M$	Materijalni volumen . . . . .	10
$\partial\Omega_M$	Zatvoreni rub materijalnog volumena . . . . .	10
$\Omega_P$	Kontrolni volumen . . . . .	10
$\Omega_P$	Poliedarska ćelija . . . . .	48
$\partial\Omega_P$	Rub poliedarske ćelije . . . . .	48
$\partial\Omega_P$	Zatvoreni rub kontrolnog volumena . . . . .	10
$\{\Omega_j\}_{j=1}^M$	Pokrivač domene . . . . .	38
$\partial\Omega$	Rub proračunske domene . . . . .	48
$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Radijalna bazna funkcija, vidi jednadžbu (3.1) . . . . .	16
$\phi(r)$	Radijalna bazna funkcija . . . . .	16
$\phi_{d,k}$	Wendlandove funkcije u $d$ dimenzija glatkoće $C^{2k}$ , vidi jednadžbu (3.8) . . . . .	22
$\varphi$	Mjera tlaka kojom se korigira brzina do soleniodnosti, vidi jednadžbu (A.4) . . . . .	132
$\Pi_m(\mathbb{R}^d)$	Prostor realnih polinoma u $d$ varijabli stupnja $m - 1$ , vidi jednadžbu (3.3) . . . . .	18

$\varpi(\mathbf{x})$	Polinom uz radijalniu bazniu funkciju, vidi jednadžbu (3.3) . . . . .	18
$\psi$	Intenzivno fizikalno svojstvo . . . . .	10
$\Psi$	Površinska gustoća protoka veličine $\psi$ , vidi jednadžbu (5.2) . . . . .	46
$\psi_f$	Vrijednost zavisne varijable u težištu stranice $S_f$ , vidi jednadžbu (5.15) . . . . .	52
$\psi_N$	Vrijednost zavisne varijable u težištu ćelije "N", vidi jednadžbu (5.13) . . . . .	51
$\rho$	Gustoća fluida . . . . .	10
$\sigma$	Kompaktnija oznaka za $1/\rho$ , vidi jednadžbu (A.7) . . . . .	134
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenzor naprezanja, [N/m <sup>2</sup> ], vidi jednadžbu (2.6) . . . . .	10
$\Upsilon$	Funkcija iščezavanja . . . . .	41
$\Upsilon^0$	$C^0$ funkcija iščezavanja, vidi jednadžbu (4.4) . . . . .	41
$\Upsilon^1$	$C^1$ funkcija iščezavanja, vidi jednadžbu (4.4) . . . . .	41
$\Upsilon^2$	$C^2$ funkcija iščezavanja, vidi jednadžbu (4.4) . . . . .	41

**Kratice**

BDF	Backward Differencing Formula . . . . .	53
ENO	Essentially Non Oscillatory . . . . .	4
MKV	Metoda kontrolnih volumena . . . . .	1
RBFI	(engl. <i>Radijal Basis Function Interpolation</i> ) . . . . .	14
RBF	Radijalne bazne funkcije . . . . .	18
TPS	Thin Plate Spline . . . . .	14
TVD	Total Variation Diminishing . . . . .	4
WENO	Weighted Essentially Non Oscillatory . . . . .	4



# Popis slika

3.1	Wendlandove funkcije klase $C^2$ , $C^4$ i $C^6$ , za $d \leq 3$ . . . . .	23
3.2	Derivacija Wendlandovih $C^2$ , $C^4$ i $C^6$ funkcija za $d \leq 3$ . . . . .	23
3.3	Druga derivacija Wendlandovih $C^2$ , $C^4$ i $C^6$ funkcija za $d \leq 3$ . . . . .	24
3.4	Treća derivacija Wendlandovih $C^2$ , $C^4$ i $C^6$ funkcija za $d \leq 3$ . . . . .	24
3.5	Wendlandova $C^0$ funkcija, za $d \leq 3$ . . . . .	31
3.6	Distribucija $(D^y(\phi_{3,0} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumannovim rubnim uvjetom. . . . .	31
3.7	Wendlandova $C^2$ funkcija, za $d \leq 3$ . . . . .	32
3.8	Funkcija $(D^y(\phi_{3,1} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumannovim rubnim uvjetom. . . . .	32
3.9	Wendlandova $C^4$ funkcija, za $d \leq 3$ . . . . .	33
3.10	Funkcija $(D^y(\phi_{3,2} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumannovim rubnim uvjetom. . . . .	33
4.1	Funkcija udaljenosti $\hat{r}(\mathbf{x})$ . . . . .	42
4.2	Težinska funkcija $(\Upsilon^0 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$ . . . . .	42
4.3	Težinska funkcija $(\Upsilon^1 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$ . . . . .	43
4.4	Težinska funkcija $(\Upsilon^2 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$ . . . . .	43
5.1	Poliedarski kontrolni volumen. . . . .	49
5.2	Raščlanjivanje poligonalne stranice na simplekse [179]. . . . .	70
5.3	Raščlanjivanje poliedarskog kontrolnog volumena na simplekse [179]. . . . .	72

6.1	Skica cilindra sa prikazanim rubnim uvjetima. . . . .	80
6.2	Slika uz objašnjenje izgleda grafova . . . . .	82
6.3	Interpolacija $G^1K^1P^{-1}, s$ . . . . .	83
6.4	Interpolacija $G^1K^1P^{-1}, \nabla s$ . . . . .	83
6.5	Interpolacija $G^1K^1P^0, s$ . . . . .	84
6.6	Interpolacija $G^1K^1P^0, \nabla s$ . . . . .	84
6.7	Interpolacija $G^1K^1P^1, s$ . . . . .	85
6.8	Interpolacija $G^1K^1P^1, \nabla s$ . . . . .	85
6.9	Interpolacija $G^2K^2P^1, s$ . . . . .	86
6.10	Interpolacija $G^2K^2P^1, \nabla s$ . . . . .	86
6.11	Interpolacija $G^2K^2P^2, s$ . . . . .	87
6.12	Interpolacija $G^2K^2P^2, \nabla s$ . . . . .	87
6.13	Interpolacija $G^3K^3P^2, s$ . . . . .	88
6.14	Interpolacija $G^3K^3P^2, \nabla s$ . . . . .	88
6.15	Interpolacija $G^3K^3P^3, s$ . . . . .	89
6.16	Interpolacija $G^3K^3P^3, \nabla s$ . . . . .	89
6.17	Nosači particije jedinice. . . . .	90
6.18	Interpolacija u particiji jedinice, $G^1K^1P^1, \Upsilon \in C^0, s$ . . . . .	91
6.19	Interpolacija u particiji jedinice, $G^1K^1P^1, \Upsilon \in C^0, \nabla s$ . . . . .	91
6.20	Interpolacija u particiji jedinice, $G^2K^2P^2, \Upsilon \in C^2, s$ . . . . .	92
6.21	Interpolacija u particiji jedinice, $G^2K^2P^2, \Upsilon \in C^2, \nabla s$ . . . . .	92
6.22	MKV $G^1K^1P^{-1}, s$ . . . . .	94
6.23	MKV $G^1K^1P^{-1}, \nabla s$ . . . . .	94
6.24	MKV $G^1K^1P^0, s$ . . . . .	95
6.25	MKV $G^1K^1P^0, \nabla s$ . . . . .	95
6.26	MKV $G^1K^1P^1, s$ . . . . .	96
6.27	MKV $G^1K^1P^1, \nabla s$ . . . . .	96
6.28	MKV $G^2K^2P^1, s$ . . . . .	97
6.29	MKV $G^2K^2P^1, \nabla s$ . . . . .	97
6.30	MKV $G^2K^2P^2, s$ . . . . .	98
6.31	MKV $G^2K^2P^2, \nabla s$ . . . . .	98
6.32	MKV $G^3K^3P^2, s$ . . . . .	99
6.33	MKV $G^3K^3P^2, \nabla s$ . . . . .	99

6.34	MKV $G^3K^3P^3$ , $s$ . . . . .	100
6.35	MKV $G^3K^3P^3$ , $\nabla s$ . . . . .	100
6.36	MKV particijom jedinice, $G^1K^1P^1$ , $\Upsilon \in C^0$ , $s$ . . . . .	102
6.37	MKV particijom jedinice, $G^1K^1P^1$ , $\Upsilon \in C^0$ , $\nabla s$ . . . . .	102
6.38	MKV particijom jedinice, $G^2K^2P^2$ , $\Upsilon \in C^2$ , $s$ . . . . .	103
6.39	MKV particijom jedinice, $G^2K^2P^2$ , $\Upsilon \in C^2$ , $\nabla s$ . . . . .	103
6.40	MKV particijom jedinice, $G^2K^2P^2$ , usporedba $\Upsilon^0$ i $\Upsilon^2$ , $s$ . . . . .	104
6.41	MKV particijom jedinice, $G^2K^2P^2$ , usporedba $\Upsilon^0$ i $\Upsilon^2$ , $\nabla s$ . . . . .	104
6.42	Greška interpolanta $G^2K^2P^2$ u particiji jedinice $\Upsilon^0$ , $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 620 ćelija. $\ v - s\ _{L^2(\Omega)} = 0.000444345$ , $n = 24.9$ . . . . .	105
6.43	Greška gradijenta interpolanta $G^2K^2P^2$ u particiji jedinice $\Upsilon^0$ , $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 620 ćelija, u log mjerilu. $\ \nabla v - \nabla s\ _{L^2(\Omega)} = 0.00196839$ , $n = 24.9$ . . . . .	105
6.44	Greška interpolanta $G^2K^2P^2$ u particiji jedinice $\Upsilon^0$ , $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 9870 ćelija. $\ v - s\ _{L^2(\Omega)} = 7.12347e - 07$ , $n = 99.348$ . . . . .	106
6.45	Greška gradijenta interpolanta $G^2K^2P^2$ u particiji jedinice $\Upsilon^0$ , $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 9870 ćelija, u log mjerilu. $\ \nabla v - \nabla s\ _{L^2(\Omega)} = 5.01201e - 05$ , $n = 99.348$ . . . . .	106
6.46	Greška $G^3K^3P^3$ interpolacije na mreži od 328 ćelija . . . . .	108
6.47	Greška $G^3K^3P^3$ interpolacije na mreži od 1002 ćelije . . . . .	108
6.48	Greška $G^2K^2P^2$ interpolacije za problem konvekcije-difuzije . . . . .	109
6.49	Greška $G^3K^3P^3$ interpolacije za problem konvekcije-difuzije . . . . .	109
6.50	Kvadratna domena kod konvekcije "stepenastog" profila. . . . .	110
6.51	Konvekcija stepenastog profila, 10x10 kontrolnih volumena . . . . .	111
6.52	Konvekcija stepenastog profila, 20x20 kontrolnih volumena . . . . .	111
6.53	Pravokutna domena kod konvekcije $\sin^2$ profila. . . . .	112
6.54	Konvekcija $\sin^2$ profila, 9x18 kontrolnih volumena . . . . .	112
6.55	Konvekcija $\sin^2$ profila, 19x38 kontrolnih volumena . . . . .	113
6.56	Greška brzine pri strujanju u šupljini . . . . .	114
6.57	Greška iznosa brzine u ćelijama, $G^2v^{K^2P^2} p^{K^2P^2}$ na 44 ćelije, u logaritamskom mjerilu. . . . .	115

6.58	Greška $x$ komponente brzine u ćelijama, $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$ na 44 ćelije . . .	115
6.59	Greška iznosa brzine u ćelijama, $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$ na 148 ćelije, u logaritamskom mjerilu. . . . .	116
6.60	Greška $x$ komponente brzine u ćelijama, $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$ na 148 ćelije. . .	116
6.61	Greška iznosa brzine u ćelijama, $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$ na 572 ćelije, u logaritamskom mjerilu. . . . .	117
6.62	Greška $x$ komponente brzine u ćelijama, $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$ na 572 ćelije. . .	117
A.1	Glavni tipovi mreža. "A" mreža je centrirana u ćelijama za sve varijable odn., ima nepomaknuti, dok. "B" i "C" imaju pomaknuti raspored proračunskih čvorova. "B" je centrirana u vrhovima, a "C" je MAC konfiguracija. . . . .	127

# Popis tablica

3.1	Neke globalne radijalne bazne funkcije . . . . .	19
3.2	Wendlandove radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču . . . . .	25
3.3	Red konvergencije Wendlandovih radijalnih baznih funkcija u $d = 2$ . . . . .	27

# 1 Uvod

Metoda kontrolnih volumena (MKV) je danas najraširenija metoda za proračune strujanja. Njena glavna prednost je posljedica konzervativnog diskretiziranja zakona očuvanja fizikalnih veličina. Naime većina parcijalnih diferencijalnih jednadžbi su posljedica nekog zakona očuvanja (npr., očuvanje mase, količine gibanja, energije) a u MKV su te fizikalne veličine očuvane i na diskretnoj razini [138]. To je posebno važno kod računanja strujanja nestlačivog fluida. Konzervativnost MKV proizlazi iz načina integracije konvekcijskog i difuzijskog toka na površinama koje omeđuju kontrolne volumene. Teorem Gauss—Ostrogradskog omogućuje takvu formulaciju, a posljedica je da su fizikalni zakoni očuvanja koji se računaju zadovoljeni na svakom volumenu kao i na cijeloj domeni.

Postoji problem na konfiguracijama mreža u kojima su proračunske točke, u kojima se rješava diskretizirani matematički model, različite od točaka u kojima se integrira konvekcijski i difuzijski tok. Za strukturirane mreže postoje vrlo sofisticirane metode interpolacije funkcije i aproksimacije gradijenta, za difuzijski i konvekcijski transport, ali strukturirane su mreže primjenjive samo na relativno jednostavnim geometrijama. Nestrukturirane mreže omogućuju modeliranje strujanja u geometrijski složenim domenama, no značajno ograničavaju broj primjenjivih metoda interpolacije vrijednosti i gradijenta promatranih polja. Ideja upotrebe Hermiteove <sup>1</sup> interpolacije radijalnim baznim funkcijama sastoji se u korištenju interpolanta, ili njegovog gradijenta, koji se integrira pomoću teorema Gauss—Ostrogradskog prilikom računanja numeričkih flukseva kroz stranice kontrolnih volumena. S obzirom da su evaluacijske točke poznate a

---

<sup>1</sup> U ovom radu će se Hermiteovom interpolacijom nazivati ona interpolacija koja stvara simetričnu (hermitsku) interpolacijsku matricu.

priori, evaluacija se može implementirati vrlo djelotvorno.

Dakle, želi se naći interpolant koji bi zadovoljio rubne uvjete u točkama kojima je rub definiran, a da njegov integral metodom kontrolnih volumena zadovoljava diskretizirane transportne jednadžbe.

### 1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja

Diskretizacija metodom kontrolnih volumena danas je najzastupljenija metoda koja se koristi pri numeričkom modeliranju problem strujanja fluida [138, 62]. Najširu primjenu za nestlačivi tok ima metoda u kojoj je razmještaj proračunskih točaka, centriranih u ćelijama (engl. *cell-centered*), nepomaknut (engl. *collocated*), tj. gdje se iste točke koriste za računanje brzine i tlaka. Upravo će taj razmještaj biti razmatran u ovom radu. Točnost koju daje ta metoda ovisi o točnosti računanja konvekcijskog i difuzijskog toka na stranicama kontrolnih volumena.

Interpolacija radijalnim baznim funkcijama nije nova metoda. Već dugo postoje globalne radijalne bazne funkcije kao što su Hardyeva [84] 1971.g. i Duchonova [55] 1976.g. Prve radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču konstruirali su Wu 1995.g. [192] i Wendland 1995.g. [182]. U pogledu interpolacije postoje dva pristupa. Nesimetrični, u literaturi poznat i kao Kansina metoda [101], vrlo je popularan i češće je korišten od Hermiteovog, iako se zna da nesimetrična matrica interpolacije čak može biti singularna [90]. Moroney [127] je istraživao primjenu Hermiteove interpolacije Lagrangeovih podataka (samo vrijednost funkcije) radijalnim baznim funkcijama u metodi kontrolnih volumena na tetraedarskoj mreži. Našao je da takva formulacija podiže točnost metode kontrolnih volumena, iako nije kao interpolacijske uvjete koristio vrijednosti usmjerene derivacije u točkama na Neumannovom rubu. U dijelu ovog rada koristiti će se Hermiteova interpolacija Birkhoffovih podataka [191, 132, 93]. U njoj se i Neumannove točke stavljaju kao interpolacijski uvjeti, u prostornoj interpolaciji metode kontrolnih volumena. S obzirom da je koristio globalne radijalne bazne funkcije, Moroney je naišao i na probleme koje inherentno donosi sam odabir globalnih funkcija. Naime, takva je interpolacijska matrica puna, te sve lošije uvjetovana s povećanjem broja točaka, pa je zbog toga primjenjiva samo na relativno grube mreže. Za najfinije mreže potrebno je koristiti lokalne interpolacije u particiji jedinice, jer se takav pristup može implementirati vrlo efikasno [188].

Pri formulaciji metodom kontrolnih volumena visokog reda, potrebno je koristiti generaliziranu interpolaciju radijalnim baznim funkcijama. U njoj su podaci, iz kojih se radi rekonstrukcija, prosjeci u kontrolnim volumenima koji se računaju višim redom točnosti. Postoji nekoliko radova gdje se generalizirana interpolacija u particiji jedinice koristi za prostornu diskretizaciju u metodi kontrolnih volumena, no tada se metoda kontrolnih volumena redovno koristi za proračun stlačivog strujanja na mrežama centriranim u vrhovima [169, 95, 2, 3]. Generaliziranom interpolacijom moguće je formulirati metodu kontrolnih volumena proizvoljno visokog reda. U drugom dijelu ovog rada se razmatra metoda kontrolnih volumena visokog reda točnosti na proizvoljnoj poliedarskoj mreži centriranoj u ćelijama, koja također zadovoljava Neumannove i Dirichletove rubne uvijete. Također, metoda koja se razmatra je prirodna za nestlačive tokove fluida, jer traži rješenje u nešto manjem prostoru od onog koje dozvoljava slaba formulacija metode kontrolnih volumena. Ta slaba rješenja su nužna za probleme u kojima se diskontinuiteti prirodno pojavljuju kao dio rješenja.

## 1.2. Klasična i slaba rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Da bi se preciznije moglo opisati kakva se rješenja traže metodom opisanom u ovom radu, potrebno je spomenuti pojmove vezane uz tip rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

**Klasično rješenje** dobiva se iz polazne parcijalne diferencijalne jednadžbe i pripada klasi koja je potrebna (dovoljno glatka) da se formalno zadovolji polazna jednadžba.

Osnovna ideja koju podrazumijeva pojam **slabih rješenja** je da se rješenje diferencijalne jednadžbe traži u većem prostoru funkcija od onog u kojem bi se tražilo klasično rješenje. Kada se rješenje traži nekom integralnom formulacijom, prirodno se dolazi do slabih rješenja, gdje se nedostatak glatkoće pojavljuje u "malim" <sup>2</sup> podskupovima domene  $\Omega$ , ili pak taj nedostatak glatkoće može biti prisutan u većini domene [123]. U tim područjima rješenje nije dovoljno puta diferencijabilno da zadovolji diferencijalnu jednadžbu u klasičnom smislu.

Metodom kontrolnih volumena, obzirom da se temelji na integralnoj formulaciji, traže se slaba rješenja. Konkretno, rješenja dobivena metodom kontrolnih volumena

---

<sup>2</sup> Podskupovima mjere 0.



su u općem slučaju po dijelovima klasična rješenja s diskontinuitetima koji razdvajaju ta glatka rješenja u ćelijama [19]. Tako se za hiperboličke probleme rješenju dozvoljava da bude *distribucija*. No klasa takvih slabih rješenja je prevelika da se osigura njihova jedinstvenost. Zbog toga se u metodi kontrolnih volumena za hiperboličke probleme zadaje dodatni tzv. entropijski uvjet koji osigurava jedinstvenost rješenja. Kod hiperboličkih problema se u domeni prirodno pojavljuju diskontinuiteti.

U ovom radu se razmatra metoda kontrolnih volumena za eliptične i degenerirane eliptične-parabolične probleme <sup>3</sup>, koje stvara konvektivno-difuzijski operator, pa se ne polazi od pretpostavke da će se u domeni pojavljivati diskontinuiteti. Ta pretpostavka je to bolja, što je problem "više eliptičan" odn., što je konvekcija manja. Dakle, iako se istražuje metoda visokog reda, gdje se traže rješenje u terminima prosjeka u ćelijama, klasa funkcija kojima se rješenje opisuje je dovoljno glatka da rješenje bude klasično u cijeloj domeni, pri čemu funkcija zadovoljava rubne uvijete. Takav izbor stvara problem ako se diskontinuiteti pojave u domeni, zbog npr. diskontinuiteta u rubnim uvjetima ili polje koje se transportira ima diskontinuitete, pa tada glatki interpolant počne oscilirati u blizini diskontinuiteta. Ova pojava se naziva **Gibbsov fenomen**. Za rješavanje spomenutog problema potrebno je dozvoliti diskontinuirana rješenja na stranicama ćelija, barem oko onih ćelija u blizini uzroka Gibbsovih oscilacija, odnosno oko ćelija u kojima rješenje oscilira. Postavlja se pitanje kako identificirati oscilacije koje nisu dio rješenja, bez obzira da li se za stabilizaciju koriste konveksijske sheme "total variation diminishing" (TVD) tipa, ili "(weighted) essentially non oscillatory" ((W)ENO) tipa. Naime, TVD sheme identificiraju oscilacije na temelju mjere druge derivacije rješenja, te na taj način ne mogu razlikovati Gibbsove oscilacije od glatkih ekstrema koji su dio rješenja. Razlog tome je što se druge derivacije različite od nule mogu pojaviti kao dio rješenja konveksijsko-difuzijskog problema. Kada se radi o metodama drugog reda točnosti, za takav pristup i nema pravih alternativa, te je kao posljedica za TVD sheme karakteristično da zaglađuju rješenja i u blizini glatkih ekstrema. Kod metoda visokog reda, Gibbsov fenomen bi se moglo identificirati na višim derivacijama, te na taj način probati spriječiti narušavanje rješenja shemom konveksije.

---

<sup>3</sup> Termin degenerirani eliptični-parabolični problem koristi se za opis promatranog problema jer prijelaz u eliptičnu ili paraboličnu prirodu nije kontinuiran. Naime pri takvom prijelazu promjeni se tip jednadžbi, kao i rubni uvjeti, odnosno takvi prijelazi nazivaju se **singularne perturbacije**.

### 1.3. Motivacija

Trenutno se u svijetu aktivno razvijaju metode visokog reda točnosti (više od drugog) za proračun viskoznih tokova, jer postoje indikacije da su one jeftinija alternativa metodama drugog reda točnosti, za dozvoljenu grešku proračuna. Bassi i Rebay [21] su dobivali vrlo točna rješenja metodom konačnih elemenata visokog reda točnosti, prilikom računanja neviskoznog, i laminarnog viskoznog toka. Zingg i suradnici [196] su pokazali da je metoda visokog reda na strukturiranoj mreži doista efikasnija od metode drugog reda, za dobivanje rješenja s podjednakom greškom, stlačivog turbulentnog toka.

Razvoj metode kontrolnih volumena visokog reda točnosti, na nestrukturiranim mrežama, gotovo isključivo je usmjeren na konvektivne sheme. Neki od prvih radova u tom smjeru su oni od Bartha i Frederichsona [18, 17], u kojima je upotrebljavana kvadratna rekonstrukcija za Eulerove jednadžbe. Od tada je postignut napredak u ENO i WENO shemama visokog reda točnosti, npr. [58, 1, 135, 136, 70].

Razvoj metoda za viskozne tokove visokog reda točnosti išao je sporije. Tako nije neuobičajeno koristiti npr. shemu trećeg ili petog reda za konvekciju, dok se difuzija računa samo drugim redom točnosti [103]. Delanaye i suradnici [49, 71] su koristili kvadratnu rekonstrukciju za konvektivni, a linearnu za gradijent u viskoznom članu. Ollivier-Gooch i Van Altena [7, 8, 9] razvijaju metodu kontrolnih volumena na nestrukturiranoj mreži koja je, osim za rekonstrukciju konvekcije, visokog reda i za difuziju. U toj metodi se koristi metoda najmanjih kvadrata, pa je rekonstrukcija aproksimativna.

U ovom radu razmatra se metoda kontrolnih volumena na nestrukturiranoj mreži visokog reda točnosti, u kojoj se rekonstruiraju konvektivni i difuzni član interpolacijom, umjesto samo aproksimacijom koju dozvoljava metoda najmanjih kvadrata.

### 1.4. Hipoteza

Cilj istraživanja je provjera mogućnosti upotrebe Hermiteove interpolacije radijalnim baznim funkcijama, u diskretizaciji zakona očuvanja fizikalnih veličina metodom kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži s nepomaknutim rasporedom proračunskih točaka centriranih u kontrolnim volumenima.

Istraživanje je temeljeno na pretpostavci da se korištenjem Hermiteove interpolacije Birkhoffovih podataka radijalnim baznim funkcijama u metodi kontrolnih volumena, na

proizvoljnoj poliedarskoj mreži, može povećati točnost računanja difuzijskog i konvekcijskog transporta a time i točnost same metode.

U radu je nadalje pretpostavljeno da se, upotrebom generalizirane interpolacije radijalnim baznim funkcijama, može povećati red točnosti metode kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži upotrebom funkcionala za računanje prosjeka u ćelijama, gdje su ti funkcionali Gaussove integralne formule. Pri tome interpolant zadovoljava i diskretne Dirichletove te Neumannove rubne uvjete.

### 1.5. Organizacija rada

Ostatak ovog rada organiziran je na slijedeći način.

U drugom su poglavlju navedeni osnovni zakoni mehanike kontinuuma u integralnoj formi kakvi se koriste u metodi kontrolnih volumena, koji su nakon toga konkretizirani za nestlačivo strujanje izotermnog newtonovskog fluida.

U trećem poglavlju opisana je interpolacija radijalnim baznim funkcijama na način prikladan za njezino korištenje u metodi kontrolnih volumena, te su navedene teoretske osnove korištene u tom poglavlju, ili u narednim poglavljima. Opisana interpolacija radijalnim baznim funkcijama je dovoljna za formuliranje metode kontrolnih volumena drugog reda točnosti, u kojoj se interpoliraju i podatci iz Neumannovih rubnih uvjeta. Opisanom interpolacijom može se interpolirati funkcija i iz prosječnih vrijednosti u ćelijama, što je potrebno za formulaciju metode visokog reda točnosti.

U četvrtom poglavlju je opisana particija jedinice, kao metoda za omogućavanje upotrebe interpolacije radijalnim baznim funkcijama na fine mreže. Uvode se pojmovi *a priori* i *a posteriori* particija jedinice, za metode koje ne ovise, odnosno ovise o rješenju problema koji se rješava metodom kontrolnih volumena. Detaljnije je opisana *a priori* particija jedinice, koja se koristi u ovom radu.

U petom poglavlju je izložena metoda kontrolnih volumena u njenoj osnovnoj formulaciji, koja je drugog reda točnosti, kao i formulacija metode kontrolnih volumena visokog reda točnosti.

U šestom poglavlju je izložena metodologija primijenjena za numeričko modeliranje metodom kontrolnih volumena. Napravljeni su numerički eksperimenti da se potvrdi teoretski očekivani red točnosti metode. Isprobane su razne radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču, sa raznim polinomima, te različitim particijama jedinice. Također

su isprobane različite Gaussove integracijske formule da se utvrdi utjecaj pojedinih parametara na red točnosti metode.

U posljednjem poglavlju navedeni su glavni zaključci proizašli iz rada. Istaknut je originalni doprinos rada u području tehničkih znanosti, te su predložene smjernice daljnjeg istraživanja.

## **8** Poglavlje 1. Uvod

## 2 Matematički model strujanja fluida

U ovom radu se za opis strujanja fluida koristi matematički model kontinuuma, u kojem se diskretna priroda materije zamjeni neprekidnim modelom, što ima za posljedicu da se fizikalna svojstva mogu opisati neprekidnim funkcijama u prostoru i vremenu. Tada se strujanje fluida opisuje osnovnim zakonima očuvanja:

- zakonom očuvanja mase,
- zakonom količine gibanja,
- zakonom momenta količine gibanja,
- zakonom očuvanja energije,
- zakonom brzine produkcije entropije.

Kod strujanja nepolarnog fluida, zakon momenta količine gibanja svodi se na simetričnost tenzora naprezanja, pa ako se njegova simetričnost unaprijed pretpostavi, ovaj zakon više nije potrebno uključivati u skup ostalih zakona očuvanja. Entropija se ne pojavljuje u ostalim jednadžbama, te ju se može rješavati odvojeno od njih.

## 2.1. Jednadžbe mehanike kontinuuma za kontrolni volumen

Integralni zakoni očuvanja intenzivnog fizikalnog svojstva  $\psi$ , za materijalni volumen  $\Omega_M$  zatvoren površinom  $\partial\Omega_M$ , izražen je jednadžbom:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_M} \rho \psi \, dV = - \oint_{\partial\Omega_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\psi \, dS + \int_{\Omega_M} \rho s_\psi \, dV, \quad (2.1)$$

gdje je  $\rho$  gustoća fluida,  $\mathbf{n}$  jedinična vanjska normala na rub materijalnog volumena  $\partial\Omega_M$ ,  $\mathbf{q}_\psi$  površinska gustoća protoka svojstva, i  $s_\psi$  volumna gustoća izvora svojstva  $\psi$ .

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema na jednadžbu (2.1) dobiva se integralni zakon očuvanja fizikalnog svojstva  $\psi$ , za kontrolni volumen  $\Omega_P$  zatvoren površinom  $\partial\Omega_P$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \psi \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \psi \, dS = - \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\psi \, dS + \int_{\Omega_P} \rho s_\psi \, dV, \quad (2.2)$$

gdje je  $\mathbf{v}$  brzina gibanja kontinuuma. Površinska gustoća protoka  $\mathbf{q}_\psi$  fizikalnog svojstva  $\psi$  u transportnoj jednadžbi (2.2) obično predstavlja difuzijski tok, pa se može izraziti slijedećom jednadžbom:

$$\mathbf{q}_\psi = -\mu_\psi \nabla \psi, \quad (2.3)$$

gdje je  $\mu_\psi$  koeficijent difuzije za veličinu  $\psi$ . Uvrštavanjem jednadžbe (2.3) u (2.2) slijedi konačni oblik integralne transportne jednadžbe fizikalnog svojstva  $\psi$  za kontrolni volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \psi \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \psi \, dS = \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mu_\psi \nabla \psi \, dS + \int_{\Omega_P} \rho s_\psi \, dV. \quad (2.4)$$

Iz jednadžbe (2.4) slijede osnovni zakoni mehanike kontinuuma za kontrolni volumen:

- zakon očuvanja mase:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \, dS = 0, \quad (2.5)$$

- zakon očuvanja količine gibanja:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \mathbf{v} \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \, dS = \int_{\Omega_P} \rho \mathbf{g} \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dS, \quad (2.6)$$

gdje je  $\mathbf{g}$  najčešće gravitacijsko ubrzanje, a  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  simetričan tenzor naprezanja,

- zakon očuvanja energije:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho e \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} e \, dS = \\ \int_{\Omega_P} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dS - \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, dS + \int_{\Omega_P} \rho s_e \, dV, \end{aligned} \quad (2.7)$$

- zakon brzine produkcije entropije:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \mathfrak{s} \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \mathfrak{s} \, dS \geq \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \, dS + \int_{\Omega_P} \frac{\rho Q}{T} \, dV, \quad (2.8)$$

gdje je  $\mathfrak{s}$  specifična entropija, a  $T$  apsolutna temperatura.

## 2.2. Izotermno strujanje nestlačivog newtonovskog fluida

U ovom radu se razmatra izotermno strujanje nestlačivog newtonovskog fluida. Tenzor naprezanja nestlačivih newtonovskih fluida računa se iz generaliziranog Newtonovog zakona viskoznosti:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T], \quad (2.9)$$

gdje je  $p$  tlak,  $\mu$  dinamička viskoznost fluida, a  $\mathbf{I}$  jedinični tenzor. Za nestlačivo strujanje izotermnog fluida homogene gustoće  $\rho = \text{konst.}$ , zakoni očuvanja mase (2.5) i količine gibanja (2.6) čine zatvoren sustav jednadžbi. Dijeljenjem sa  $\rho$ , taj sustav jednadžbi postaje:

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \mathbf{v} \, dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \, dS = \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot (\nu \nabla \mathbf{v}) \, dS + \int_{\Omega_P} \mathbf{g} \, dV - \int_{\Omega_P} \frac{1}{\rho} \nabla p \, dV, \quad (2.11)$$

te se zajedno naziva Navier–Stokesovim jednadžbama. U jednadžbi (2.11),  $\nu$  je kinematička viskoznost fluida.

Navier–Stokesove jednadžbe su eliptičnog tipa u prostoru, pa se rubni uvjet polju brzine mora zadavati po svim rubovima. Jednadžba kontinuiteta je kinematički uvjet koji polje brzine mora zadovoljiti. Tlak se pojavljuje samo u jednadžbi količine gibanja, odnosno pojavljuje se njegov gradijent pa je polje tlaka u nestlačivom toku određeno do



## 12 Poglavlje 2. Matematički model strujanja fluida

na konstantu. Priroda Navier–Stokesovih jednažbi, kao i postupci povezivanja brzine i tlaka, detaljnije su opisani u poglavlju [A..](#)

# 3 Interpolacija radijalnim baznim funkcijama

U prethodnih nekoliko desetljeća su *radijalne bazne funkcije*, ili preciznije *uvjetno pozitivno definitne funkcije*, upotrebljavane s puno uspjeha u rekonstrukciji nepoznatih glatkih funkcija iz proizvoljnih centara. Taj uspjeh je uglavnom temeljen na sljedećim činjenicama.

- Radijalne bazne funkcije mogu se upotrijebiti u proizvoljno prostornih dimenzija.
- Ne nameću nikakvu strukturu na centre podataka, pa oni mogu biti proizvoljno raspoređeni.
- Omogućuju interpolante proizvoljne glatkoće.
- Interpolanti imaju jednostavnu strukturu, pa se lako računaju funkcionali pomoću njih.

No ta pozitivna svojstva nisu besplatna. Tako npr. gladak interpolant, dobiven pomoću glatke bazne funkcije, stvara loše uvjetovanu interpolacijsku matricu. Nadalje, obzirom da je većina baznih funkcija globalna, interpolacijska matrica je puna što, za veliki broj interpolacijskih centara, vodi na neprihvatljivu složenost u smislu računalnog vremena i potrebe za memorijom računala. Složenost rješavanja takvog "globalnoga" interpolacijskog problema zahtjeva  $\mathcal{O}(N^3)$  procesorskog vremena, i  $\mathcal{O}(N^2)$  memorije, gdje je  $N$  broj interpolacijskih centara. Nadalje, svaka evaluacija interpolanta traži dodatnih  $\mathcal{O}(N)$  procesorskog vremena.

Postoji više načina da se interpolacijski problem rješava efikasnije nego što je invertiranje pune matrice, no za najveće probleme, kakvi se stavljaju pred metodu kontrolnih volumena, *particija jedinice* je najprikladnija.

Dvije najpoznatije radijalne bazne funkcije su Hardyevi multikvadrak  $\phi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$ ,  $c > 0$ , i Duchonov [55, 56, 57] "thin plate spline" (TPS)  $\phi(r) = r^2 \log r$ . Obzirom da se multikvadrak "skalira", tako da se dobije najveća točnost a da se pri tome ne ugrozi stabilnost, funkcija se može zapisati [159] u normiranom obliku  $\phi(r) = \sqrt{1 + r^2}$ .

Interpolacija radijalnim baznim funkcijama (RBFi) minimizira normu, što ima fizikalnu interpretaciju u specijalnom slučaju interpolacije poliharmoničnim splineom, TPS-om, gdje je ta norma energija deformiranja beskonačne ploče. To svojstvo ima za posljedicu da je interpolant gladak, ali i omogućava primjenu koncepta ortogonalne projekcije. Nadalje, RBFi je metoda koja od interpoliranih podataka ne zahtjeva nikakvu strukturu u smislu mreže. Zato ne čudi da RBFi nalazi primjenu u raznim područjima, pogotovo u onima u kojima nije moguće primijeniti drugu metodu npr., zbog prevelikoga broja dimenzija. Razlog da je TPS jedna od najpopularnijih radijalnih baznih funkcija je vjerojatno taj što ima jasnu fizikalnu interpretaciju. Drugi razlog je što ne ovisi o broju dimenzija problema, kao ni ostale globalne funkcije. Radijalne bazne funkcije općenito se mogu koristiti ili za interpolaciju ili za aproksimaciju, a pokazale su se iznimno točne za interpolaciju "glatkih podataka".

**Neka područja primjene radijalnih baznih funkcija.** Interpolaciju radijalnim baznim funkcijama moguće je primijeniti na širokom spektru područja.

Prvo je Hardy [84, 85] primijenio multikvadrake u geodeziji prilikom opisivanja topografskih površina iz proizvoljno raspoređenih točaka.

Od tada je RBFi bila upotrebljavana za mjerenje npr. temperature na površini Zemljine kugle u meteorološkim stanicama, ili mjerenje na nekim drugim objektima u više dimenzija, od kojih se onda radi interpolacija na način kako je to opisao Hardy [86]. To je inspiriralo neke istraživače da razmatraju pitanje kako efikasno aproksimirati ili interpolirati podatke koji dolaze sa sfere, i kako udaljenosti prilagoditi udaljenostima na sferi, tzv. geodetskim udaljenostima.

Carlson i Foley [38] su koristili RBFi za interpolaciju podataka dobivenih mjerenjem npr. temperature s broda, gdje duž linija po kojima brod plovi mreža može biti više od 100 puta gušća od mreže u okomitom smjeru.

Girosi [74] ističe radijalne bazne funkcije kao pristup primjeren neuralnim mrežama u tzv. "problemima učenja", djelomično zbog njihove glatkoće i fleksibilnost na broj dimenzija. Tipična primjena danas je u detektorima požara. Moderni detektor mjeri

više parametara, kao što su intenzitet zračenja, njegove raspodjele po spektru, kretanje objekta, itd., na osnovu čega mora odlučiti da li je u prostori požar ili ne. Prije primjene uređaja potrebno je mrežu "naučiti" na određene situacije kojima se dodjeljuje testna vrijednost 1 ili 0, ovisno da li se tada želi proglasiti požar ili ne. U primjeni uređaj interpolira testnu vrijednost iz naučenih situacija.

Radijalne bazne funkcije, zbog činjenice da ne zahtijevaju nikakvu strukturu od točaka u kojima su poznati podatci, nailaze na sve širu primjenu prilikom rekonstrukcije glatkih površina iz točaka s površine. Te točke mogu biti dobivene bilo kakvim npr. 3D skeniranjem. Površina se onda rekonstruira iz implicitne jednadžbe  $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \Omega : F(\mathbf{x}) = 0\}$ . Funkcija  $F$  može biti evaluirana bilo gdje u domeni  $\Omega$ , što omogućava implementaciju glatkog "zoomiranja" prilikom vizualizacije. Također daje određenu mjeru udaljenosti proizvoljne točke, u kojoj je  $F(\mathbf{x}) = c$ , od površine  $F(\mathbf{x}) = 0$ , a gradijent od  $F$  na površini  $\mathcal{S}$  daje normalu na površinu. Kada bi se u toj situaciji koristile Lagrangeove točke samo s površine snimanoga objekta, dobilo bi se trivijalno rješenje u rekonstrukciji  $0 = F \neq F(\mathbf{x})$ . Taj problem se obično rješava tako da se dodaju točke, iz točaka s površine u smjeru okomitom na površinu, u kojima se zadaju Lagrangeovi interpolacijski uvjeti koji su različiti od 0. Elegantniji način rješavanja spomenutog problema je interpolacija Hermiteovih podataka. Tada se samo u točkama na površini, osim  $F(\mathbf{y}_j) = 0$  zadaju i vrijednost normale na površinu  $\partial_n F(\mathbf{y}_j)$  [118]. Interpolaciju radijalnim baznim funkcijama za rekonstrukciju implicitnih površina prvi su koristili Savchenko i suradnici [156], i Turk i O'Brien [175], pri čemu su koristili globalne funkcije. Morse i suradnici [128], te Kojekine i suradnici [104] su razvili metodu koja koristi Wendlandove funkcije na kompaktnom nosaču, što je omogućilo rješavanje puno većih problema. Daljnje povećanje efikasnosti rekonstrukcije implicitnih površina omogućila je primjena interpolacije radijalnim baznim funkcijama u particiji jedinice [69, 186, 137, 174].

Primjena radijalnih baznih funkcija također je važna u *metodama rubnih elemenata* (engl. *boundary element methods*), jer za razliku od tradicionalnih metoda rubnih elemenata ne zahtijevaju strukturiranu mrežu na rubu, pa se može koristiti npr. standardna "StereoLithography" [35] (StL) triangulacija za definiranje geometrije promatranog objekta. Pollandt [143] ih je koristio za rješavanje nelinearnih eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom rubnih elemenata. Danas se koriste tri metode rubnih elemenata, s radijalnim baznim funkcijama, "dual reciprocity" metode rubnih

elemenata [198], metoda fundamentalnih rješenja [59] i *metoda rubnih čvorova* (engl. *boundary knot method*) [75].

Nadalje, koristilo ih se u konzervativnom sučelju fluida i strukture za interpolaciju sila i pomaka elastične strukture [23], i strukturnog sustava [173] gdje je sučelje konzervativno za svaki element strukturnog sustava kao i za sustav u cjelini. Ahrem [5] je kroz sučelje prenosio, na mrežu domene fluida, i informaciju o stupnjevima slobode rotacije s elastičnog krila koje je bilo modelirano 1D elementima.

Upotrebljavane su i za deformaciju mreže kontrolnih volumena iz poznatog pomaka ruba [26]. Iscrpnija analiza, i usporedba s drugim metodama za deformaciju mreže može se pronaći u [28].

Ostale primjene uključuju procesiranje signala, statistiku (kriging) i optimizaciju (npr. [120, 180, 146, 129, 154] i reference u tim radovima).

### 3.1. Uvod

U 1D slučaju, prilikom interpolacije polinomima, prostor u kojem se traži interpolant ne ovisi o rasporedu interpolacijskih točaka, već samo o njihovom broju. Kada se radi interpolacija u više dimenzija, pokazalo se da funkcijski prostori  $\mathcal{H}$ , u kojima se traži riješenje interpolacijskog problema, moraju ovisiti o podacima koje se interpolira, što je posljedica teorema Mairhubera i Curtisa [29]. Najjednostavniji način da se  $\mathcal{H}$  učini ovisan o podacima je da se uzme ovisan o položajima **interpolacijskih centara**  $Y$ , a ne i o vrijednostima funkcije u njima.

Direktan način da se pomoću lokacija poznatih funkcijskih vrijednosti napravi linearni prostor, koji ovisi o centrima  $Y$ , je da se definira funkcija [159]:

$$\Phi: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

i da se svaka  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)$  promatra kao funkcija varijable  $\mathbf{x}$ , ovisna o interpoliranim podacima.

Superpozicija takvih funkcija rezultira prostorom Hilbertovim:

$$\mathcal{H}_{\Phi, Y} = \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) : \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schaback [159] argumentira takav izbor prostora, i pokazuje da, uz par slabih i generalnih pretpostavki, ne postoji bolji način da se on konstruira.

U tekstu će se ponekad govoriti o radijalnoj baznoj funkciji  $\phi(r): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , a ponekad o radijalnoj funkciji koja je definirana na  $\Omega \times \Omega$ , tj. pomoću dvije točke iz domene  $\Omega$ . Da se istakne razlika, druga će se označavati velikim slovom, pa vrijedi  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , gdje je  $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  euklidska udaljenost dviju točaka.

Može se umjesto Hilbertovog prostora koristiti semi-Hilbertov prostor, s pripadajućom semi-normom generiranom pozitivno semi-definitnom bilinearnom formom s netrivialnom jezgrom. U toj jezgri su polinomi obično nižeg stupnja. To je slučaj s radijalnim baznim funkcijama na kompaktnom nosaču, kao i sa svim pozitivno definitnim funkcijama. Neke globalne funkcije su uvjetno pozitivno definitne, pa im se polinom mora staviti u jezgri.

Interpolacija funkcijama na kompaktnom nosaču, iz velikog broja centara (ćelija u metodi kontrolnih volumena), imaju manje zahtjeve na računalne resurse. Tada se odabire manji radijus nosača čime matrica postaje slabije popunjena, ili se centri dijele na manje podskupove s različitim gustoćama ("multilevel" tehnike [94]), ili se pak gustoća centara ne mijenja već se interpolacijski problem podjeli u puno malih u *particiji jednice* [185]. Funkcije na kompaktnom nosaču stvaraju slabo popunjene matrice, što u općem slučaju predstavlja prednost za rješavanje linearnog sustava. Ako su radijusi nosača mali, funkcije će biti lokalne, što ima određene prednosti i nedostatke. Nedostatak je što se globalna "slika" rješenja ne prenosi lako (što je nepovoljno npr. u eliptičnoj jednadžbi za tlak). Prednost, osim stabilnije interpolacije, je to što je u prirodi rješenja većine problema da su važnije lokalne pojave.

U nastavku ovog poglavlja dan je kratak pregled radijalnih baznih funkcija koje se najčešće koriste, i neka njihova važna svojstva. Više o interpolaciji radijalnim baznim funkcijama može se naći u [144, 159, 164, 162, 163, 34, 94, 188].

## 3.2. Interpolacija radijalnim baznim funkcijama

U određenim inženjerskim problemima funkcija  $v$  nije dana kao formula, već kao skup funkcijskih vrijednosti. Ti se podaci mogu promatrati kao točne ili približne vrijednosti od  $v$  u **proizvoljnim centrima** (engl. *scattered points*) domene  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , u kojoj je  $v$  definiran. Općenito, problem **rekonstrukcije iz jednadžbi** (engl. *recovery*) podrazumijeva rekonstrukciju od  $v$  kao formulu, iz danog skupa funkcijskih vrijednosti. Tako se rekonstrukcija od  $v$  iz jednadžbi može raditi ili **interpolacijom**, koja točno re-

konstruira funkcijsku vrijednost u centrima, ili **aproksimacijom**, u kojoj se dozvoljava da interpolant  $s$  na "neki način" ne rekonstruira  $v$  točno, u nekim ili svim centrima. Ovisno o tome što se očekuje od rekonstrukcije, koristi se ili interpolacija ili aproksimacija [159, 164, 34, 188].

Radijalne bazne funkcije (RBF) su već dobro poznat i efikasan alat za interpolaciju iz proizvoljnih centara u više dimenzija. U ovom radu ih se koristi za rekonstrukciju prostornih funkcija iz prosjeka u ćelijama, prilikom diskretizacije metodom kontrolnih volumena. U prethodna dva desetljeća, radijalne bazne funkcije korištene su za rješavanja problema opisanih parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Tako su korištene u *kolo-kacijskoj* metodi za eliptične probleme [67], za rješavanje transportne jednadžbe [117] i jednadžbi dinamike fluida [101]. Također je RBF koristio Wendland u bezmrežnoj Galerkinovoj metodi [184], Behrens i Iske u semi-Lagrangeovskoj metodi za probleme advekcije [24], Hunt ih koristi u bezmrežnoj metodi za konvekcijsko-difuzijski problem u kojem dominira konvekcija [92], a Sonar i Iske za rekonstrukciju ENO shemom konvekcije u metodi kontrolnih volumena [169, 95].

### 3.2.1. Interpolacijski problem

Neka je dan vektor  $v|_Y = (v(\mathbf{y}_1), \dots, v(\mathbf{y}_N))^T \in \mathbb{R}^N$  funkcijskih vrijednosti, dobivenih iz nepoznate funkcije  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  u konačnom broju proizvoljnih centara  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Interpolacija iz proizvoljnih centara (engl. *scattered data interpolation*) **Lagrangeovih podataka**<sup>1</sup> podrazumijeva računanje interpolanta  $s: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  koji zadovoljava  $s|_Y = v|_Y$ :

$$s(\mathbf{y}_j) = v(\mathbf{y}_j) \quad \forall 1 \leq j \leq N. \quad (3.2)$$

U interpolaciji radijalnim baznim funkcijama odaberu se radijalne funkcije  $\phi: \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , pa se traži interpolant  $s$  oblika:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j\|_2) + \varpi(\mathbf{x}), \quad \varpi \in \Pi_m(\mathbb{R}^d), \quad (3.3)$$

gdje  $\|\cdot\|_2$  označava euklidsku normu na  $\mathbb{R}^d$ , a  $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$  označava vektorski prostor svih realnih polinoma u  $d$  varijabli stupnja  $m - 1$ . Ovdje je  $m = m(\phi)$  red uvjetne pozitivne definitnosti bazne funkcije  $\phi$ , v. def. 1. Neke su bazne funkcije  $\phi$  definirane u  $\mathbb{R}_+$ , navedene u tablici 3.1.

<sup>1</sup> Lagrangeovi podatci podrazumijevaju samo vrijednosti funkcije.

Tablica 3.1: Neke globalne radijalne bazne funkcije

RBF	$\phi(r)$	parametri	$m(\phi)$
Poliharmonični spline	$(-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} r^\beta$	$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}$	$\lceil \beta/2 \rceil$
	$(-1)^{1+\beta/2} r^\beta \log r$	$\beta > 0, \beta \in 2\mathbb{N}$	$1 + \beta/2$
Gaussova	$\exp(-r^2)$		0
Multikvadrik	$(-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} (1 + r^2)^{\beta/2}$	$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}$	$\lceil \beta/2 \rceil$
Inverzni multikvadrik	$(1 + r^2)^{\beta/2}$	$\beta < 0$	0

Interpolacija radijalnim baznim funkcijama ima poželjno svojstvo da je invarijantna prema euklidskim transformacijama (translacijama, rotacijama i zrcaljenjima). To proizlazi iz činjenice da je euklidska norma invarijantna na translacije i ortogonalne operatore, kojima se opisuju euklidske transformacije [61].

Neke radijalne bazne funkcije, kao što su Gaussova, (inverzni) multikvadrici i poliharmonični splajnovi, su definirane globalno, na  $\mathbb{R}^d$ . Relativno nedavno su konstruirane i radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču, koje su reda uvjetne pozitivnosti  $m = 0$  ( $\varpi(\mathbf{x}) = 0$  u jednadžbi (3.3)) [192, 182, 33]. Dok globalne radijalne bazne funkcije u principu ne ovise o dimenziji, RBF na kompaktnom nosaču ovise o prostornoj dimenziji  $d$ .

### 3.2.2. Rješivost interpolacijskog problema

Sve se bazne funkcije, navedene u tablici 3.1 mogu klasificirati korištenjem koncepta (uvjetno) pozitivno definitnih funkcija, koji se primjenjuje u analizi postojanja i jedinstvenosti rješenja interpolacijskog problema.

**Definicija 1** Za neprekidnu radijalnu baznu funkciju  $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  kaže se da je **pozitivno definitna** na  $\mathbb{R}^d$ , ako i samo ako je za svaki konačni skup  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ ,  $N \times N$  matrica

$$\mathbf{A} = (\phi(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|_2))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3.4)$$

pozitivno definitna.

**Definicija 2** Za neprekidnu radijalnu baznu funkciju  $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  kaže se da je **uvjetno pozitivno definitna reda  $m$**  na  $\mathbb{R}^d$ , ako i samo ako je za svaki konačni skup  $Y =$



$\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , i svaki  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  koji zadovoljava

$$\sum_{j=1}^N c_j \varpi(\mathbf{y}_j) = 0, \quad \forall \varpi \in \Pi_m^d,$$

je kvadratna forma

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \phi(\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k\|_2)$$

pozitivna. Funkcija  $\phi$  je pozitivno definitna ako je uvjetno pozitivno definitna reda uvjetne pozitivnosti  $m = 0$ .

Gornje definicije osiguravaju da će (uvjetno) pozitivno definitne funkcije stvarati (uvjetno) pozitivno definitnu matricu, što ima za posljedicu da je interpolacijska matrica regularna, a interpolacija jedinstvena.

Za  $m = 0$ , interpolant  $s$  u (3.3) je oblika:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j\|_2).$$

U tom slučaju se koeficijenti  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$  od  $s$  dobivaju iz interpolacijskih uvjeta (3.2) rješavanjem linearnog sustava:

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = v|_Y, \quad (3.5)$$

gdje je  $\mathbf{A} = (\phi(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|_2))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Iz definicije 1, matrica  $\mathbf{A}$  je pozitivno definitna ako je funkcija  $\phi$  pozitivno definitna. Obzirom da su svojstvene vrijednosti takve matrice pozitivne, kada je  $\phi$  pozitivno definitna reda  $m = 0$ ,  $\mathbf{A}$  je regularna matrica pa (3.5) ima jedinstveno rješenje [94].

Za  $m > 0$ ,  $\phi$  je uvjetno pozitivno definitna reda  $m$ , i interpolant  $s$  mora sadržavati polinomni dio koji stvara  $q$  dodatnih stupnjeva slobode, gdje je  $q = \binom{m-1+d}{d}$  dimenzija polinomnog prostora  $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$ . Ti se dodatni stupnjevi slobode eliminiraju pomoću  $q$  uvjeta ortogonalnosti, koji se nazivaju i **momentni uvjeti** jer interpolacija s polinoma egzaktno reproducira polinome do  $m - 1$ . stupnja:

$$\sum_{j=1}^N c_j \varpi(\mathbf{y}_j) = 0, \quad \forall \varpi \in \Pi_m^d.$$

Tada se rješava  $(N + q) \times (N + q)$  linearni sustav:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v|_Y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdje je  $\mathbf{A} = (\phi(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|_2))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{P} = ((\mathbf{y}_j)^\alpha)_{1 \leq j \leq N; |\alpha| < m} \in \mathbb{R}^{N \times q}$ , dok su  $\mathbf{d} = (d_\alpha)_{|\alpha| < m}$  koeficijenti polinomnog dijela interpolanta (3.3).

Linearni sustav (3.6) ima jedinstveno rješenje za koeficijente  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$  i  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^q$ , ako je skup centara  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$ ,  $\Pi_m^d$ -**jedinstveno rješiv** (engl.  $\Pi_m^d$ -*unisolvant*), odnosno ako za  $\varpi \in \Pi_m(\mathbb{R}^d)$  vrijedi:

$$\varpi(\mathbf{y}_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad \Rightarrow \quad \varpi \equiv 0.$$

U tom se slučaju svaki polinom u  $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$  može na jedinstven način rekonstruirati iz funkcijskih vrijednosti u centrima  $Y$ .

Slijedeći teorem rezimira vezu između uvjetno pozitivne definitnosti, te postojanja i jedinstvenosti rješenja interpolacijskog problema.

**Teorem 1 ([188])** *Neka je  $\phi$  uvjetno pozitivno definitna funkcija reda  $m$  na  $\mathbb{R}^d$ , i neka je skup centara  $Y$ ,  $\Pi_m^d$ -jedinstveno rješiv. Tada postoji samo jedna funkcija s oblika (3.3) takva da je*

$$s(\mathbf{y}_j) = v(\mathbf{y}_j) \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^n c_j \varpi(\mathbf{y}_j) = 0, \quad \forall \varpi \in \Pi_m(\mathbb{R}^d).$$

U nekoj starijoj literaturi može se naći i drugačija terminologija. Tako se za funkciju negdje govori da je *pozitivno definitna* ako je pridružena matrica pozitivno semi-definitna, dok se funkciju koja generira pozitivno definitnu matricu nazivalo *strogo pozitivno definitnom*.

### 3.2.3. Optimalnost interpolacije radijalnim baznim funkcijama

Svaka uvjetno pozitivno definitna funkcija  $\phi$  ima pripadajući "prirodan" Hilbertov prostor  $\mathcal{H}_\phi$  [188], s pripadajućom polu normom  $|\cdot|_\phi$ , u kojem se rješava problem **optimalne rekonstrukcije iz jednadžbi** (engl. *optimal recovery*). To znači da za svaki  $v \in \mathcal{H}_\phi$ , i  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ , u prirodnom prostoru  $\mathcal{H}_\phi$  postoji jedinstveni RBF interpolant  $s$  oblika (3.3) koji zadovoljava:

$$|s|_{\mathcal{H}_{\phi, Y}} = \min \left\{ |\tilde{s}|_{\mathcal{H}_{\phi, Y}} : \tilde{s} \in \mathcal{H}_{\phi, Y} \quad \text{sa} \quad \tilde{s}(\mathbf{y}_j) = v(\mathbf{y}_j), \quad j = 1, \dots, K \right\}.$$

Teoriju optimalne rekonstrukcije interpolanta iz jednadžbi su prvi iznijeli Golomb i Weinberger [76], a kasnije su ju detaljno razradili Micchelli i Rivlin [126].

### 3.2.4. Radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču

Funkcije na kompaktnom nosaču ovise o dimenziji prostora  $d$ , i fiksna funkcija  $\phi$  je pozitivno definitna do određenog broja dimenzija. Također, za funkcije na kompaktnom nosaču nužno je  $m = 0$  [188].

Wendland [182, 181, 183] je istraživao funkcije oblika:

$$\phi(r) = \begin{cases} p(r) & 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & r > 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

gdje je  $p$  polinom u 1D.

Funkcija

$$\phi_l(r) = (1 - r)_+^l,$$

gdje  $(\cdot)_+ = \max(0, (\cdot))$ , je pozitivno definitna na  $\mathbb{R}^d$  ako [12] je  $\mathbb{N} \ni l \leq \lfloor d/2 \rfloor + 1$  ali nije polinom najmanjeg stupnja i za svoju glatkoću. Tu je  $\lfloor \cdot \rfloor$  najveći cijeli broj manji ili jednak argumentu.

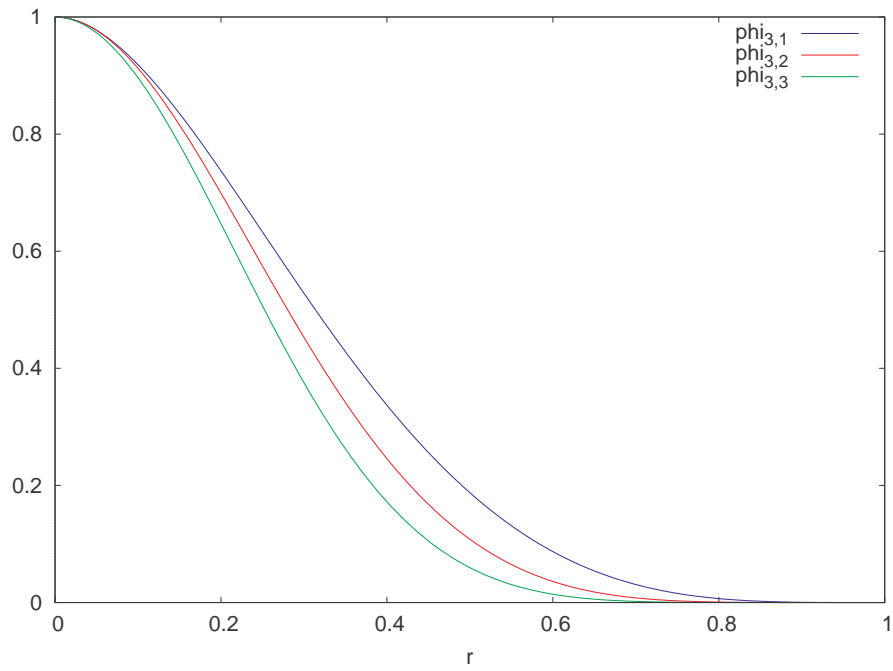
Wendland konstruira iterativnu proceduru računanja funkcija na kompaktnom nosaču najmanjeg stupnja za traženu glatkoću u potrebnom broju dimenzija. Povećavajući glatkoću, prvih nekoliko radijalnih baznih funkcija, u obliku koji je predložio Fasshauer, su:

$$\begin{aligned} \phi_{d,0} &= (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}, \\ \phi_{d,1} &= (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} [(l + 1)r + 1], \\ \phi_{d,2} &= (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 2} [(l^2 + 4l + 3)r^2 + (3l + 6)r + 3], \\ \phi_{d,3} &= (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 3} [(l^3 + 9l^2 + 23l + 15)r^3 + (6l^2 + 36l + 45)r^2 + (15l + 45)r + 15], \end{aligned} \quad (3.8)$$

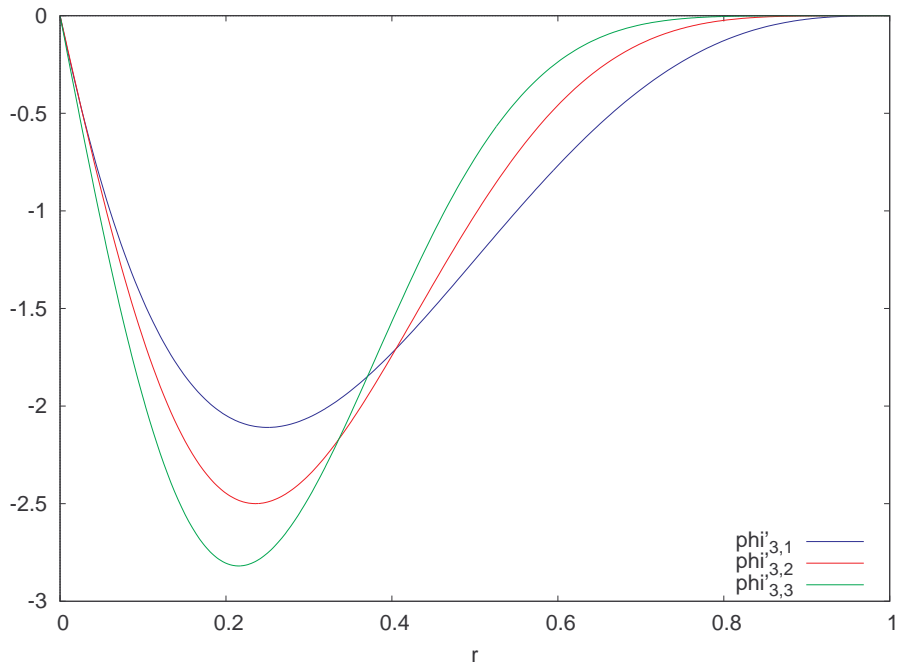
gdje je  $l = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ . Slijedeći teorem opisuje tu klasu funkcija.

**Teorem 2 ([188])** *Funkcije oblika  $\phi_{d,k}$ , iz jednadžbi (3.8), su pozitivno definitne na  $\mathbb{R}^d$  i oblika su (3.7), gdje je  $p$  polinom u 1D stupnja  $\lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$ . Posjeduju kontinuirane derivacije do reda  $2k$ . Polinom  $p$  je najmanjeg stupnja za danu dimenziju  $d$  i glatkoću  $2k$ .*

Dok su neke globalne funkcije, kao npr. Gaussova i inverzni multikvadraci, klase  $C^\infty$ , glatkoća lokalnih Wendlandovih funkcija je uvijek konačna,  $C^{2k}$ .

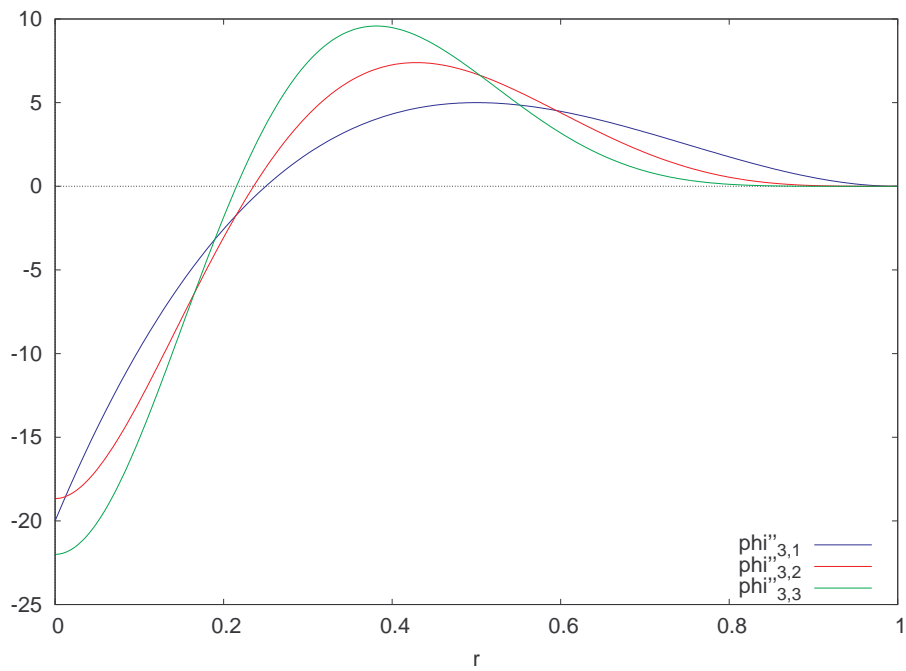


Slika 3.1: Wendlandove funkcije klase  $C^2$ ,  $C^4$  i  $C^6$ , za  $d \leq 3$ .

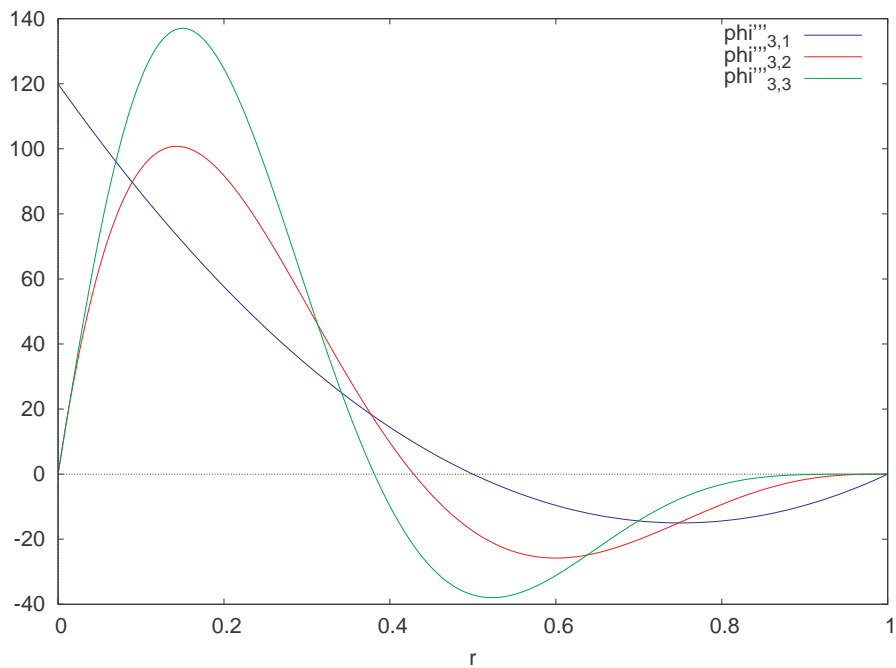


Slika 3.2: Derivacija Wendlandovih  $C^2$ ,  $C^4$  i  $C^6$  funkcija za  $d \leq 3$ .

24 Poglavlje 3. Interpolacija radijalnim baznim funkcijama



Slika 3.3: Druga derivacija Wendlandovih  $C^2$ ,  $C^4$  i  $C^6$  funkcija za  $d \leq 3$ .



Slika 3.4: Treća derivacija Wendlandovih  $C^2$ ,  $C^4$  i  $C^6$  funkcija za  $d \leq 3$ .

Tablica 3.2: Wendlandove radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču

dimenzija	funkcija	glatkoća
$d = 1$	$\phi_{1,0}(r) = (1 - r)_+$	$C^0$
	$\phi_{1,1}(r) = (1 - r)_+^3(3r + 1)$	$C^2$
	$\phi_{1,2}(r) = (1 - r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$	$C^4$
$d \leq 3$	$\phi_{3,0}(r) = (1 - r)_+^2$	$C^0$
	$\phi_{3,1}(r) = (1 - r)_+^4(4r + 1)$	$C^2$
	$\phi_{3,2}(r) = (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	$C^4$
	$\phi_{3,3}(r) = (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	$C^6$
$d \leq 5$	$\phi_{5,0}(r) = (1 - r)_+^3$	$C^0$
	$\phi_{5,1}(r) = (1 - r)_+^5(5r + 1)$	$C^2$
	$\phi_{5,2}(r) = (1 - r)_+^7(16r^2 + 7r + 1)$	$C^4$

### 3.2.5. Greška interpolacije

Prije razmatranja konvergencije i stabilnosti interpolacije potrebno je definirati dvije važne veličine.

**Definicija 3** *Danom konačnom skupu u parovima različitih centara  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \subset \Omega$ , udaljenost popunjavanja (engl. fill distance) skupa  $Y$  je*

$$h_{Y,\Omega} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{y} \in Y} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2, \quad (3.9)$$

*dok je udaljenost razdvajanja (engl. separation distance)*

$$q_Y = \frac{1}{2} \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

Stabilnost je povezana s udaljenosti razdvajanja  $q_Y$ , dok je točnost rekonstrukcije povezana s udaljenosti popunjavanja  $h_{Y,\Omega}$ . Kod uniformnog rasporeda interpolacijskih centara, ove dvije veličine grubo koincidiraju. Udaljenost razdvajanja  $q_Y$  je mjera najmanje udaljenosti koja razdvaja bilo koja dva centra, dok je udaljenost popunjavanja  $h_{Y,\Omega}$  mjera koja govori kako centri popunjavaju domenu  $\Omega$  (to je najveća udaljenost od bilo koje točke iz domene do najbližeg interpolacijskog centra). Tako udaljenost popunjavanja nije nikad manja od udaljenosti razdvajanja, a probleme stvaraju situacije u

kojima je udaljenost razdvajanja puno manja od udaljenosti popunjavanja [159]. U toj situaciji su interpolacijski centri neuniformno raspoređeni po domeni, a kvocijent:

$$\delta_{Y,\Omega} = \frac{h_{Y,\Omega}}{q_Y} \geq 1, \quad (3.10)$$

je mjera neuniformnosti rasporeda centara  $Y$  u domeni  $\Omega$ .

Greške se promatraju u terminima udaljenosti popunjavanja, kada  $h_{Y,\Omega} \rightarrow 0$ . Kada se promatra konvergencija, važno je ne samo što se događa s funkcijom, već i što se događa s njenim derivacijama.

**Definicija 4** Prostor  $C^k_\nu(\mathbb{R}^d)$  sačinjavaju sve  $v \in C^k(\mathbb{R}^d)$  funkcije čija  $k$ -ta derivacija zadovoljava

$$D^\alpha v(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|_2^\nu) \text{ za } \|\mathbf{x}\|_2 \rightarrow 0.$$

Rezultati o konvergenciji ne postoje za opće domene, pa se promatraju samo domene koje zadovoljavaju uvjet unutarnjeg konusa.

**Definicija 5** Za skup  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  kaže se da zadovoljava **uvjet unutarnjeg konusa** ako postoji kut  $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  i radijus  $r > 0$  takvi da, za svaki  $\mathbf{x} \in \Omega$ , postoji jedinični vektor  $\xi(\mathbf{x})$  takav da je konus

$$C(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}), \theta, r) := \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{z}\|_2 = 1, \mathbf{z}^T \xi(\mathbf{x}) \geq \cos \theta, \lambda \in [0, r]\}$$

sadržan u  $\Omega$ .

**Definicija 6** Aproksimacijski proces  $(v, Y) \mapsto s_Y$  ima  $L^\infty$  **red konvergencije**  $k$  u funkcijskom prostoru  $\mathcal{H}$  ako postoji konstanta  $c > 0$  takva da, za sve  $v \in \mathcal{H}$ , vrijedi

$$\|v - s_Y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch_{Y,\Omega}^k \|v\|_{\mathcal{H}}.$$

**Teorem 3** ([187]) Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ograničen, neka zadovoljava uvjet unutarnjeg konusa, te ima Lipschitzov rub. Neka je  $\phi = \phi_{d,k}$  iz teorema 2. Neka je  $1 \leq q \leq \infty$  i  $v \in H^\sigma$ , gdje je  $\sigma = \frac{d}{2} + k + \frac{1}{2}$ . Ako je  $\Omega$  pokriven kontrolnim volumenima  $\{\Omega_P\}$  tako da svaka kugla  $B \subseteq \Omega$  radijusa  $h$  sadrži barem jedan  $\Omega_P$  onda se greška između  $v$  i optimalne rekonstrukcije  $s$  iz prosjeka u ćelijama može ograničiti sa

$$\|v - s\|_{L^q(\Omega)} \leq Ch^{\sigma - d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})_+} \|v\|_{H^\sigma(\Omega)}.$$

Konvergencija greške prve derivacije je red manja.

Kada bi se s profinjavanjem mreže skalirale i funkcije, npr. smanjivanjem radijusa nosača kompaktnih funkcija, radilo bi se o tzv. **stacionarnom** profinjavanju [159, 164,

Tablica 3.3: Red konvergencije Wendlandovih radijalnih baznih funkcija u  $d = 2$ .

	$q = \infty$	$q = 2$
$k = 1$	$h^{1.5}$	$h^{2.5}$
$k = 2$	$h^{2.5}$	$h^{3.5}$
$k = 3$	$h^{3.5}$	$h^{4.5}$

[188, 163]. Stacionarno profinjavanje npr. prilikom interpolacije radijalnim baznim funkcijama na kompaktnom nosaču ima za posljedicu da se interpolacijskoj slabo popunjenoj matrici ne mijenja širina pojasa koeficijenata koji su različiti od 0. Nasuprot tome, pri **nestacionarnom** profinjavanju se broj centara povećava pri čemu je radijus nosača konstantan. Analiza greške i stabilnosti interpolacije valjana je za nestacionarno profinjavanje. Pri stacionarnom profinjavanju greška neće ići u 0 pri  $h \rightarrow 0$  kod interpolacije pozitivno definitnim funkcijama [31, 32]. U tom slučaju funkcije treba skalirati tako da se postigne kompromis između točnosti i stabilnosti [158], a za specijalne slučajeve postoji i teorijska analiza problema pod nazivom **aproksimativna aproksimacija** [122].

### 3.2.6. Numerička stabilnost

Numerička stabilnost je važno svojstvo svake interpolacijske sheme. Pogotovo je važno da profinjavanjem mreže, npr. tako da udaljenost popunjavanja  $h_{Y,\Omega}$  teži u 0, metoda ne postane numerički nestabilna.

Standardan način mjerenja stabilnosti interpolacijskog postupka [159] je uvjetovanost matrice interpolacija u jednadžbi (3.6). Uvjetovanost matrice određena je omjerom najveće i najmanje svojstvene vrijednosti  $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ , a za numeričku stabilnost je potrebno da uvjetovanost ne bude velika. Za matrice dobivene interpolacijama pozitivno definitnim radijalnim baznim funkcijama  $\phi$ , svojstvene vrijednosti su ograničene odozgo s [188]:

$$\lambda_{max}(A_{\phi,Y}) \leq N\phi(0),$$

gdje je  $N$  broj interpolacijskih centara. Numerički eksperimenti potvrđuju da ta svojstvena vrijednost ne stvara probleme [157, 160, 188]. S druge strane,  $\lambda_{min}$  je funkcija udaljenosti razdvajanja  $q_Y$  skupa  $Y$ , i profinjavanjem mreže teži u 0, pa može uzroko-



vati probleme u interpolaciji ako je mreža previše fina. Tako se za numeričku stabilnost promatra donja ograda za  $\lambda_{min}$ .

Interpolacijska greška bila je izražena u terminima duljine popunjavanja  $h_{Y,\Omega}$ , obzirom da je ta duljina mjera kako centri  $Y$  pokrivaју područje  $\Omega$ . Ali to neće biti i dobra mjera za stabilnost. Skup  $Y$  može imati veliku duljinu popunjavanja, a svejedno biti loše uvjetovan. Razlog za to je što je dovoljno da dva centra budu blizu, da uvjetovanost bude velika. Najmanju svojstvenu vrijednost  $\lambda_{min}$  je prirodnije izražavati u terminima duljine razdvajanja  $q_Y$ . Duljina razdvajanja je radijus najmanje kugle u domeni  $\Omega$  koja u unutrašnjosti nema ni jedan centar, ali ima barem dva centra na rubu. Tu ideju, da se najmanja svojstvena vrijednost izražava u terminima duljine razdvajanja, predložio je Ball [16], a proširili su ju Narcowich i Ward [131, 130, 133, 134].

Za svaku baznu funkciju  $\phi$  postoji funkcija  $G_\phi(q)$  takva da:

$$\lambda_{min} \geq G_\phi.$$

$G_\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  je kontinuirana i monotono rastuća funkcija, koja zadovoljava  $G_\phi(0) = 0$ . Funkcija  $G_\phi$  za različite bazne funkcije može se naći u [157, 160, 188]. Vrijednost od  $G_\phi$  za Wendlandove funkcije dana je u slijedećem teoremu.

**Teorem 4 ([188])** *Za interpolaciju radijalnim baznim funkcijama na kompaktnom nosaču, iz teorema 2, najmanja svojstvena vrijednost interpolacijske matrice može se ograničiti na slijedeći način:*

$$\lambda_{min} \geq Cq_Y^{2k+1}.$$

Ovdje konstanta  $C$  ovisi o  $\phi$ , ali ne i o skupu  $Y$ .

Donja granica od  $\lambda_{min}$  ide u 0 kako mreža postaje sve finija. Općenito, matrice dobivene RBF interpolacijom mogu postati jako loše uvjetovane, ako se smanjuje udaljenost razdvajanja  $q_Y$ , pa je u tom slučaju bazne funkcije potrebno skalirati.

Kada se koristi interpolacija radijalnim baznim funkcijama uvijek se mora birati između stabilnosti i točnosti interpolacije, što Schaback [157] naziva *uncertainty principle* u članku u kojem se prvi puta ova pojava spominje u kontekstu interpolacije radijalnim baznim funkcijama, dok Wendland to naziva *trade-off principle* [188]. Kada se želi visoka točnost rekonstrukcije mora se žrtvovati stabilnost, i obratno, ako se želi stabilna interpolacija točnost će biti manja.

I točnost i stabilnost su povezane s gustoćom interpolacijskih centara, i s glatkoćom radijalne bazne funkcije  $\phi$ , dok u slučaju funkcija na kompaktnom nosaču, i s radijusom nosača funkcije  $\phi$ .

Ako se fiksira gustoća centara, npr. fiksiranjem mreže kontrolnih volumena, glatkoća funkcije  $\phi$  mora se pažljivo odabirati. Tada glatkoća treba biti minimalna, koju rješavani problem dozvoljava, jer pretjerana glatkoća ima negativne posljedice za stabilnost [157].

Ako se fiksira točnost ili stabilnost, mora se učiniti kompromis između gustoće centara i glatkoće funkcije  $\phi$ . U slučaju male gustoće interpolacijskih centara (npr. kad je mreža kontrolnih volumena gruba) mogu se odabrati glatke funkcije, a za fine mreže potrebno je koristiti funkcije  $\phi$  manje glatkoće kako bi se izbjegli numerički problemi.

### 3.3. Generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama

U određenim aplikacijama, kao što je to prilikom rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, potrebno je dobiti rekonstrukciju iz jednadžbi temeljem nekih drugih tipova podataka, različitih od evaluacije u točki. To je slučaj npr. prilikom zadavanja Neumannovog rubnog uvjeta, ili kada je poznat prosjek funkcije u kontrolnom volumenu. Na sreću, RBFi okruženje se može generalizirati i na složenije funkcionale, tako da interpolant i dalje minimizira normu.

Neka je  $\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}$  Hilbertov prostor, a  $\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}^*$  njegov dual. Ako se označi sa  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subseteq \mathcal{H}_{\phi, \Lambda}^*$  skup linearno nezavisnih funkcionala na  $\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}$ , i  $\lambda_1(v), \dots, \lambda_N(v) \in \mathbb{R}$  vrijednosti tih funkcionala od  $v$ , tada problem generalizirane interpolacije traži interpolant  $s \in \mathcal{H}_{\phi, \Lambda}$  takav da vrijedi:

$$\lambda_i(v) = \lambda_i(s), \quad i = 1, \dots, N.$$

Interpolant  $s$  je ovdje generalizirani interpolant, a u problemu optimalne rekonstrukcije iz jednadžbi traži se interpolant  $s \in \mathcal{H}$  takav da vrijedi:

$$|s|_{\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}} = \min \{ |\tilde{s}|_{\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}} : \tilde{s} \in \mathcal{H}_{\phi, \Lambda}, \quad \lambda_i(v) = \lambda_i(s), \quad i = 1, \dots, N \}.$$

Generalizirani interpolant je oblika:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j^y \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j\|_2) + \varpi(\mathbf{x}), \quad \varpi \in \Pi_m(\mathbb{R}^d), \quad (3.11)$$

gdje oznaka  $\lambda_j^y$  podrazumijeva djelovanje funkcionala  $\lambda_j$  na  $\phi$ , koji se promatra kao funkcija drugog argumenta,  $\mathbf{y}_j$ .

Interpolant sada zadovoljava interpolacijske uvijete

$$\lambda_i^x(s) = \lambda_i(v), \quad i = 1, \dots, N,$$

gdje  $\lambda_i^x$  označava djelovanje funkcionala na  $s$ , kada se  $\lambda_i$  promatra kao funkcija prve varijable,  $\mathbf{x}$ . Da se otklone dodatni stupnjevi slobode, koriste se momentni uvjeti, koji su sada:

$$\sum_{j=1}^N c_j \lambda_j^x(\varpi) = 0, \quad \forall \varpi \in \Pi_m(\mathbb{R}^d).$$

Konačno, dobiva se linearni sustav:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v|_{\Lambda} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

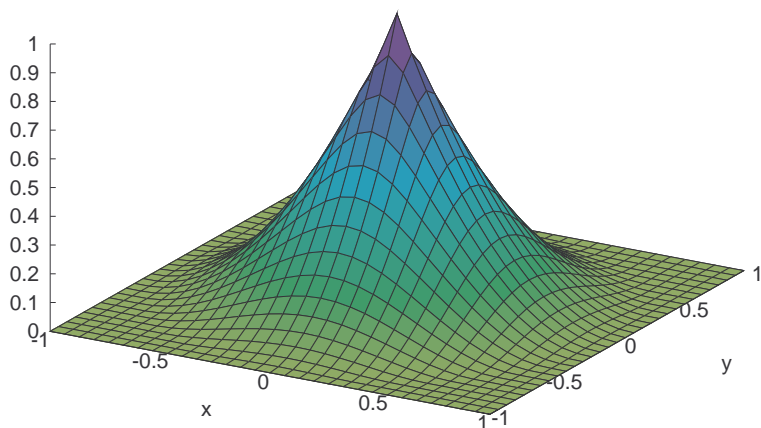
gdje je  $\mathbf{A} = (\lambda_i^x \lambda_j^y \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{P} = (\lambda_j^x(\mathbf{x}_j)^\alpha)_{1 \leq j \leq N; |\alpha| < m} \in \mathbb{R}^{N \times q}$ ,  $q = \dim(\Pi_m(\mathbb{R}^d))$ ,  $v|_{\Lambda} = (\lambda_i^x(v))_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ .

Da se osigura jedinstvenost interpolanta  $s$ , generaliziranog interpolacijskog problema, potrebno je generalizirati pojam  $\Pi_m^d$ -jedinstvene rješivosti interpolacijskog skupa. Sada je potrebno da skup linearnih funkcionala  $\Lambda$  zadovoljava slijedeće uvijete:

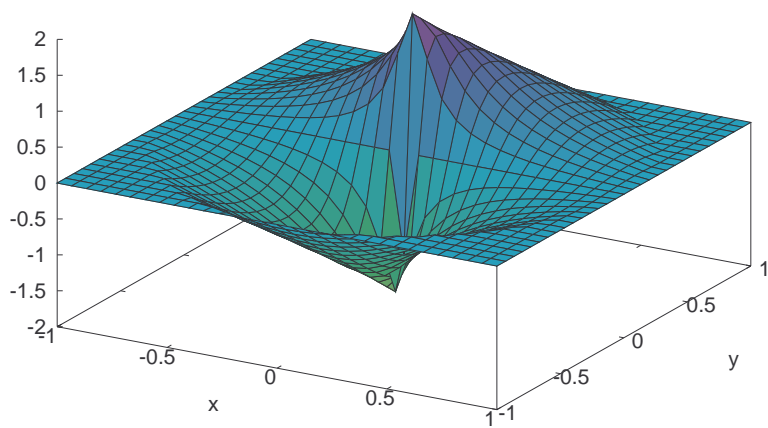
$$\lambda_i^x(\Pi_m(\mathbb{R}^d)) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \Rightarrow \quad \varpi \equiv 0,$$

tj., da se svaki polinom  $\varpi$  iz  $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$  može rekonstruirati iz  $\{\lambda_i^x(\varpi)\}_{i=1}^N$  na jedinstven način.

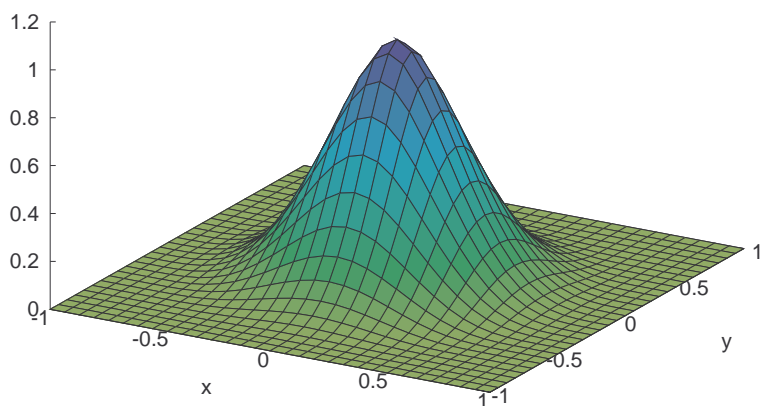
Za fiksnu funkciju  $\phi$ , kada se fiksiraju funkcionali  $\Lambda$  određen je i prostor  $\mathcal{H}_{\phi, \Lambda}$ . Funkcionalni  $\Lambda$  generaliziraju evaluacije u točkama  $Y$ . Sada se za interpolacijske uvijete mogu zadavati razni podatci. Funkcionalni moraju biti linearno nezavisni, pa podaci koji se zadaju ne smiju biti redundantni. Mogu se interpolirati **Hermiteovi podatci** [118], koji podrazumijevaju da se osim vrijednosti funkcije zadaju i njene derivacije u istim centrima, ali takvi da se zadaju sve derivacije redom do funkcije. Mogu se zadavati samo neke derivacije, kao u općenitijem slučaju Hermiteove interpolacije **Birkhoffovih podataka** [191, 93]. U **generaliziranoj Hermiteovoj interpolaciji**, funkcionali  $\Lambda$  mogu biti i općenitiji podatci, npr. lokalni integrali u slučaju integralne interpolacije [22], operatori prosjeka u ćelijama [169], ili njihova kombinacija kao u slučaju interpolacije višeg reda za metodu kontrolnih volumena na mreži centriranoj u ćelijama, koja se koristi



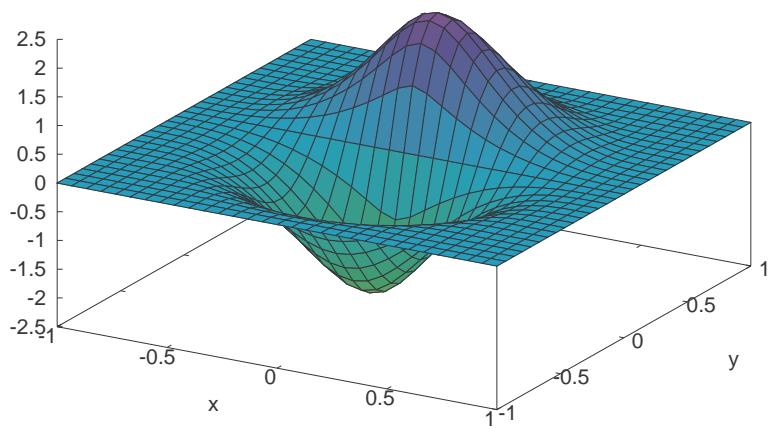
Slika 3.5: Wendlandova  $C^0$  funkcija, za  $d \leq 3$ .



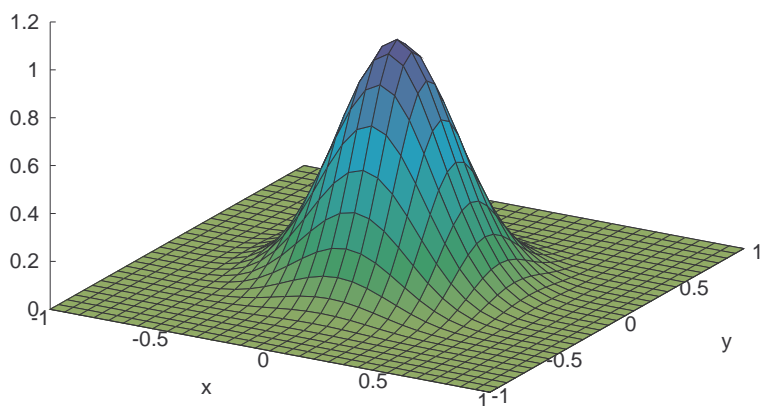
Slika 3.6: Distribucija  $(D^y(\phi_{3,0} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumannovim rubnim uvjetom.



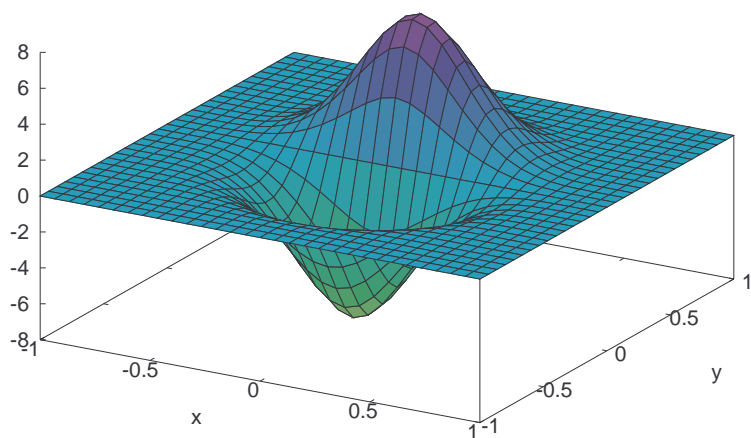
Slika 3.7: Wendlandova  $C^2$  funkcija, za  $d \leq 3$ .



Slika 3.8: Funkcija  $(D^y(\phi_{3,1} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumanovim rubnim uvjetom.



Slika 3.9: Wendlandova  $C^4$  funkcija, za  $d \leq 3$ .



Slika 3.10: Funkcija  $(D^y(\phi_{3,2} \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{e}_y$ , koja se stavlja u centar s Neumannovim rubnim uvjetom.

o ovom radu. Pomoću generalizirane interpolacije može se metoda konačnih elemenata preformulirati kao problem rekonstrukcije iz jednadžbi (3.11) (*recovery*), tako da se definiraju funkcionali koji koriste "slabe podatke" [165]:

$$\lambda_j(f) = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g_j,$$

pomoću *test funkcije*  $g_j$ . Najčešća upotreba generalizirane Hermiteove interpolacije radijalnim baznim funkcijama je u simetričnim *kolokacijskim metodama* [191, 93, 67, 66, 145, 113, 60, 197], gdje su funkcionali diferencijalni operatori koji djeluju u unutrašnjosti ili na rubu proračunske domene, kao i u nesimetričnim kolokacijskim metodama [115, 147, 116, 197, 109] koje zbog jednostavnosti implementacije postaju sve popularnije, pogotovo nakon što su Hon i Schaback [90] rasvijetlili situacije u kojima nesimetrične kolokacije postaju singularne, i nakon što je Schaback [161] analizirao konvergenciju te klase metoda.

### 3.4. Hilbertovi prostori s reproducirajućom jezgrom

Funkcija  $\Phi$  može biti složenija od  $(\phi \circ r)$ , kakva se koristi u ovom radu. Općenito, svaka funkcija:

$$\Phi: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

naziva se **jezgra**, ili preciznije **skalarna jezgra** (realna jezgra). Funkcija  $(\phi \circ r)$  je tako skalarna **radijalna jezgra**. Postoje **translacijske jezgre**. Također postoje jezgre koje imaju sliku u više dimenzija od skalarne. Takva je npr. **tenzorska radijalna jezgra**, odnosno matrična radijalna jezgra [27].

U ovom poglavlju biti će izneseni neki rezultati vezani za jezgre, te je na kraju poglavlja naveden prostor koji stvara jezgra od Wendlandovih pozitivno definitnih funkcija.

**Definicija 7** *Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor funkcija  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcija  $\Phi: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  naziva se **reproducirajuća jezgra** za  $\mathcal{H}$  ako:*

1.  $\Phi(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega,$
2.  $v(\mathbf{y}) = \langle v, \Phi(\cdot, \mathbf{y}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \mathcal{H}, \mathbf{y} \in \Omega.$

Tako definirana jezgra ima svojstvo da su funkcionali evaluacije u točki  $\delta_{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}^*$  kontinuirani za svaki  $\mathbf{y} \in \Omega$ , zbog kontinuiranosti skalarnog množenja. Odabirom funkcije  $\phi$ , određena je radijalna jezgra  $(\phi \circ r)$ .

Hilbertovi prostori s reproducirajućom jezgrom imaju i ova svojstva [188]:

1.  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$
2.  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \Phi(\cdot, \mathbf{y}), \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \delta_{\mathbf{x}}, \delta_{\mathbf{y}} \rangle_{\mathcal{H}^*} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$
3. ako su  $f, f_n \in \mathcal{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , takve da  $f_n$  konvergira u  $f$  u normi Hilbertovog prostora, onda  $f_n$  konvergira i po točkama.

Pozitivno definitne funkcije stvaraju takvu jezgru da su funkcionali evaluacije u točkama linearno nezavisni.

Reproducirajuća jezgra Hilbertovog prostora je upravo pozitivno (semi-)definitna jezgra [188]. Wendland pokazuje da za jezgre dobivene radijalnim baznim funkcijama na kompaktnom nosaču (3.8), prirodan Hilbertov prostor je prostor Soboljeva  $\mathcal{H}_{\phi_{d,k}}(\mathbb{R}^d) = H^w(\mathbb{R}^d)$ , gdje je  $w = \frac{d}{2} + k + \frac{1}{2}$  pri tome je interpolant  $C^{2k}$  kontinuiran.





## 4 | Particija jedinice

Cijena interpolacije globalnim radijalnim baznim funkcijama je reda veličine  $\mathcal{O}(N^3)$ , i dodatnih  $\mathcal{O}(N)$  za svaku evaluaciju [188], pa je primjerena samo za male skupove podataka. Radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču omogućuju interpolaciju iz većeg broja centara od funkcija na globalnom nosaču, ali bi na neuniformnim mrežama, na kojima su centri lokalno jako blizu, uvjetovanost interpolacijske matrice mogla postati prevelika. Pomoću particije jedinice, globalni se interpolacijski problem dijeli na više manjih interpolacijskih problema, iz kojih se rekonstruira globalni interpolant. Na taj način je moguće pomoću particije jedinice koristiti različite radijuse nosača baznih funkcija, u pojedinim particijama.

Ideju upotrebe particije jedinice uveo je Maude [121] gdje se razmatra 1D slučaj. Franke [68] je proširio koncept na višedimenzionalni slučaj, u radu u kojem je testirao više težinskih funkcija i različite lokalne interpolacije. Analizu konvergencije interpolacije generalnom radijalnom baznom funkcijom u particiji jedinice dao je Wendland [185, 186]. U kontekstu bezmrežnih metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, metodu particije jedinice su počeli koristiti Babuška i Melenk [14], kasnije i Franke i Schaback [67], i Krysl i Belytschko [107].

Particija jedinice može se napraviti *a priori*, tako da ne ovisi o rješenju, i *a posteriori*, kada particija jedinice ovisi o rješenju promatranog problema opisanog parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. U ovom radu se ne traže slaba rješenja, u smislu da se konvekcija ne stabilizira tako da se dozvoljavaju diskontinuiteti na stranicama kontrolnih volumena, pa se koristi *a priori* particija jedinice. S druge strane npr., u WENO shemi se u svakom koraku rekonstrukcije radi nova particija jedinice [2, 3], te se tako

stabilizira slabo rješenje.

## 4.1. Metoda particije jedinice

Za particiju jedinice promatrano područje se pokrije otvorenim pokrivačem  $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ , kojemu se elementi barem malo preklapaju. Particiju jedinice sačinjavaju ne-negativne kontinuirane funkcije  $\{w_j\}$ , za koje vrijedi  $\sum_{j=1}^M w_j(\mathbf{x}) = 1$  na  $\Omega$ , i  $\text{supp}(w_j) \subseteq \Omega_j$ <sup>1</sup>. Svaki element pokrivača  $\{\Omega_j\}$  ima svoj interpolacijski prostor  $V_j$ . Sada se  $v$  interpolira na svakom elementu pokrivača, a globalni interpolant se računa iz:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M s_j(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{x}).$$

Elementi pokrivača (nosači) geometrijski mogu izgledati bilo kako, ali je praktičnije koristiti konveksne oblike. Uvjet  $\sum_{j=1}^M w_j(\mathbf{x}) = 1$  se dobiva iz glatke pozitivne funkcije normalizacijom:

$$w_j(\mathbf{x}) = \frac{W_j(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^M W_i(\mathbf{x})}. \quad (4.1)$$

Lokalni interpolacijski prostori, potprostori polaznog interpolacijskog prostora (globalne interpolacije), dani su sa:

$$V_j := \text{span}\{\Phi(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Y_j\}, \quad (4.2)$$

gdje  $\Phi: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uvjetno pozitivno definitna funkcija reda  $m$ , a  $Y_j = Y \cap \Omega_j$ . Lokalni interpolant  $s_j$  je dan s interpolantom  $s_{Y_j}$ . Može se vidjeti da globalni interpolant nasljeđuje interpolacijsko svojstvo iz lokalnih, tj.  $s(\mathbf{y}_k) = v(\mathbf{y}_k)$ ,  $1 \leq k \leq N$  kao posljedica particije jedinice:

$$s(\mathbf{y}_k) = \sum_{j=1}^M s_{Y_j}(\mathbf{y}_k) w_j(\mathbf{y}_k) = \sum_{j=1}^M v(\mathbf{y}_k) w_j(\mathbf{y}_k) = v(\mathbf{y}_k).$$

Iz jednostavnog računa se vidi da je greška globalne interpolacije određena najvećom

---

<sup>1</sup> Za takvu particiju jedinice kaže se da je **podređena pokrivaču**  $\{\Omega_j\}$  [176]. Skup  $\text{supp}(w_j)$ , na kojem funkcija  $w_j$  poprima vrijednost različitu od 0, naziva se **nosač funkcije**  $w_j$ .

greškom lokalnih interpolacija:

$$\begin{aligned} |v(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x})| &= \left| \sum_{j=1}^M [v(\mathbf{x}) - s_j(\mathbf{x})] w_j(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^M |v(\mathbf{x}) - s_j(\mathbf{x})| w_j(\mathbf{x}) \leq \max_{1 \leq j \leq M} \|v - s_j\|_{L^\infty(\Omega_j)}. \end{aligned}$$

Slijede definicije potrebne za formalno iskazivanje reda konvergencije interpolacije u particiji jedinice.

**Definicija 8** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ograničen skup, i neka je  $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$  njegov otvoreni pokrivač. Dakle svaki  $\Omega_j$  je otvoren i ograničen, i  $\Omega$  je sadržan u njihovoj uniji. Neka je  $\delta_j = \text{diam}(\Omega_j) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_j} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ . Tada se za familiju ne-negativnih funkcija  $\{w_j\}_{j=1}^M$ , sa  $w_j \in C^k(\mathbb{R}^d)$ , kaže da je  **$k$ -stabilna particija jedinice** obzirom na pokrivač  $\{\Omega_j\}$  ako vrijedi:

1.  $\text{supp}(w_j) \subseteq \Omega_j$ ,
2.  $\sum_{j=1}^M w_j(\mathbf{x}) = 1$  na  $\Omega$
3.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$  takva da  $|\alpha| \leq k$ ,  $\exists C_\alpha > 0$  takav da:

$$\|D^\alpha w_j\|_{L^\infty(\Omega_j)} \leq \frac{C_\alpha}{\delta_j} \quad \forall 1 \leq j \leq M.$$

**Definicija 9** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ograničen, i neka su dani centri  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \subseteq \Omega$ . Za otvoreni pokrivač kaže se da je **regularan** za  $(\Omega, Y)$  ako vrijede slijedeća svojstva:

1.  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , broj nosača za koje je  $\mathbf{x} \in \Omega_j$  je ograničen globalnom konstantom  $K$ .
2. postoji konstanta  $C_r$  i kut  $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  takvi da svaki  $\Omega_j \cup \Omega$  zadovoljava uvjet unutaršnjeg konusa s kutom  $\theta$  i radijusom  $r = C_r h_{Y, \Omega}$ .

Neka od ovih svojstava su prirodna, dok su druga tehnička. Tako je npr.  $K$  uvijek konačan u praksi, a za efikasnost evaluacije je važno da je za globalni interpolant potrebno evaluirati najviše  $K$  lokalnih interpolanata. Formalno, da se ne izgubi red konzistencije [188]  $K$  je potrebno ograničiti, jer ne ovisi o  $N$ . Uvjet konusa je važan jer omogućuje procjenu reda interpolacije radijalnim baznim funkcijama.

Sada se može iskazati rezultat o konvergenciji.

**Teorem 5** ([188]) *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  otvoren i ograničen skup, a  $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \subseteq \Omega$ . Neka je  $\Phi \in C_\nu^k(\mathbb{R}^d)$  uvjetno pozitivno definitna funkcija reda  $m$ . Neka je  $\{\Omega_j\}$  regularan pokrivač za  $(\Omega, Y)$  i  $\{w_j\}$   $k$ -stabilna particija jedinice za  $\{\Omega_j\}$ . Tada se greška između  $v \in \mathcal{H}_\Phi(\Omega)$  i interpolanta u particiji jedinice može ograničiti na slijedeći način:*

$$|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha s(\mathbf{x})| \leq C h_{Y,\Omega}^{(k+\nu)/2-|\alpha|} |v|_{\mathcal{H}_\Phi(\Omega)}$$

za sve  $\mathbf{x} \in \Omega$  i sve  $|\alpha| \leq \frac{k}{2}$ .

Ovdje je  $C_\nu^k(\mathbb{R}^d)$  iz definicije 4.

**Složenost algoritma.** Na složenost algoritma particije jedinice najviše utječe struktura podataka, koja treba zadovoljavati slijedeće pretpostavke.

- Svaki nosač sadrži malen broj centara.
- Svaki  $x \in \Omega$  je u malom broju nosača.
- Ti nosači se mogu efikasno pronaći.

Navedene pretpostavke dovode do situacije u kojoj je broj nosača  $M$  proporcionalan broju centara  $N$ . To konkretno znači da se  $\mathcal{O}(M)$  lokalnih interpolacija može izračunati u  $\mathcal{O}(N)$  vremena.

Prilikom stvaranja interpolacije, nakon što je definirana particija jedinice, računanje lokalnih interpolanata može se implementirati  $\mathcal{O}(N)$  [188]. Naime ako se pretpostavi da je broj nosača u pokrivaču  $M$  proporcionalan ukupnom broju interpolacijskih centara  $N$ , tako što je konstantan broj centara u elementima pokrivača, onda je linearna složenost računanja interpolacije,  $\mathcal{O}(N)$ . Koeficijent proporcionalnosti je reda  $\mathcal{O}(N/M)^3$ , obzirom da se na svakom elementu nosača obično invertira puna matrica, a također ne ovisi o veličini mreže nego samo o broju interpolacijskih centara u svakom elementu pokrivača.

Što se tiče složenosti algoritma za evaluaciju interpolanta unutar particije jedinice podređene pokrivaču, složenost traženja nosača iz pokrivača, u kojima je definiran interpolant u pojedinoj točki, može se implementirati da ne ovisi o broju centara  $N$  već o broju nosača koji je ograničen s  $K$ , dakle složenost traženja je  $\mathcal{O}(1)$ . Računanje lokalnog interpolanta je proporcionalno broju točaka u elementu particije jedinice, i također ne ovisi o veličini mreže  $N$ . Formiranje globalnoga interpolanta je zatim proporcionalno s  $K$  u najgorem slučaju. Kao posljedica, složenost cijele evaluacije je  $\mathcal{O}(1)$  [188].

Što se tiče stabilnosti interpolacije u particiji jedinice, uvjetovanost interpolacijske matrice, za konstantan radijus nosača radijalne bazne funkcije, ovisi o udaljenosti razdvajanja  $q_Y$ , a ne o broju centara u interpolaciji, pa se stabilnost interpolacije lokalnim radijalnim baznim funkcijama neće znatno promijeniti u odnosu na globalnu interpolaciju.

## 4.2. Funkcije u particiji jedinice

Funkcije  $w_j(\mathbf{x})$  moraju biti kontinuirane na području  $\Omega_j$ . U ovom radu se koriste funkcije koje su definirane kao kompozicija **funkcije udaljenosti**  $\hat{r}_j: \Omega_j \rightarrow [0, 1]$ , koja je na rubu  $\hat{r}_j = 1$ , i **funkcije iščezavanja**  $\Upsilon: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , a težina particije  $j$  u točki  $\mathbf{x}$  je  $W_j(\mathbf{x}) = (\Upsilon \circ \hat{r}_j)(\mathbf{x})$ .

U ovom radu koriste se funkcije udaljenosti korištene za kompjutersku grafiku [174]. U tom radu koriste se i particije koje su elipsoidi s osima poravnatim s koordinatnima, no u ovom radu se koristi samo funkcija koja je definirana na uspravnim hiperkvadrima, odnosno pravokutnicima u 2D:

$$\hat{r}_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{k=x,y,z} \frac{4(x_k - t_k^0)(t_k^1 - x_k)}{(t_k^1 - t_k^0)^2}. \quad (4.3)$$

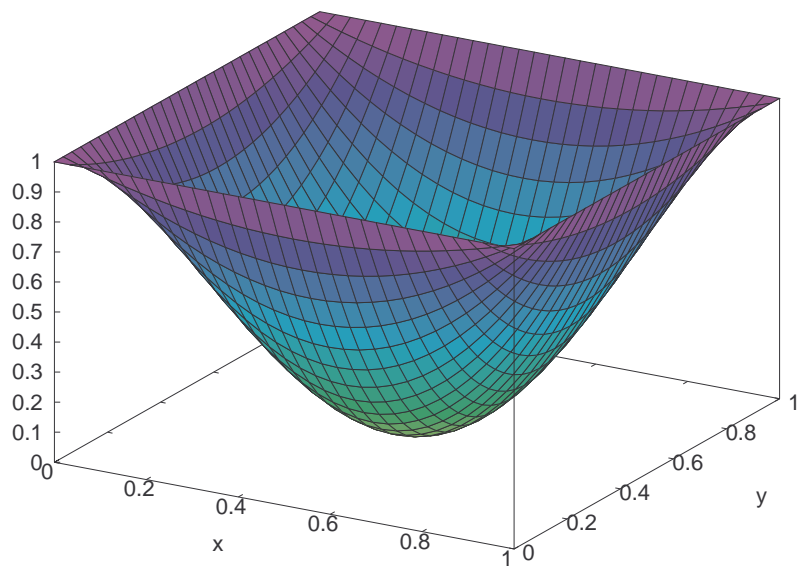
U gornjoj jednadžbi su  $t_k$  komponente vektora dva dijametralna vrha  $\mathbf{t}^0$  i  $\mathbf{t}^1$ , koji definiraju rub kvadra (engl. *bounding box*) čije su stranice paralelne s koordinatnim osima.

Odabirom funkcije iščezavanja, mijenja se glatkoća težinske funkcije  $W_j$ , sa željenom kontinuiranošću na  $\Omega_j$ . Za  $\Upsilon$  se koriste sljedeći polinomi:

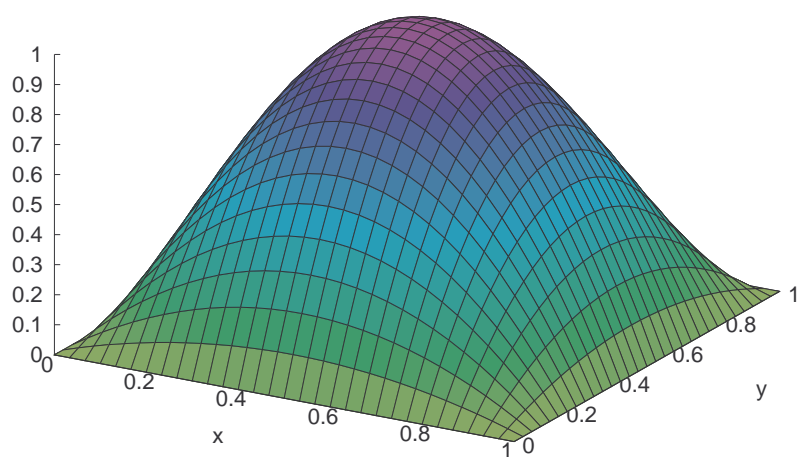
$$\begin{aligned} C^0 : \quad \Upsilon^0(\hat{r}) &= 1 - \hat{r}, \\ C^1 : \quad \Upsilon^1(\hat{r}) &= 2\hat{r}^3 - 3\hat{r}^2 + 1, \\ C^2 : \quad \Upsilon^2(\hat{r}) &= -6\hat{r}^5 + 15\hat{r}^4 - 10\hat{r}^3 + 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

koji se dobivaju računajući Hermiteov interpolacijski polinom za uvjete  $\Upsilon(0) = 1$ ,  $\Upsilon(1) = 0$ ,  $\Upsilon'(0) = \Upsilon'(1) = 0$ , i  $\Upsilon''(0) = \Upsilon''(1) = 0$ , ovisno o traženoj glatkoći.

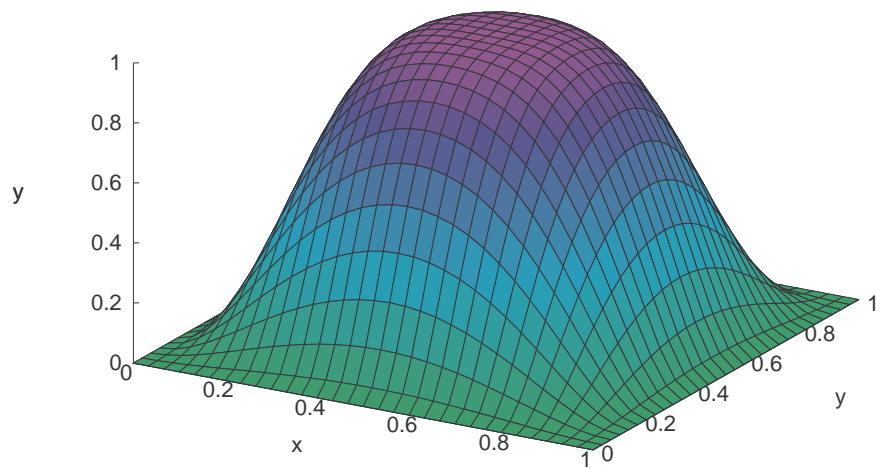
Slika 4.1 prikazuje funkcije funkciju udaljenosti u 2D području, dok slike 4.2, 4.3 i 4.4 prikazuju težinske funkcije  $W_j$  dobivene sa funkcijama iščezavanja iz jednadžbe (4.4).



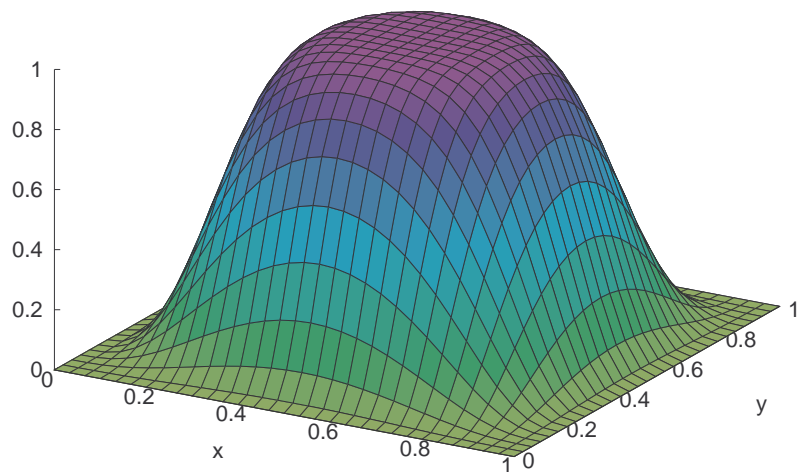
Slika 4.1: Funkcija udaljenosti  $\hat{r}(\mathbf{x})$



Slika 4.2: Težinska funkcija  $(\Upsilon^0 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$



Slika 4.3: Težinska funkcija  $(\Upsilon^1 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$



Slika 4.4: Težinska funkcija  $(\Upsilon^2 \circ \hat{r})(\mathbf{x})$





# 5 Metoda kontrolnih volumena

## 5.1. Uvod

U diskretizaciji metodom kontrolnih volumena rješava se problem opisan parcijalnim diferencijalnim jednačbama za prosjeke kontrolnih volumena. Integralna formulacija, na kojoj se zasniva metoda kontrolnih volumena, za konvektivno-difuzijski transport skalarne veličine  $\psi$  je:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}(\Omega_P) \psi(t) |\Omega_P| + \oint_{\partial\Omega_P} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi) (t, \mathbf{x}(s)) dS = \oint_{\partial\Omega_P} (\mathbf{n} \cdot \nu_\psi \nabla \psi) (t, \mathbf{x}(s)) dS + \mathfrak{A}(\Omega_P) s_\psi(t) |\Omega_P|, \quad (5.1)$$

gdje je  $\mathfrak{A}(\Omega_P) \psi(t) = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} \psi(t, \mathbf{x}) dV$  prosjek veličine  $\psi$  po volumenu  $\Omega_P$  u trenutku  $t$ , a  $\mathfrak{A}(\Omega_P) s_\psi(t) = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} s_\psi(t, \mathbf{x}) dV$  je prosječna volumna gustoća izvora veličine  $\psi$ . Nadalje,  $\int_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi dS$  i  $\int_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \nu_\psi \nabla \psi dS$  su, u općem slučaju nelinearni, konvektivni i difuzivni protoci (fluksevi). Zadavanjem odgovarajućih početnih i rubnih uvjeta, problem je dobro definiran. U gornjoj jednačbi još nisu unesene nikakve aproksimacije, već je to integralna formulacija promatranog problema.

Kod diskretiziranja jednačbe (5.1) prostorni red točnosti metode mogu narušiti dvije stvari:

- diskretizacija Gaussovog operatora divergencije i aproksimacija prosječnih vrijednosti u volumenima,

- rekonstrukcija konvektivnih i difuzijskih protoka iz prosjeka u kontrolnim volumenima.

Red Gaussovog operatora divergencije određen je redom diskretizacije površinskih integrala, koje ima smisla integrirati istim redom kao i volumne integrale u određivanju prosjeka u ćelijama. U protivnom bi jedna greška dominirala.

Metoda kontrolnih volumena s jednim proračunskim čvorom po ćeliji prvog je reda točnosti, osim ako je čvor u težištu poliedarske ćelije. Stavljanjem proračunskih čvorova u težišta, aproksimacija prosječnih vrijednosti postaje drugog reda točnosti. Takva se metoda u literaturi naziva **osnovna metoda kontrolnih volumena** (engl. *basic finite volume method*).

U ovom radu će se osnovna metoda koristiti za implicitni dio formulacije metode kontrolnih volumena. Konkretno, koristiti će se centralna shema diferencije za aproksimaciju difuzijskih protoka, dok će se konvektivni član diskretizirati *uzvodnom shemom*. U formulaciji drugog reda točnosti će se i dalje koristiti jedan čvor u težištu kontrolnog volumena. Konvektivni i difuzivni član će se rekonstruirati iz interpolacije radijalnim baznim funkcijama u postupku koji se naziva *odgođena korekcija*. Na taj se način, evaluacijom interpolanta u težištima stranica ćelija podiže točnost metode i otklanjaju greške koje se standardno javljaju na nekvalitetnim mrežama. Tu se misli na greške zbog neortogonalnosti mreže koje smanjuju točnost difuzivnom članu, kao i na greške uzrokovane izvitoperenošću mreže, koje smanjuju točnost i konvektivnog i difuzivnog člana. Nadalje, takva formulacija značajno povećava točnost uz rub domene u odnosu na postupke koji se standardno koriste u osnovnoj metodi kontrolnih volumena na poliedarskoj mreži.

U formulaciji visokog reda točnosti moraju se koristiti točnije integracijske formule za računanje prosjeka u ćelijama, kao i točnije formule za integraciju konvektivnih i difuzijskih protoka kroz stranice ćelija. Da bi cijela metoda bila visokog reda potrebno je iz prosjeka u ćelijama rekonstruirati vrijednost funkcije i njezinoga gradijenta visokim redom točnosti, što omogućava generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama.

Analogno definiciji prosjeka u kontrolnim volumenima, definirati će se prosjek na stranici  $S_f$  kontrolnog volumena:

$$\mathbf{a}(S_f) \Psi(t) = \frac{1}{|S_f|} \int_{S_f} \Psi(t, \mathbf{x}(s)) dS, \quad (5.2)$$

gdje je  $\Psi$  površinska gustoća protoka (mehanizmom konvekcije ili difuzije, ili oboje) veličine  $\psi$ .

## 5.2. Osnovna metoda kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži

Integralni oblik transportne jednadžbe za intenzivnu veličinu  $\psi$  pri solenoidnom strujanju kontinuuma je:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi \, dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi \, dS = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nu_{\psi} \nabla \psi \, dS + \int_{\Omega} s_{\psi} \, dV, \quad (5.3)$$

te se takva jednadžba rješava za svaki kontrolni volumen  $\Omega$ . U osnovnoj metodi kontrolnih volumena, skalarna se varijabla  $\Psi$  razvije u Taylorov red oko svakog težišta  $\mathbf{x}_c$ , bilo volumena bilo površine, i odbace se članovi višeg reda od linearnog:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x}_c) + D\Psi(t, \mathbf{x}_c) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^T \cdot \frac{1}{2} D^2\Psi(t, \mathbf{x}_c) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{x}^3), \quad (5.4)$$

gdje je  $\Psi(t, \mathbf{x}_c)$  vrijednost varijable u težištu kontrolnog volumena ili kontrolne površine, u trenutku  $t$ . Kod volumnih integrala, skalarna varijabla je skalarno fizikalno svojstvo  $\Psi \equiv \psi$ , a u površinskim integralima to je protok  $\Psi$  skalarne varijable  $\psi$  kroz stranicu kontrolnog volumena.

Slično se razvije varijabla po vremenu. Obzirom da su u fokusu implicitne metode marširanja kroz vrijeme, razvija se oko novog trenutka  $t^n$  unazad:

$$\Psi(t^n, \mathbf{x}) = \Psi(t^o, \mathbf{x}) + \dot{\Psi}(t^n, \mathbf{x})\Delta t - \frac{1}{2}\ddot{\Psi}(t^n, \mathbf{x})(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (5.5)$$

### 5.2.1. Definicija poliedarske mreže

Diskretizacija prostorne domene rezultira proračunskom mrežom koja se sastoji od konačnog skupa **kontrolnih volumena** (**ćelija**) koji potpuno ispunjavaju domenu, a pri tome se međusobno ne preklapaju. U ovom poglavlju je definirana mreža na domeni  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Dvodimenzionalna proračunska domena definira se analogno [169, 124].

**Definicija 10 Triangulacija**<sup>1</sup>  $\mathcal{P}_\Omega$  domene  $\Omega$  sastoji se od konačnog broja<sup>2</sup> poliedarskih ćelija  $\Omega_P \in \mathcal{P}_\Omega$ ,  $P \in \{1, \dots, |\mathcal{P}_\Omega|\} := \mathcal{P}_\Omega$ , takvih da su zadovoljeni slijedeći uvjeti:

- Domena je potpuno pokrivena ćelijama,  $\Omega = \cup_{P \in \mathcal{P}_\Omega} \Omega_P$ ,
- Sve ćelije  $\Omega_P \in \mathcal{P}_\Omega$  su zatvorene, i unutrašnjost im nije prazna.
- Presjek bilo koje dvije različite ćelije ima praznu unutrašnjost.
- Rub svake ćelije  $\partial\Omega_P$  je Lipchitz-neprekidan, odnosno rub je gladak osim u skupu mjere 0.

Za triangulaciju se kaže da je **konformna** ako je svaka stranica svake ćelije ili zajednička sa nekim drugim kontrolnim volumenom (unutarnje stranice), ili je dio ruba domene  $\partial\Omega$ .

Konformnost osigurava da nema "hanging node"-ova u triangulaciji.

Skup unutrašnjih stranica neke poliedarske ćelije  $\Omega_P$  biti će označavan sa  $\mathfrak{S}_P$ . Ako je ćelija na rubu, onda nije zatvorena sa  $\mathfrak{S}_P$ , ali je zatvorena sa<sup>3</sup>  $\bar{\mathfrak{S}}_P = (\partial\Omega \cap \partial\Omega_P) \cup \mathfrak{S}_P$ .

Kontrolni volumen je konveksnog poliedarskog oblika, a ograničen je proizvoljnim brojem konveksnih poligonalnih stranica. Mreža koja se sastoji od ovako definiranih ćelija naziva se proizvoljnom nestrukturiranom mrežom.

Primjer jednog kontrolnog volumena prikazan je na slici 5.1, gdje su s  $P$  i  $N$  označena težišta dvije susjedne ćelije koje dijele osjenčanu stranicu  $f$  na kojoj je istom oznakom istaknuto težište. U težištu  $\mathbf{x}_P$  ćelije  $\Omega_P$  je **proračunski čvor**, pa vrijedi:

$$\int_{\Omega_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) dV = 0. \quad (5.6)$$

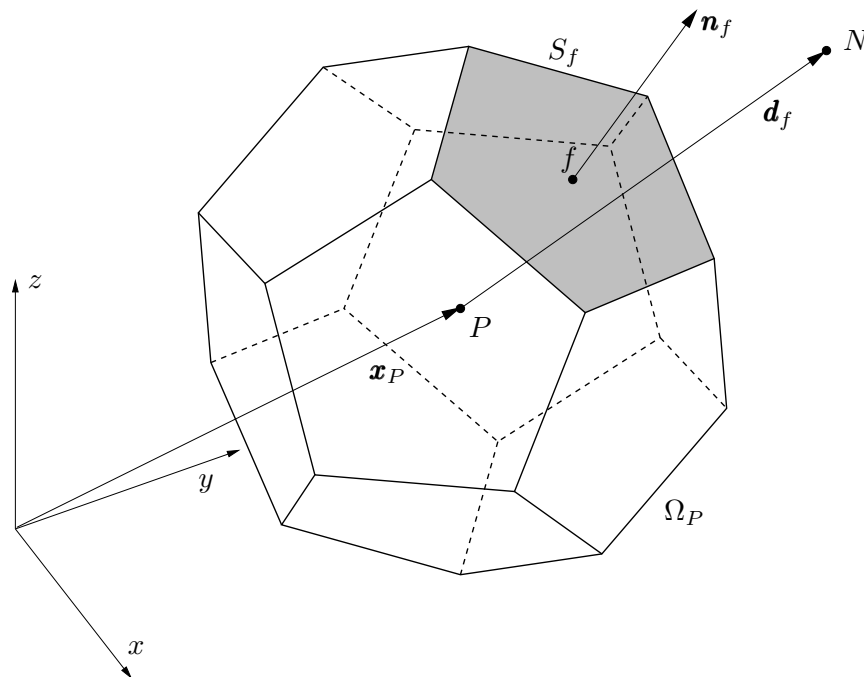
Za težište  $\mathbf{x}_f$  stranice  $S_f$ , indeksa  $f$ , vrijedi:

$$\int_{S_f} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) dS = 0. \quad (5.7)$$

<sup>1</sup> Koristiti će se termin triangulacija, iako se radi o poliedarskoj ćeliji. Formalno, kada se odabere jedan postupak raščlanjivanja poliedarske ćelije u teraedarske opisanih u [99], za danu poliedarsku mrežu, jedinstveno je određena i triangulacija  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_\Omega}$ , kao što je objašnjeno u poglavlju 5.3.2..

<sup>2</sup> Sa  $|\mathcal{P}_\Omega|$  je označen broj poliedarskih ćelija koje sačinjavaju mrežu. Za skup indeksa poliedarske mreže  $\{1, \dots, |\mathcal{P}_\Omega|\}$  također će se koristiti oznaka  $\mathcal{P}_\Omega$ , jer postoji bijekcija između poliedarskih ćelija mreže i njihovih indeksa. Također, kada će se govoriti kraće o ćeliji "P", jasno da se misli na ćeliju " $\Omega_P$ ".

<sup>3</sup> Također će sa  $\mathfrak{S}_P$  i  $\bar{\mathfrak{S}}_P$  biti označavani skupovi indeksa unutarnjih i svih stranica ćelije  $\Omega_P$ . Broj unutarnjih poligonalnih stranica te ćelije je  $|\mathfrak{S}_P|$ , a  $|\bar{\mathfrak{S}}_P|$  je broj poligona koji zatvara ćeliju  $P$ .



Slika 5.1: Poliedarski kontrolni volumen.

Za definiciju proračunske mreže koristi se **adresiranje po stranicama ćelija** (engl. *face addressing*). Takvu definiciju predložio je Weller [98], a sastoji se iz slijedećih elemenata:

- **Liste vrhova**, gdje je vrh definiran prostornom koordinatom. Oznaka vrha odgovara indeksu vrha u listi.
- **Liste poligonalnih stranica**, gdje je stranica definirana listom indeksa pripadajućih vrhova.
- **Liste ćelija**, gdje je ćelija definirana listom indeksa pripadajućih stranica.
- **Liste rubnih zona**, gdje je svaka rubna zona definirana listom indeksa pripadajućih rubnih stranica.

Liste ćelija, stranica i rubnih zona definiraju topologiju mreže, a kada se topologiji dodaju prostorne koordinate vrhova, mreža dobiva geometrijski oblik. U listi stranica, uvijek su prve **unutarnje stranice**, pa su poslje stranice svih rubnih zona, onim redoslijedom kojim su indeksirane rubne zone. Za svaku se unutarnju stranicu može definirati ćelija koja ju *posjeduje* i ćelija koja joj je *susjedna*. Ćelija koja posjeduje stranicu se

u listi ćelija nalazi prije ćelije koja je susjedna stranici. Redoslijed unutarnjih stranica u listi rezultat je sljedećeg postupka popunjavanja liste: kreće se od prve ćelije iz koje se uzimaju stranice s rastućim indeksom susjednih ćelija. Postupak se ponavlja za sve ćelije, pri čemu se izostavljaju one stranice koje su već u posjedu ćelije s manjim indeksom. Orijentacija stranice definirana je tako da je pripadajuća normala usmjerena prema susjednom kontrolnom volumenu. Stranice koje su uz rub pripadaju ćelijama koje su uz rub, a normala je vanjska. Na slici 5.1, kontrolni volumen  $P$  posjeduje stranicu  $f$ , a kontrolni volumen  $N$  joj je susjedan.

Problem koji otežava računanje geometrijskih svojstava poliedarskih kontrolnih volumena i pripadajućih poligonalnih stranica je što stranice općenito nisu ravne. Zbog toga se uvodi pristup kod kojega se stranice definiraju rastavljanjem na trokute [99]<sup>4</sup>.

### 5.2.2. Diskretizacija prostornih integrala

Integrirajući (5.4) po području  $\Omega$ , poštujući pretpostavku da je  $\Psi$  linearna funkcija a  $\nabla\Psi$  konstantan u  $\Omega$ , slijedi:

$$\int_{\Omega} \Psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Psi(t, \mathbf{x}_c) \int_{\Omega} d\mathbf{x} + \nabla\Psi(t, \mathbf{x}_c) \cdot \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) d\mathbf{x} = \Psi(t, \mathbf{x}_c)|\Omega|. \quad (5.8)$$

Tako za volumni integral vrijedi po ćeliji  $\Omega_P$ :

$$\mathfrak{A}(\Omega_P) \psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} \psi(t, \mathbf{x}) dV \approx \psi(t, \mathbf{x}_{c_P}).$$

Slično vrijedi za površinski integral po stranicama kontrolnog volumena:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_P} \Psi(\mathbf{x}(s)) dS &= \sum_{f \in \tilde{\mathfrak{S}}_P} \int_{S_f} \Psi(\mathbf{x}(s)) dS = \sum_{f \in \tilde{\mathfrak{S}}_P} \mathfrak{a}(S_f) \Psi(\mathbf{x}(s)) |S_f| \\ &\approx \sum_{f \in \tilde{\mathfrak{S}}_P} \Psi_f |S_f|, \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdje je  $|S_f|$  površina stranice indeksa  $f$ , a  $\Psi_f = \Psi(t^n, \mathbf{x}_{c_f})$  vrijednost skalarnog protoka (fluksa)  $\Psi$ , skalarne varijable  $\psi$ , kroz težište  $\mathbf{x}_f$  stranice ćelije.

<sup>4</sup> U OpenFOAMu je u osnovnoj metodi uvijek rastav u kojem se dodaje točka u težištu vrhova stranice.

## Izvorski član

Izvorski član sadrži sve ono što se ne može svrstati u konvektivni, difuzijski ili vremenski član. Izvorski član je u općem slučaju ne linearna funkcija zavisne varijable  $\psi$ , pa ga je prije diskretizacije potrebno linearizirati oko prosječne vrijednosti  $\psi_P$  u svakoj ćeliji:

$$\mathfrak{A}(\Omega_P) s_\psi \approx \mathfrak{A}(\Omega_P) (s_{\psi_c} + s_{\psi_p} \psi), \quad (5.10)$$

gdje je  $s_{\psi_c}$  konstantni, a  $s_{\psi_p}$  proporcionalni član u ćeliji  $P$ . Preciznije,  $\mathfrak{A}(\Omega_P) s_{\psi_c}$  je prosječna volumna gustoća izvora veličine  $\psi$ , a  $\mathfrak{A}(\Omega_P) s_{\psi_p}$  je prirast prosječne gustoće izvora sa prirastom prosjeka  $\mathfrak{A}(\Omega_P) \psi$  u ćeliji  $P$ . Poznato je [140] da ako  $s_{\psi_p}$  ima negativnu vrijednost, diže dijagonalnu dominantnost matrice u implicitnoj formulaciji, što je povoljno pogotovo ako se linearni sustav rješava Gauss-Seidlovim ili Jacobievim iterativnim postupkom. Takva linearizacija se koristi i u OpenFOAM-u [98].

Prema formuli za volumni integral po ćeliji (5.8), izvorski član je:

$$\mathfrak{A}(\Omega_P) s_\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} s_\psi dV \approx (s_{\psi_c} + s_{\psi_p} \psi)_P. \quad (5.11)$$

## Difuzijski protok

Primjenom (5.9) difuzijski protok se može aproksimirati kao:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_P} (\mathbf{n} \cdot \mu_\psi \nabla \psi)(\mathbf{x}) dS &= \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathfrak{a}(S_f) (\mathbf{n} \cdot \mu_\psi \nabla \psi) |S_f| \\ &\approx \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} (\mathbf{n} \cdot \mu_\psi \nabla \psi)_f |S_f|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

gdje je  $(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)_f$  derivacija polja  $\psi$  u smjeru normale  $\mathbf{n}$ . Na uniformnoj ortogonalnoj mreži se ta derivacija može izračunati drugim redom točnosti iz vrijednosti u centrima dvije susjedne ćelije **centralnom shemom diferenciranja**:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)_f = \frac{\psi_N - \psi_P}{|\mathbf{d}_f|}, \quad (5.13)$$

gdje je  $\mathbf{d}_f = \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ . Ovdje su  $\mathbf{x}_P$  i  $\mathbf{x}_N$  vektori težišta promatrane i njoj susjedne ćelije.

Na neortogonalnim mrežama se u osnovnoj metodi obično radi *neortogonalna korekcija* na način koji je opisan u [98], što u ovom radu nije slučaj jer se korekcija radi pomoću interpolacije radijalnim baznim funkcijama.



## Konvektivni protok

Integracija konvektivnog protoka provodi se primjenom (5.9):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_P} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi) (\mathbf{x}) \, dS &= \sum_{f \in \tilde{\mathcal{E}}_P} \mathbf{a}(S_f) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi) |S_f| \\ &\approx \sum_{f \in \tilde{\mathcal{E}}_P} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi)_f |S_f|, \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdje se konvektivni protok računa drugim redom točnosti  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi)_f \equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi) (\mathbf{x}_{c_f})$ .

Vrijednost zavisne varijable  $\psi$  na stranicama se računa primjenom interpolacijske sheme za konvekciju, iz vrijednosti u težištima susjednih kontrolnih volumena.

Tipična shema drugog reda, za interpolaciju i diferenciranje na proizvoljnoj ne strukturiranoj mreži, je ona kod koje se vrijednost na stranici računa samo iz težišta dvije susjedne ćelije, koje tu stranicu dijele. Dakle shema diskretizacije konvekcije se za osnovnu metodu kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži može zapisati, za svaku stranicu, u obliku:

$$\psi_f = \psi_f(\psi_P, \psi_N), \quad (5.15)$$

gdje su  $\psi_P$  i  $\psi_N$  vrijednosti varijable  $\psi$  u težištima ćelija kojima je stranica  $f$  zajednička.

Kod **linearne sheme**, linearno se interpolira vrijednost između dva susjedna centra, a vrijednost na stranici računa se iz te interpolacije. Odbačeni član je drugog reda, te je i takva shema drugog reda točnosti, no linearna shema ne garantira monotonost rješenja.

S druge strane shema koja garantira ograničenost je ona kod koje se vrijednost interpolirana na stranicu uzima iz onog centra ćelije iz kojeg fluid dotiče u tu stranicu. To je **uzvodna shema** koja je prvog reda točnosti. Vrijednost varijable  $\psi$  na stranici  $f$  određuje se na osnovi smjera strujanja:

$$\psi_f = \begin{cases} \psi_P & \text{za } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_f \geq 0 \\ \psi_N & \text{za } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_f < 0 \end{cases}.$$

Uzvodna shema diskretizacije je prvog reda točnosti, a njenim korištenjem uvodi se u rješenje numerička difuzija koja stabilizira rješenje, no značajno narušava točnost u području velikih gradijenata zavisne varijable.

## Proračunska molekula

Skup kontrolnih volumena pomoću kojega se računa konvektivno-difuzni protok naziva se **proračunska molekula**, koja će za ćeliju  $P$  biti označena sa  $\mathfrak{M}_P \equiv \mathfrak{M}(\Omega_P)$ .

Molekula neke ćelije, koja se osim same ćelije sastoji od samo njenih direktnih susjeda (onih s kojima ćelija dijeli stranicu, ili simpleks stranice, nakon raščlanjivanja poligonalne stranice), nazivati će se **linearna molekula**. U tom slučaju može se koristiti *adresiranje po stranicama*, pa će se tada molekula označavati istom oznakom kao i unutarnje stranice  $\mathfrak{M}_P \equiv \mathfrak{S}_P$  proizvoljne ćelije  $P$ . Linearna molekula je dovoljna da se na poliedarskoj mreži konstruira osnovna metoda kontrolnih volumena drugog reda točnosti, ako je proračunski čvor u težištu ćelije [50, 62, 98, 100].

### 5.2.3. Vremenska diskretizacija

Integrirajući opću transportnu jednadžbu (5.3) po svakom KV, uz (5.14), (5.12) i (5.11), slijedi njen poludiskretizirani oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{A}(\Omega_P) \psi(t, \mathbf{x}) &\approx \frac{\partial}{\partial t} \psi(t^n, \mathbf{x}_P) = - \sum_{f \in \bar{\mathfrak{S}}_P} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi)_f |S_f| \\ &\quad + \sum_{f \in \bar{\mathfrak{S}}_P} (\mathbf{n} \cdot \mu_\psi \nabla \psi)_f |S_f| \\ &\quad + (s_{\psi c} + s_{\psi p} \psi)_P, \end{aligned}$$

ili kraće zapisano:

$$\partial_t \psi(t, \mathbf{x}_P) = F(t). \quad (5.16)$$

U ovom radu se promatra prostorna diskretizacija implicitne formulacije, te se je vremenski član diskretizira bezuvjetno stabilnom implicitnom Eulerovom formulom (**Backward Differencing Formulom** (BDF)) kako bi se odvojio utjecaj prostorne od vremenske sheme. Za svaku ćeliju u novom vremenskom trenutku  $t^n$  vrijedi formula, za statičku mrežu kontrolnih volumena i konstantni vremenski korak  $\Delta t$ :

$$\frac{\psi(t^n, \mathbf{x}_P) - \psi(t^o, \mathbf{x}_P)}{\Delta t} = F(t^n), \quad (5.17)$$

gdje je sa  $t^o$  označena vrijednost u prethodnom vremenskom trenutku. Konačni oblik jednadžbe u osnovnoj metodi kontrolnih volumena, koja se rješava za svaku ćeliju, u diskretiziranom obliku je:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_P^n - \psi_P^o}{\Delta t} &= \frac{1}{|\Omega_P|} \sum_{f \in \bar{\mathfrak{S}}_P} (\mathbf{n} \cdot (\mu_\psi \nabla \psi^n - \mathbf{v}^{n-1} \psi^n))_f |S_f| \\ &\quad + (s_{\psi c}^{n-1} + s_{\psi p}^{n-1} \psi^n)_P, \end{aligned} \quad (5.18)$$

gdje  $(\cdot)^{n-1}$  označava vrijednosti iz prethodne iteracije. U ovom radu se sa  $(\cdot)^n$  označava i novi vremenski trenutak, i nova iteracija implicitnog rješavača.

### 5.2.4. Primjena rubnih uvjeta

#### Dirichletov rubni uvjet

Zadana je prosječna vrijednost varijable  $\psi$  na rubnoj stranici  $b$ .

- **Konvektivni član.**  $\psi$  se uvrštava direktno u (5.14), pa je diskretizacija drugog reda točnosti:

$$\Psi_b^k |S_b| = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi)_b |S_b|.$$

- **Difuzijski član.** Derivaciju u smjeru normale računa se na rubnoj stranici  $b$  prvim redom točnosti:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)_b \approx \frac{\psi_b - \psi_P}{|\mathbf{d}_b|},$$

gdje  $\approx$  označava da se red točnosti ruši sa drugog na prvi. Tada je konačna diskretizacija, prema izrazu (5.12):

$$\Psi_b^d |S_b| \approx (\mu_\psi)_b \frac{\psi_b - \psi_P}{|\mathbf{d}_b|} |S_b|.$$

#### Neumannov rubni uvjet

Zadana je derivacija u smjeru normale zavisne varijable  $\psi$  na rubnoj stranici  $b$ :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)_b = g_b. \quad (5.19)$$

Primjena ovog uvjeta ovisi o tome da li se radi o konvektivnom ili difuzijskom članu transportne jednadžbe.

- **Konvektivni član.** Za konvektivni član vrijednost zavisne varijable na rubnoj stranici računa se prvim redom točnosti:

$$\psi_b \approx \psi_P + |\mathbf{d}_n| g_b,$$

što znači da konvektivni član na rubnoj stranici ima slijedeći oblik:

$$\Psi_b^k \approx (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_b (\psi_P + |\mathbf{d}_n| g_b).$$

- **Difuzijski član,** diskretiziran je prema izrazu (5.19) drugim redom točnosti:

$$\Psi_b^d = (\mu_\psi)_b g_b.$$

### 5.2.5. Sustav linearnih algebarskih jednadžbi

Nakon linearizacije, potrebno je riješiti jednadžbu oblika:

$$a_P\psi_P + \sum_{M \in \mathfrak{M}_P} a_M\psi_M = b_P, \quad (5.20)$$

za svaki kontrolni volumen, gdje  $M$  označava bliske susjede koji su u proračunskoj molekuli  $\mathfrak{M}_P$  ćelije  $P$ . Molekula  $\mathfrak{M}_P$  u općem slučaju ovisi o tipu jednadžbe, o redu i tipu diskretizacije promatranog problema, kao i položaju ćelije  $P$  u proračunskoj domeni.

Jednadžba (5.20) dobiva se za svaku ćeliju u mreži pa se u konačnici, diskretizacijom opće transportne jednadžbe (5.18) za svako polje, dobiva sustav algebarskih jednadžbi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdje je  $\mathbf{A}$  matrica sustava koja na dijagonali ima koeficijente  $a_P$ , a izvan dijagonale koeficijente  $a_M$ . Vektor  $\mathbf{x}$  sadrži vrijednosti zavisne varijable  $\psi$ , svih ćelija, a vektor desne strane  $\mathbf{b}$  osim rubnih uvjeta sadrži i članove koji se tretiraju eksplicitno.

Matrica koeficijenata  $\mathbf{A}$  je **slabo popunjena** (engl. *sparse*), u kojoj je većina koeficijenata jednaka nuli. Struktura popunjenosti matrice  $\mathbf{A}$  ovisi o tipu transportne jednadžbe, topologiji proračunske mreže, izgledu proračunske molekule i načinu indeksiranja ćelija. Ukoliko diskretizirana opća konvektivno-difuzijska transportna jednadžba ne sadrži konvekciju, matrica  $\mathbf{A}$  će biti simetrična, u protivnom je nesimetrična.

Takav sustav se može riješiti na više načina, od kojih se svi mogu svrstati u dvije kategorije: **direktne** i **iterativne** metode. Direktne metode iznalaze rješenje linearnog sustava algebarskih jednadžbi u konačnom broju aritmetičkih operacija. Iterativne metode počinju od neke početne aproksimacije i "popravljaju" rješenje iterativnim postupkom, dok ga ne dovedu unutar određene tolerancije.

Iako su matrice proizašle iz diskretizacije oblika (5.20) slabo popunjene, ako postoji difuzija njihov inverz je puna matrica. Moderne direktne metode uvažavaju slabu popunjenost, ali su primjerene za puno manje mreže od većine iterativnih metoda. Iterativne metode su to skuplje koliko je "lošija" matrica za koju rješavaju linearni sustav. Iterativna metoda koja je primjerena općenitim matricama je GMRES [155], no i ona je vrlo skupa te se obično koriste jeftinije metode, koje koriste određena svojstva matrice proizišle iz diskretizacijskog postupka (5.20).

U osnovnoj metodi kontrolnih volumena, molekula  $\mathfrak{M}_P$  sastoji se samo od direktnih susjeda ćelije  $P$ , s kojima  $P$  dijeli stranicu. Takva će se (linearna) molekula u daljnjem

tekstu označavati sa  $\mathfrak{S}_P$ . U tom slučaju može se definirati shema diskretizacije koja će stvarati dijagonalno dominantnu matricu, što je povoljno jer se tada može koristiti svaki iterativni postupak, od jednostavnih kakvi su Jacobiev ili Gauss-Seidelov, preko algebarskog multigrada do rješavača za linearne sustave iz prostora Krilova.

Za matricu se kaže da je dijagonalno jednaka ako joj je iznos sume nedijagonalnih elemenata jednaka po iznosu dijagonalnom koeficijentu  $|a_P| = \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} |a_S|$ . Da bi matrica bila dijagonalno dominantna potrebno je da barem u jednom retku bude  $|a_P| > \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} |a_S|$ , što u metodi kontrolnih volumena osigurava ugradnja rubnih uvjeta.

Također, na linearnoj molekuli postoji jednostavni kriterij za konstrukciju monotone konveksijske sheme. On se svodi na uvjet da koeficijenti prema susjednim ćelijama ne smiju biti negativni <sup>5</sup>, pa će se takve sheme nazivati i **pozitivne sheme**<sup>6</sup>. Problem je što koeficijenti ovise o rješenju u općem slučaju, konkretno ovise barem o brzini, pa shema koja čuva monotonost mora ovisiti o rješenju. U tom smislu ona je nelinearna, pa će i linearna rješenja trebati tražiti iterativno.

Konveksijska shema koja je uvijek pozitivna je uzvodna (engl. *upwind*) shema, pa je uobičajeno implicitno diskretizirati konvekciju upravo uzvodnom shemom, a eksplicitno ju korigirati sa shemom višeg reda tako da se ne naruši monotonost rješenja.

Konvergencija većine iterativnih rješavača je tim veća, što je veća dijagonalna dominantnost matrice sustava. Iz tog razloga se prilikom diskretizacije koriste postupci koji podižu dijagonalnu dominantnost matrice. Prilikom linearizacije izvorskog člana, ako je predznak uz koeficijent proporcionalnosti  $S_p < 0$  on doprinosi dijagonalnoj dominantnosti [138], te se tretira implicitno. U obratnom slučaju, kada je  $S_p \geq 0$ , taj član se diskretizira eksplicitno.

Prilikom diskretizacije jednadžbe količine gibanja neviskoznog fluida, uzvodna shema stvara dijagonalno jednaku matricu sa dijagonalnim koeficijentom  $a_P \neq 0$  i za stacionarnu formulaciju. Bilo koja druga shema za konvekciju ne proizvodi nužno pozitivne susjedne koeficijente, kao što i ne garantira  $a_P \neq 0$ . Stacionarni neviskozni tok predstavlja jedan od najvećih problema za računanje. Kod konvektivno-difuzijskog problema,

<sup>5</sup> Ovo je dovoljan, ne i nužan uvjet za monotonost shema na linearnoj molekuli.

<sup>6</sup> Termin "pozitivne sheme" definira se u literaturi obično malo drugačije, no u implicitnoj formulaciji osnovne metode kontrolnih volumena te su dvije definicije ekvivalentne. Kod eksplicitnih formulacija potrebno je usvojiti definiciju kakva je uvedena u [189, 91], te se tada zahtjev za pozitivnim shemama očituje i u CFL (Courant-Friedrich-Lewy) uvjetu [20]. Zainteresirani čitatelj se upućuje na udžbenike [189, 91].

kada se koristi centralna shema za konvekciju (linearna interpolacija), monotonost je osigurana samo za male vrijednosti Pecletovih brojeva, pa se i u ovom slučaju konvekcija implicitno diskretizira uzvodnom shemom, a eksplicitno korigira do diskretizacije visoke razlučivosti, tako da se čuva monotonost.

Iz navedenih razloga su Khosla i Rubin [105] predložili postupak, koji se naziva **odgođena korekcija** (engl. *deferred correction*), koji se koristi u svim implicitnim shemama visoke razlučivosti. U njemu se konvekcija tretira implicitno uzvodno, a stabilizirana korekcija nekom shemom višeg reda izvodi se na osnovu rješenja iz prethodne Picardove (vanjske) iteracije. Tek odgovarajuća implementacija eksplicitne korekcije osigurava monotonost.

Difuzijski član je manji problem, obzirom da je difuzija opisana simetričnim pozitivno definitnim operatorom, pa na kvalitetnim mrežama stvara simetričnu pozitivno definitnu matricu. Na linearnim molekulama, gdje se difuzija implicitno gotovo uvijek računa centralnom shemom diferencija, ona stvara dijagonalno dominantnu matricu. Pri tome je matrica dijagonalno jednaka u recima koji odgovaraju unutaršnjim ćelijama, a dijagonalna dominantnost postiže se ugradnjom rubnih uvjeta obzirom da oni idu u vektor  $\mathbf{b}$  na desnu stranu. Kada se radi o diskretizaciji višeg reda, pa molekula sadrži više od samo direktnih susjeda, diskretizacija difuzije opet stvara simetričnu pozitivno definitnu matricu koja ne stvara problem za jednostavne iterativne linearne rješavače kakav je Gauss-Seidelov iako matrica nije dijagonalno dominantna ili M-matrica.

Vremenska diskretizacija BDF shemama očituje se u dijagonalnom koeficijentu, kojim se podiže dijagonalna dominantnost matrice. Ostatak vremenskog člana, sa vrijednostima promatrane ćelije iz prethodnih vremenskih trenutaka, je u vektoru na desnoj strani linearnog sustava. Vremenski član to više podiže dijagonalnu dominantnost što je manji vremenski korak.

Da se osigura ili ubrza konvergencija, a što je posebno važno u stacionarnim proračunima, jednačbe se implicitno podrelaksiraju [138], jer to podiže dijagonalnu dominantnost matrice. Ako je polazna jednačba za ćeliju  $P$  bila:

$$a_P\psi_P + \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_S\psi_S = b_P, \quad (5.21)$$

dijagonalna dominantnost podiže se podrelaksacijskim koeficijentom  $\alpha$  na slijedeći način:

$$\frac{a_P}{\alpha}\psi_P^n + \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_S\psi_S^n = \frac{1-\alpha}{\alpha}a_P\psi_P^{n-1} + b_P, \quad (5.22)$$

gdje je  $\psi_P^n$  rješenje u novoj, a  $\psi_P^{n-1}$  u prethodnoj **vanjskoj iteraciji**. Nakon konvergencije, kada je  $\psi_P^n = \psi_P^{n-1}$ , modificirana jednažba svodi se na polaznu jednažbu. Koeficijent  $\alpha$  uzima se takav da vrijedi  $0 < \alpha \leq 1$ .

Kada se radi o stacionarnom neviskoznom toku, ako se koristi linearna interpolacija za konvekciju dijagonalni koeficijent  $a_P = 0$ , pa sama podrelaksacija nije dovoljna da se osigura konvergencija. Također je u postupku povezivanja brzine i tlaka potrebno izračunati  $a_P^{-1}$ , pa se takav problem ne može računati stacionarno uz linearnu shemu za konvekciju. Ako se problem rješava nestacionarno biti će  $a_P \neq 0$  i za linearnu interpolaciju, pa se tako može marširati kroz vrijeme do stacionarnog rješenja, iako neće osigurati monotonost rješenja. Uzvodna shema će osigurati  $a_P \neq 0$  i monotono rješenje, ali unosi značajnu difuziju, pa numeričko rješenje neće odgovarati matematičkom modelu neviskoznog toka. Konvergencija prema stacionarnom rješenju je obično spora, jer rješenje nelinearnog problema dugo oscilira u nedostatku prigušenja. Konvergenciju ubrzava podrelaksacija.

U ovom radu, za slučaj simetrične matrice linearni sustav će se rješavati pomoću iterativne metode **konjugiranih gradijenata**, koju su predložili Hestens i Steifel [88]. U njoj se rješenje linearnog problema iznalazi u najviše onoliko iteracija koliko ima jednažbi u sustavu. Brzina konvergencije je obrnuto proporcionalna uvjetovanosti matrice, i može se značajno poboljšati predkondicioniranjem. Preciznije, za simetrične matrice će se u ovom radu koristiti metoda konjugiranih gradijenata predkondicionirana sa **nepotpunom faktorizacijom Choleskog**, kao što je opisao Jacobs [97]. U slučaju nesimetrične matrice, linearni će se sustav rješavati primjenom Van der Vorstove [51] Bi-CGSTAB metode.

### 5.2.6. Diskretizacija Navier-Stokesovih jednažbi

Promatra se strujanje nestlačivog Newtonovog fluida, opisanog Navier-Stokesovim jednažbama u integralnom obliku primjerenom metodi kontrolnih volumena. Navier-Stokesove jednažbe podrazumijevaju jednažbu količine gibanja za nestlačivi tok newtonovskog fluida:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \mathbf{v} dV + \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} dS = \oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \nu \nabla \mathbf{v} dS - \int_{\Omega_P} \frac{1}{\rho} \nabla p dV, \quad (5.23)$$

i jednadžbu kontinuiteta:

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = 0, \quad (5.24)$$

koja predstavlja kinematičko ograničenje polja brzine. Problem stvara činjenica da ne postoji jednadžba za tlak, te ju je potrebno na neki način izvesti iz jednadžbe kontinuiteta. U osnovnoj metodi kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži centriranoj u ćelijama to se provodi u duhu Rhie-Chow [149] postupka. U tu svrhu, prvo je potrebno diskretizirati jednadžbu količine gibanja (5.23).

Kod jednadžbe količine gibanja, konvektivni član zbog nelinearnosti zahtjeva posebnu pozornost. Zbog toga ga je potrebno sukcesivno linearizirati, pa se Picardovim iteracijama traži rješenje nelinearnog problema. Prema jednadžbi (5.23) linearizacija se može zapisati u obliku:

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{n-1} \mathbf{v}^n \, dV \approx \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_f^{n-1} \mathbf{v}_f^n |S_f| = \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \dot{Q}_f^{n-1} \mathbf{v}_f^n \quad (5.25)$$

gdje je <sup>7</sup>  $\dot{Q}_f$  volumni protok kroz stranicu  $f$ . Pri tome je važno da volumni/maseni protoci kroz stranice ćelija zadovoljavaju diskretnu jednadžbu kontinuiteta  $\sum_f \dot{Q}_f^{n-1} = 0$ , pogotovo kad se računa stacionarni neviskozni tok, jer to osigurava dijagonalnu jednakost redaka matrice koji odgovaraju unutarnjim kontrolnim volumenima.

Linearizacija ne smije utjecati na konačno rješenje nelinearnog problema. Kod nestacionarnih proračuna moguća su dva pristupa. Prvi je već prikazani Picardov postupak. U drugom, koji je opravdan ukoliko je vremenski korak dovoljno malen, konvekcija se linearizira samo jednom u vremenskom koraku i dobiveno rješenje smatra se rješenjem nelinearnog sustava. To se opravdava argumentom da se u dva dovoljno bliska uzastopna vremenska trenutka rješenje dovoljno malo mijenja, pa linearizirani problem dobro opisuje polazni nelinearni problem <sup>8</sup>. U situacijama u kojima je važno izračunati točniju evoluciju polja, potrebno je ionako koristiti mali vremenski korak.

Nakon prostorne i vremenske diskretizacije jednadžbe količine gibanja, za svaku ćeliju

<sup>7</sup> Za stlačivo strujanje protoci su maseni,  $\dot{m}_f = \mathbf{n}_f \cdot (\rho \mathbf{v})_f |S_f| = (\rho \dot{Q})_f$ . Kada se radi o nestlačivom strujanju nehomogene gustoće, za koje vrijedi  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  i  $\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$ , gustoća se obično stavi uz gradijent tlaka,  $1/\rho \nabla p$ . Za homogeni tok je  $p := \rho/\rho$

<sup>8</sup> Tako radi PISO [96] algoritam, te se on koristi za nestacionarne simulacije. Za stacionarne simulacije koristi se SIMPLE [139] algoritam za povezivanje brzine i tlaka.



dobiva se linearna algebarska jednadžba:

$$a_{vP} \mathbf{v}_P^n + \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_{vS} \mathbf{v}_S^n = \mathbf{r}_{vP} - (\nabla p)_P^{n-1}, \quad (5.26)$$

u kojoj koeficijenti  $a_{vP}$  i  $a_{vS}$  ovise o polju brzine iz prethodne iteracije. U vektoru  $\mathbf{r}_{vP}$  su i rubni uvjeti jednadžbe količine gibanja, odnosno za stranice koje omeđuju ćeliju  $P$ , a nemaju susjeda u unutrašnjosti domene  $\mathfrak{S}_P$ . Jednadžba (5.26) zapisana je u tzv. poludiskretiziranom obliku, jer u njoj nije diskretiziran gradijent tlaka  $(\nabla p)_P^{n-1}$ , koji je uzet iz prethodne iteracije Picardovog postupka. Taj gradijent tlaka može se diskretizirati na dva načina, ili računanjem prosječnog gradijenta tlaka po kontrolnom volumenu, ili svođenjem na površinski integral pomoću teorema Gauss-Ostrogradskog. U ovom radu se u tu svrhu koristi teorem Gauss-Ostrogradskog, jer je taj pristup dosljedan s konzervativnošću metode kontrolnih volumena. Naime,  $\int_{\Omega_P} \nabla p \, dV$  je ukupna sila na kontrolni volumen uslijed gradijenta tlaka, a svođenjem na površinske integrale ta sila se računa konzervativno za svaki kontrolni volumen, grupu kontrolnih volumena ili cijelu proračunsku domenu. Sada, diskretna jednadžba količine gibanja ima oblik:

$$a_{vP} \mathbf{v}_P^n + \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_{vS} \mathbf{v}_S^n = \mathbf{r}_{vP} - \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} p_f^{n-1} \mathbf{n}_f |S_f|, \quad (5.27)$$

gdje je  $p_f^{n-1}$  prosječni tlak na stranici  $f$  kontrolnog volumena  $P$ .

### 5.2.7. Jednadžba za tlak

Inherentni problem matematičkog modela strujanja baziranog na tlaku, koji je prirodna formulacija za nestlačivo strujanje, je što za tlak ne postoji transportna jednadžba. Jednadžba za tlak izvodi se iz jednadžbe kontinuiteta. U metodi kontrolnih volumena, na proizvoljnim poliedarskim mrežama centriranim u ćelijama, u tu se svrhu koristi polu-diskretni oblik jednadžbe količine gibanja (5.26):

$$a_{vP} \mathbf{v}_P^n + \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_{vS} \mathbf{v}_S^n = \mathbf{r}_{vP} - (\nabla p)_P.$$

Nakon definiranja operatora  $H_P$  za ćeliju  $P$ , čije je djelovanje na diskretno polje brzine  $\mathbf{u}$ :

$$H_P(\mathbf{u}^n) = - \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} a_{vS} \mathbf{v}_S^n + \mathbf{r}_{vP}, \quad (5.28)$$

polu diskretna jednadžba količine gibanja postaje:

$$a_P \mathbf{v}_P^n = H_P(\mathbf{u}^n) - (\nabla p)_P, \quad (5.29)$$

gdje je kraće označeno  $a_P \equiv a_{vP}$ . Jednadžba (5.29) dobivena je iz integralnog oblika jednadžbe količine gibanja ćelija  $P$ , diskretizirana opisanim postupkom, te podijeljena s volumenom  $|\Omega_P|$ . Na MAC konfiguraciji mreža<sup>9</sup> proračunski čvorovi za brzinu se nalaze na stranicama ćelija za tlak, tamo gdje su i potrebni za određivanje protoka u jednadžbi za tlak. Kod mreža centriranih u ćelijama, u proceduri koja je u duhu Rhie-Chow postupka, prilikom rješavanja jednadžbe za tlak stvori se privid da postoje proračunski čvorovi za brzinu na stranicama, tako da se interpolira diskretiziranu jednadžbu količine gibanja iz pravih čvorova. Drugim riječima interpolira se na stranice ćelija djelovanje matricnih koeficijenta željenih operatora jednadžbe količine gibanja na čvorove u proračunskoj molekuli, iz težišta ćelija. Na taj način se dobiva pomaknuta mreža za jednadžbu količine gibanja prilikom računanja tlaka, pa se gradijent tlaka kojim se nameće solenoidnost evaluira iz dva susjedna čvora, a brzina koja je izvor u Poissonovoj jednadžbi iz ostatka prointerpolirane diskretne jednadžbe količine gibanja. Fizikalno takav postupak nema smisla, jer nema smisla ni govoriti recimo o centralnom koeficijentu  $a_{Pf}$  na stranici  $f$  obzirom da tamo nema ćelije, pa kontroverzu stvara što se u tom postupku interpoliraju ekstenzivne<sup>10</sup> veličine [106]. Takav postupak se međutim široko koristi jer je jednostavan i daje rezultate.

Član  $H_P(\mathbf{u}^n)$  sastoji se od dva dijela [98]. Prvi je "transportni dio", koji se sastoji od produkata matricnih koeficijenata prema susjednim ćelijama i prosječnih brzina u susjednim ćelijama. Drugi je "izvorski dio" u kojemu su članovi od vremenske diskretizacije, rubnih uvjeta, i svi ostali članovi koji se tretiraju eksplicitno, osim gradijenta tlaka.

Diskretna jednadžba kontinuiteta je:

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^n \approx \sum_{f \in \overline{\mathcal{S}}_P} \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_f^n |S_f| = 0. \quad (5.30)$$

Iz jednadžbe (5.29) može se izraziti brzina  $\mathbf{v}$  u ćeliji  $P$ :

$$\mathbf{v}_P^n = \frac{H_P(\mathbf{u}^n)}{a_P} - \frac{1}{a_P} (\nabla p)_P. \quad (5.31)$$

<sup>9</sup> Konfiguracije mreža opisane su u poglavlju A.2.1..

<sup>10</sup> Ekstenzivne su one veličine koje ovise o dimenziji i obliku kontrolnog volumena.

Sada se brzine na unutarnjim stranicama ćelija dobivaju linearnom interpolacijom brzina iz samih ćelija (5.31):

$$\mathbf{v}_f^n = \left( \frac{H_P(\mathbf{u}^n)}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f. \quad (5.32)$$

gdje će se  $(\nabla p)_f$  računati sad iz susjednih čvorova prave mreže, a u pseudo-mreži korigirati brzinu  $\mathbf{v}_f$  do solenoidnosti.

Diskretna jednadžba za tlak svake ćelije dobiva se uvrštavanjem jednadžbe (5.32) u (5.30), te npr. za svaku unutarnju ćeliju, ili ćelije uz rub s homogenim Neumannovim rubnim uvjetom, ona je:

$$\sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathbf{n}_f \cdot \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f^n |S_f| = \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathbf{n}_f \cdot \left( \frac{H_P(\mathbf{u}^n)}{a_P} \right)_f |S_f|.$$

Slijede diskretne Navier-Stokesove jednadžbe na mreži centriranoj u ćelijama, u formulaciji temeljenoj na tlaku, gdje za svaku unutarnju ćeliju vrijedi:

$$a_P \mathbf{v}_P = H_P(\mathbf{u}^n) - \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} p_f^{n-1} \mathbf{n}_f |S_f|, \quad (5.33)$$

$$\sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathbf{n}_f \cdot \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f^n |S_f| = \sum_{f \in \mathfrak{S}_P} \mathbf{n}_f \cdot \left( \frac{H_P(\mathbf{u}^n)}{a_P} \right)_f |S_f| + r_p, \quad (5.34)$$

gdje su u  $r_p$  rubni uvjeti od jednadžbe za tlak, oni koji nisu homogeni Neumannovi, i/ili odgođene korekcije gradijenta tlaka u Laplaceovom operatoru.

Volumni protok  $\dot{Q}_f^n$ , kroz unutarnju stranicu  $f$ , računa se iz jednadžbe (5.32):

$$\dot{Q}_f^n = \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_f |S_f| = \mathbf{n}_f \cdot \left( \left( \frac{H_P(\mathbf{u}^n)}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f^n \right) |S_f|. \quad (5.35)$$

Ovako izračunati protok zadovoljiti će jednadžbu kontinuiteta ako je zadovoljena jednadžba za tlak, uz malu grešku od stabilizacije približnom projekcijom.

**Napomena** Prilikom računanja jednadžbe za tlak (5.34), obično se ne koriste stranice uz rub jer je na rubu domene ili propisana brzina, pa se uzima homogeni Neumannov rubni uvjet za tlak, ili je na izlazu Neumannov rubni uvjet za brzinu koji je tako implementiran ("upwind") da stvara privid Dirichletovog, tako da je potrebno korigirati globalnu konzervativnost eksplicitno tijekom linearizacije konvekcije, no tada se može zadati i homogeni Neumannov uvjet i na izlaznom rubu.

### 5.2.8. Povezivanje brzine i tlaka

Nakon linearizacije konvekcije, u Navier-Stokesovim jednadžbama (5.33) i (5.34), međusobna ovisnost brzine i tlaka je linearna. Povezivanje brzine i tlaka može se tretirati na dva načina: simultano ili odvojeno.

U **simultanim** algoritmima [36, 177] istovremeno se za sve ćelije rješavaju oba sustava jednadžbi, jednadžbe količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta. Obzirom na linearnu vezu brzine i tlaka u diskretnim Navier-Stokesovim jednadžbama, rješenje se dobiva jednim implicitnim rješavanjem linearnog problema <sup>11</sup>  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , za sustav kojem je konvektivni član lineariziran oko trenutnog polja brzine. To je moguće ako broj ćelija nije prevelik, što i nije čest slučaj u rješavanju industrijskih problema. U simultanom pristupu sve komponente brzine, zajedno sa tlakom, moraju biti u istoj matrici, što značajno povećava zahtjeve na procesorsko vrijeme i memoriju.

**Odvojeni** (engl. *segregated*) pristup [138, 96] je češći način rješavanja problema povezivanja brzine i tlaka. Tu se cijeli problem faktorizira u niz manjih problema koji su bitno "jeftiniji" za rješavanje, kao što je to objašnjeno u poglavlju A.3.3.. Konvektivno-difuzijski transport je degeneriranog eliptično-paraboličnog <sup>12</sup> tipa, i postaje to više paraboličan što je veći Reinoldsov broj, dok je jednadžba za tlak uvijek eliptična. To je motivacija da se na manje probleme, dobivene nakon faktorizacije operatora, primjene metode koje su najprimjerenije određenom tipu problema.

PISO [96] i SIMPLE [139] su predstavnici najčešće korištenih metoda faktorizacije operatora za povezivanje brzine i tlaka.

#### PISO algoritam za povezivanje brzine i tlaka

Ovaj postupak povezivanja brzine i tlaka koristi se za nestacionarne proračune. Polazeći od diskretnih Navier-Stokesovih jednadžbi (5.33), i (5.34) PISO algoritam se sastoji od slijedećih koraka:

1. Rješava se jednadžba količine gibanja (5.33). Gradijent tlaka u promatranom vremenskom trenutku u ovoj fazi nije poznat, pa se koristi polje tlaka iz prethodnog vremenskog trenutka. Ovaj korak naziva se **predikcija jednadžbe količine gibanja** (engl. *momentum predictor*). Rješenje jednadžbe količine gibanja daje

<sup>11</sup> Uz pretpostavku da je konvekcija diskretizirana monotono, recimo "upwind" shemom.

<sup>12</sup> Problem postaje eliptičan za  $Re \rightarrow 0$ , a paraboličan za  $Re \rightarrow \infty$ .

aproximaciju novog polja brzine, koje međutim ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta.

2. Koristeći brzine iz prethodnog koraka, računa se  $H_P(\mathbf{u})$  zbog formiranja jednadžbe za tlak (5.34). Njezino rješenje daje prvu procjenu novog polja tlaka. Ovaj korak naziva se **riješenoje tlaka** (engl. *pressure solution*).
3. Iz jednadžbe (5.35) računaju se konzervativni konvektivni volumni protoci kroz stranice ćelija, konzistentni s novim poljem tlaka. Također je potrebno izvršiti korekciju brzina i u ćelijama, tako da i one budu konzistentne sa razdiobom tlaka. To se radi na eksplicitan način, pomoću jednadžbe (5.31). Ovaj korak naziva se **eksplicitna korekcija brzine** (engl. *explicit velocity correction*),

Iz jednadžbe (5.31) slijedi da se korekcija brzine zapravo sastoji od dva dijela. Prvi je korekcija zbog promjene polja tlaka, član  $\left(\frac{1}{a_P} \nabla p\right)$ , a drugi je korekcija zbog promjene protoka koji su se promjenili zbog promjene polja tlaka, član  $\left(\frac{H_P(\mathbf{u})}{a_P}\right)$ .

To što je korekcija brzine eksplicitna znači da se zanemaruju nelinearnosti zbog zadnjeg člana u jednadžbi količine gibanja, ali se ne zanemaruju u jednadžbi kontinuiteta. Zatim se ponovo računa član  $H_P(\mathbf{u})$  sa novim brzinama, a s njim se ponovo računa jednadžba za tlak. Drugim riječima, PISO procedura se, u svakom vremenskom koraku, sastoji od implicitne predikcije jednadžbe količine gibanja, iza koje slijedi niz parova rješenja jednadžbe za tlak i eksplicitne korekcije brzine. Ta se procedura ponavlja do propisane točnosti.

**Napomena** U PISO proceduri se u svakom vremenskom trenutku koristi samo jedna linearizacija konvekcije, a iteracije se koriste za točnije povezivanje brzine i tlaka. Pretpostavka je naravno da je vremenski korak primjereno malen, kako bi linearizacija konvekcije bila valjana u cijelom postupku.

### **SIMPLE algoritam za povezivanje brzine i tlaka**

Kada se traži stacionarno rješenje problema, ili se koristi veliki vremenski korak u proračunima u kojima nije važna točna evolucija toka, nije potrebno točno računati povezivanje brzine i tlaka u svakoj linearizaciji konvekcije, obzirom da nelinearnost konvekcije ima dominantan utjecaj na rješenje.

Stacionarno rješenje se obično traži tako da se koristi implicitna Eulerova vremenska shema s velikim vremenskim korakom, ili se koristi stacionarna formulacija koja je ekvivalentna Eulerovoj implicitnoj shemi s beskonačno velikim vremenskim korakom. Tada je nužno podrelaksirati rješenje da bi Picardove iteracije uopće konvergirale. Smanjenje vremenskog koraka, kao i implicitna podrelaksacija jednadžbe količine gibanja, povećavaju dijagonalnu dominantnost matrice.

SIMPLE algoritam sastoji se iz slijedećih koraka:

1. Koristeći polje tlaka i volumne protoke iz prethodne iteracije, ili prethodnog vremenskog koraka, rješava se jednadžba količine gibanja (5.33), koja je podrelaksirana na implicitan način (5.22).
2. Rješava se jednadžba za tlak (5.34) da se dobije novo polje tlaka.
3. Računaju se novi konzervativni volumni protoci kroz stranice kontrolnih volumena iz jednadžbe (5.35). Za razliku od PISO algoritma, sada se radi nova linearizacija konvekcije sa konzervativnim protocima, te se računaju novi koeficijenti  $a_S$  u  $H_P(\mathbf{u})$ . Rješenje polja tlaka se eksplicitno podrelaksira:

$$p^n = p^{n-1} + \alpha_p(p - p^{n-1}), \quad (5.36)$$

gdje je:

- $p$  rješenje jednadžbe za tlak,
- $p^{n-1}$  rješenje tlaka iz prethodne iteracije, s kojim je riješena jednadžba količine gibanja,
- $\alpha_p$  podrelaksacijski faktor za tlak, za koje vrijedi  $0 < \alpha_p \leq 1$ ,
- $p^n$  nova vrijednost polja tlaka, koja se koristi za eksplicitnu korekciju brzine u ćelijama, i u slijedećem rješavanju jednadžbe količine gibanja.

Ako su brzine u ćelijama potrebne prije slijedećeg rješavanja jednadžbe količine gibanja, provodi se eksplicitna korekcija pomoću jednadžbe (5.35) kao i u PISO algoritmu, ali pomoću podrelaksiranog tlaka  $p^n$ . Formalno, brzina u ćelijama nakon korekcije ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta (kad se divergencija računa kao volumni integral), ali važno je da protoci kroz površine zadovoljavaju, jer će se njima linearizirati konvekcija u koraku  $n + 1$ . Tada je potrebno samo još korigirati globalne protoke, da jednadžba količine gibanja vrijedi i za cijelu domenu.

### 5.2.9. Rekonstrukcija iz vrijednosti funkcije

Kao što je već rečeno, u metodi drugog reda točnosti se u ovom radu konvektivni i difuzijski protoci korigiraju pomoću interpolacije radijalnim baznim funkcijama u postupku odgođene korekcije. Interpolant za konvekciju, ili njegov gradijent za difuziju, se evaluira u težištima stranica ćelija, te se na taj način radi neortogonalna korekcija, kao i korekcija zbog izvitoperenosti (engl. *skewness*) mreže.

Prilikom rekonstrukcije iz vrijednosti funkcije u težištima ćelija, i u interpolacijskim centrima na Dirichletovom i Neumannovom rubu, koriste se dva funkcionala;

$$\begin{aligned}\lambda_{id} &= id, \\ \lambda_{\partial_n}^*(\cdot) &= D^*(\cdot) \cdot \mathbf{n}(\star),\end{aligned}\tag{5.37}$$

koji djeluju na  $Y_0 = Y \cap (\Omega \cup \Gamma_0)$  i  $Y_1 = Y \cap \Gamma_1$ . Sada se definiraju dva skupa linearnih funkcionala:

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda_{id}^{y_j} & j = 1, \dots, N_{id}, \\ \lambda_{\partial_n}^{y_j} & j = N_{id} + 1, \dots, N, \end{cases}$$

gdje je  $N_{id} = |\mathcal{P}_\Omega| + N_D$  i  $N = |\mathcal{P}_\Omega| + N_D + N_N$  ukupni broj interpolacijskih centara.

Interpolant  $s$  funkcije  $v$  dan je sa:

$$\begin{aligned}s(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N c_j \lambda^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{id}} c_j \lambda_{id}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{j=N_{id}+1}^N c_j \lambda_{\partial_n}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{5.38}$$

Vektor koeficijenata  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$  određuje se iz interpolacijskih uvjeta:

$$\begin{aligned}\lambda_{id}^{x_i} s(\mathbf{x}) &= \lambda_{id}^{x_i} v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}_i), \quad j = 1, \dots, N_{id}, \\ \lambda_{\partial_n}^{x_i} s(\mathbf{x}) &= \lambda_{\partial_n}^{x_i} v(\mathbf{x}) = \partial_n v(\mathbf{x}_i), \quad j = N_{id} + 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Stavljanjem uvjeta (5.39) u interpolaciju (5.38) slijedi:

**Definicija 11 (Mješoviti interpolacijski problem za osnovnu MKV)** *Neka glatka funkcija  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava uvijete (5.39). Neka su  $Y_0 = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_{id}}\} \subseteq \Omega \cup \Gamma_0$  i  $Y_1 = \{\mathbf{y}_{N_{id}+1}, \dots, \mathbf{y}_N\} \subseteq \Gamma_1$  dva skupa u parovima različitih točaka. Onda je interpolacija bazirana na  $Y_0$  i  $Y_1$ , i funkciji  $\Phi$  dana sa (5.38), gdje se vektor koeficijenata određuje rješavanjem linearnog sustava  $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{v}|_\Lambda$ , sa matricom interpolacije:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ee} & \mathbf{A}_{e\partial_n} \\ \mathbf{A}_{e\partial_n}^T & \mathbf{A}_{\partial_n\partial_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}\tag{5.40}$$

koja ima submatrice  $\mathbf{A}_{\partial_n \partial_n} = (a_{ij}^{\partial_n \partial_n}) \in \mathbb{R}^{N_N \times N_N}$ ,  $\mathbf{A}_{e \partial_n} = (a_{ij}^{e \partial_n}) \in \mathbb{R}^{N_{id} \times N_N}$  i  $\mathbf{A}_{ee} = (a_{ij}^{ee}) \in \mathbb{R}^{N_{id} \times N_{id}}$  sa elementima:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{ee} &= \lambda_{id}^{x_i} \lambda_{id}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ a_{i,l-N_{id}}^{e \partial_n} &= \lambda_{id}^{x_i} \lambda_{\partial_n}^{y_l - N_{id}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ a_{k-N_{id}, l-N_{id}}^{\partial_n \partial_n} &= \lambda_{\partial_n}^{x_k - N_{id}} \lambda_{\partial_n}^{y_l - N_{id}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

za  $1 \leq i, j \leq N_{id}$  i  $N_{id} + 1 \leq k, l \leq N$ .

Desna strana linearnog sustava određena je s jednačbom (5.39):

$$\begin{aligned} v|_{\lambda_i} &= v(\mathbf{x}_i), \quad 1 \leq i \leq N_{id}, \\ v|_{\lambda_i} &= \frac{\partial v}{\partial n_i}(\mathbf{x}_i), \quad N_{id} + 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Zapis matrica u jednačbi (5.41) je u terminima submatrica:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{ee} &= \lambda_{id}^{x_i} \lambda_{id}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i, j \leq N_{id}, \\ a_{i,j}^{e \partial_n} &= \lambda_{id}^{x_i} \lambda_{\partial_n}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i \leq N_{id}, \quad 1 \leq j \leq N_N, \\ a_{i,j}^{\partial_n \partial_n} &= \lambda_{\partial_n}^{x_i} \lambda_{\partial_n}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i, j \leq N_N. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Za zadavanje interpolacijskih uvjeta potrebno je izračunati djelovanje funkcionala  $\lambda_{\partial_n}^y$  i  $\lambda_{\partial_n}^x \lambda_{\partial_n}^y$  na skalarnu radijalnu jezgru  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Prvi se dobiva deriviranjem kompozicije funkcija:

$$\lambda_{\partial_n}^y (\phi \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi' \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}), \quad (5.43)$$

gdje je

$$D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Djelovanje funkcionala  $\lambda_{\partial_n}^{x_i}$  na jednačbu (5.43) može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} \lambda_{\partial_n}^x \lambda_{\partial_n}^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= D^x (\lambda_{\partial_n}^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= D^x (D^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= (D^x (D^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + D^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot D^x \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= (D^x D^y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

jer je  $D^x \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0$  obzirom da  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  nije funkcija varijable  $\mathbf{x}$ . Sada ostaje samo izračunati drugu Hesseovu matricu radijalne skalarne jezgre:

$$\begin{aligned} D^x D^y (\phi \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= D^x ((\phi' \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ &= (\phi'' \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^x r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + (\phi' \circ r)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^x (D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \end{aligned}$$



gdje je:

$$D^x (D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} (D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes D^y r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - I).$$

Interpolacijski problem će imati jedinstveno rješenje ako su funkcionali linearno nezavisni [72], što je osigurano definicijom funkcionala pomoću mreže kontrolnih volumena. Svakom kontrolnom volumenu pridružuje se jedan interpolacijski centar, koji se smještava u težište ćelije. Kontrolni volumeni koji su na rubu domene imaju zadane rubne uvijete u nekim stranicama. U težištu svake takve stranice nalazi se po jedan interpolacijski centar, u kojem se zadaje rubni uvjet.

### 5.3. Metoda kontrolnih volumena visokog reda točnosti na proizvoljnoj poliedarskoj mreži

#### 5.3.1. Uvod

Kada se konstruira metoda visokog reda (višeg od drugog), može se pristupiti na dva načina [54]:

- Da se u ćelijama računa prosjek varijable, a skalarni protoci se rekonstruiraju u kontrolnim površinama iz prosječnih vrijednosti (u duhu kontrolnih volumena):

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}(\Omega_j) \psi(t) + (\Psi(\psi_{j+1/2}(t)) - \Psi(\psi_{j-1/2}(t))) = 0, \quad (5.44)$$

gdje je prosjek u ćeliji  $\mathfrak{A}(\Omega_j) \psi(t) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \psi(t, \mathbf{x}) dV$ .

- Da se skalarni protoci rekonstruiraju iz vrijednosti zavisne varijable. Tu se vrijednosti u težištima interpretiraju kao funkcijske vrijednosti u točkama (u duhu konačnih diferencija):

$$\frac{d}{dt} \psi(t) + \mathfrak{A}(\Omega_j)^{-1} (\Psi(\psi_{j+1/2}(t)) - \Psi(\psi_{j-1/2}(t))) = 0, \quad (5.45)$$

gdje je  $\mathfrak{A}(\Omega_j)^{-1}$  apstraktni operator volumnog osrednjavanja.

U ovom radu se konstruira metoda višeg reda oblika (5.44), kakvu je predložio [169] za rekonstrukciju iz prosjeka interpolanta apstraktnih splineova.

Kada se radi o formulacijama visokog reda točnosti, koje su najčešće proizašle iz formulacije za stlačivo strujanje, problem (5.1) opisan parcijalnim diferencijalnim

jednadžbama se obično preformulira u problem opisan običnim diferencijalnim jednadžbama, pa se rješava evolucijski problem za prosjeke u ćelijama eksplicitno:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}(\Omega) \psi(t) + \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(\psi(t, \mathbf{x})) dS = 0,$$

uz odgovarajuće početne uvijete, gdje su  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(\psi)$  obično samo konvektivni protoci. Integracija u vremenu se radi obično na jedan od slijedeća dva načina:

- Metodom tipa Godunova. Te su metode jednokoračne u vremenu, a visoki se red točnosti postiže visokim redom točnosti integriranja protoka u vremenu.
- Višekoračnim eksplicitnim metodama tipa Runge–Kutta , ili Adams–Bashforth odn. Adams–Moulton, gdje se skalarni protoci, kao i solenoidna projekcija, računaju u svakom međukoraku.

Ono što je također zajedničko većini metoda višeg reda je da rješavaju Riemannov problem na svakoj površini kontrolnog volumena, iako se koriste za računanje nestlačivog toka, što je posljedica njihovog stlačivog porijekla.

U ovom radu koristiti će se implicitna BDF formula za vremensku integraciju. Takav pristup nameće eliptična priroda jednadžbe za tlak. Mogući su i drugi pristupi kod modeliranja nestlačivog toka, kao što je objašnjeno u poglavlju A.3., no eliptična jednadžba za tlak najbolje opisuje fiziku nestlačivog strujanja, a pri tome je očuvana konzervativnost metode.

Svakoj ćeliji  $\Omega_P$  pridružen je linearni funkcional  $\lambda_P$  koji aproksimira  $\mathfrak{A}(\Omega_P) \psi(t)$ :

$$\lambda_P(\psi(t, \mathbf{x})) = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} \psi(t, \mathbf{x}) dV + \mathcal{O}(h^q), \quad \Omega_P \in \mathcal{P}_\Omega, \quad (5.46)$$

a koji je operator osrednjavanja u promatranom kontrolnom volumenu reda  $q$ . Funkcionalni  $\{\lambda_P(\psi)\}_{\Omega_P \in \mathcal{P}_\Omega}$  su tada linearno nezavisni, obzirom na definiciju mreže (Definicija 10) kontrolnih volumena.

Slijedi rezultat o redu točnosti metode kontrolnih volumena sa generaliziranom interpolacijom radijalnim baznim funkcijama za rekonstrukciju prostornih funkcija.

**Definicija 12** Za funkciju  $\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow s(\mathbf{x})$  kaže se da je **rekonstrukcija iz jednadžbi r-tog reda** ako vrijedi

$$\mathfrak{A}(\Omega_P) s = \mathfrak{A}(\Omega_P) v$$

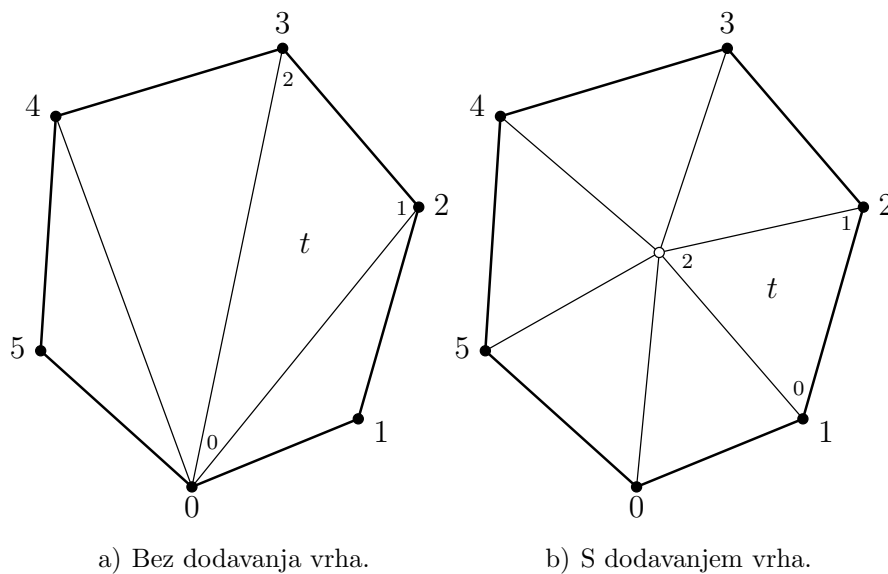
*i*

$$v(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^r).$$

Red metode iskazan je slijedećim teoremom.

**Teorem 6** ([169]) *Neka je  $s$  rekonstrukcija iz jednadžbi  $r$ -tog reda na  $\Omega$ . Tada je metoda kontrolnih volumena reda  $\min(q, r)$ , uz pretpostavku da su polje  $\psi$  i protoci  $\Psi$  dovoljno glatki, gdje je  $q$  red Gaussovih integracionih formula.*

### Kompozitne poligonalne stranice ćelija



Slika 5.2: Raščlanjivanje poligonalne stranice na simplekse [179].

Na slici 5.2 su prikazana dva postupka raščlanjivanja poligonalne stranice na trokute. Odabirom jednog postupka raščlanjivanja odabran je i tip kompozitne stranice ćelija. Kod prvog postupka, slika 5.2 a), trokute se definiraju tako da je svima prvi vrh jednak prvom vrhu poligona, a preostala dva su dva susjedna vrha poligona. Slika 5.2 b) prikazuje drugi postupak, kod kojeg se svakoj stranici dodaje centralni vrh u težištu vanjskih vrhova stranice, a trokute se grade tako da dva susjedna vrha poligona predstavljaju prva dva vrha trokuta, dok centralni vrh poligona čini treći vrh trokuta. Prvi postupak stvara manje trokuta, ali renumeracija vrhova mijenja mrežu. Na kraju oba postupka sve stranice su iste u obje susjedne ćelije, i normala je jednoznačno određena osim na bridovima ćelija, koji su mjere 0.

Geometrijska svojstva poligonalnih stranica računaju se na sljedeći način:

- **Površina stranice** računa se kao suma površina pripadajućih trokuta:

$$|S_f| = \sum_{t=1}^{N_t} |S_t^f|,$$

gdje je  $N_t$  broj trokuta koji čine stranicu;

- **Težište stranice** računa se kao srednja vrijednost težišta pripadajućih trokuta:

$$\mathbf{x}_f = \frac{1}{|S_f|} \sum_{t=1}^{N_t} \mathbf{x}_t |S_t^f|.$$

- **Normala na stranicu** računa se kao prosječna normala pripadajućih trokuta:

$$\mathbf{n}_f = \frac{1}{|S_f|} \sum_{t=1}^{N_t} \mathbf{n}_t |S_t^f|. \quad (5.47)$$

### 5.3.2. Kompozitne poliedarske ćelije

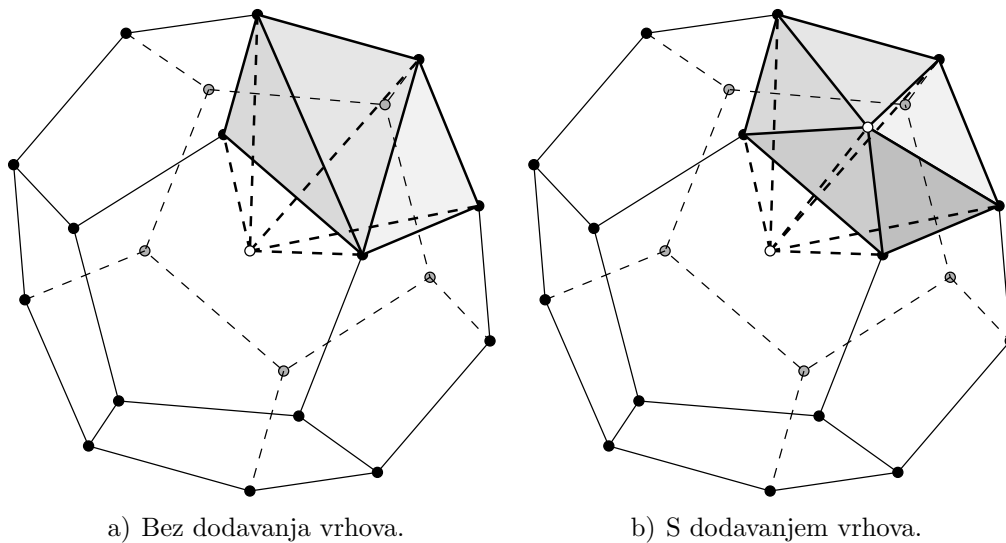
Da bi se omogućila formulacija metode kontrolnih volumena na poliedarskoj mreži visokog reda točnosti, definirana je tzv. **kompozitna poliedarska ćelija**, koja nastaje raščlanjivanjem poliedarskih na tetraedarske ćelije, po uzoru na kompozitni poliedarski konačni element koji je predložen [99] za potrebe deformiranja poliedarske proračunske mreže.

Raščlanjivanje proizvoljnog poliedra na tetraedre se u slučaju adresiranja po stranicama kontrolnih volumena može jednostavno automatizirati. Primijenjena su dva postupka automatskog raščlanjivanja (slika 5.3):

- raščlanjivanje kontrolnog volumena (bez dodavanja vrhova u poliedarske stranice),
- raščlanjivanje kontrolnog volumena i pripadajućih stranica (s dodavanjem središnjih vrhova u stranice).

Odabrani tip kompozitne ćelije mora naravno biti konzistentan s tipom kompozitne stranice.

U oba se postupka raščlanjivanja poliedarske mreže [99], uvode dodatni vrhovi u težištu poliedarske ćelije, te se provodi raščlanjivanje poligonalnih stranica ćelije na trokute, pa se na osnovu toga grade tetraedri.



Slika 5.3: Raščlanjivanje poliedarskog kontrolnog volumena na simplekse [179].

Kod **raščlanjivanja kontrolnog volumena**, slika 5.3 a), uvodi se dodatni vrh u centru poliedarskog kontrolnog volumena, a pripadajuće poligonalne stranice dijele se na trokute. Tetraedri se formiraju tako, da im posljednji vrh postaje vrh u težištu poliedarskog kontrolnog volumena.

Kod **raščlanjivanja kontrolnog volumena i pripadajućih stranica**, slika 5.3 b), uz vrh u centru poliedra uvode se dodatni vrhovi u centru svake poligonalne stranice. Stranica se dijeli na trokute, tako da u težištu vrhova koji opisuju poligonalnu stranicu bude zajednički vrh svim trokutima.

U oba tipa kompozitne ćelije, posljednje su stranice one koje su vanjske kompozitnoj poliedarskoj ćeliji. Geometrijska svojstva poliedarske ćelije računaju se iz odgovarajućih geometrijskih svojstava tetraedara koji čine ćeliju. Tetraedri se grade korištenjem centralnog vrha i trokuta nastalih rastavljanjem pripadajućih stranica. Vektor položaja centralnih vrhova tetraedara jednak je srednjoj vrijednosti vektora položaja vrhova kontrolnog volumena.

- **Volumen ćelije** računa se kao suma volumena pripadajućih tetraedara:

$$|\Omega_P| = \sum_{T=1}^{N_T} |\Omega_T^P|.$$

- **Težište ćelije** računa kao srednja vrijednost težišta pripadajućih tetraedara:

$$\mathbf{x}_P = \frac{1}{|\Omega_P|} \sum_{T=1}^{N_T} \mathbf{x}_T |\Omega_T^P|,$$

gdje je  $N_T$  broj tetraedara koji čine kontrolni volumen,  $|\Omega_T^P|$  volumen tetraedra, a  $\mathbf{x}_T$  težište tetraedra  $T$ .

**Dualna mreža.** Bez obzira da li je problem 2D ili 3D, mreža na koju se rastavi sačinjena je od simpleksa. Kada se jednom odabere tip kompozitnog poliedarskog kontrolnog volumena (odabere se način raščlanjivanja volumena i stranica), mreža simpleksa je jedinstvena.

### 5.3.3. Rekonstrukcija iz prosjeka u ćelijama

Za rekonstrukciju funkcije iz prosjeka u ćelijama, u metodi kontrolnih volumena na mreži centriranoj u ćelijama, koriste se integralni funkcionali u ćelijama pored funkcionala koji djeluju u Dirichletovim i Neumannovim rubnom točkama. Interpolacijska matrica je sada:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & \mathbf{A}_{fe} & \mathbf{A}_{f\partial_n} \\ \mathbf{A}_{fe}^T & \mathbf{A}_{ee} & \mathbf{A}_{e\partial_n} \\ \mathbf{A}_{f\partial_n}^T & \mathbf{A}_{e\partial_n}^T & \mathbf{A}_{\partial_n\partial_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (5.48)$$

a u odnosu na jednadžbu (5.40) ima dodatne submatrice  $\mathbf{A}_{ff} = (a_{ij}^{ff}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{P}_\Omega| \times |\mathcal{P}_\Omega|}$ ,  $\mathbf{A}_{fe} = (a_{ij}^{fe}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{P}_\Omega| \times N_D}$  i  $\mathbf{A}_{f\partial_n} = (a_{ij}^{f\partial_n}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{P}_\Omega| \times N_N}$ , čiji su elementi u indeksima submatrica:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{ff} &= \lambda_f^{x_i} \lambda_f^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_k^{N_G} \sum_l^{N_G} \omega_k \omega_l \lambda_{id}^{x_k} \lambda_{id}^{y_l} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i, j \leq |\mathcal{P}_\Omega|, \\ a_{i,j}^{fe} &= \lambda_f^{x_i} \lambda_e^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_k^{N_G} \omega_k \lambda_e^{x_k} \lambda_e^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i \leq |\mathcal{P}_\Omega|, 1 \leq j \leq N_D, \\ a_{i,j}^{f\partial_n} &= \lambda_f^{x_i} \lambda_{\partial_n}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_k^{N_G} \omega_k \lambda_e^{x_k} \lambda_{\partial_n}^{y_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 1 \leq i \leq |\mathcal{P}_\Omega|, 1 \leq j \leq N_N. \end{aligned} \quad (5.49)$$

U gornjoj jednadžbi je  $N_G$  broj Gaussovih točaka u integracijskoj formuli,  $\omega_{(\cdot)}$  su pripadajući težinski koeficijenti za koje, bez obzira da li se integrira po simpleksu ili kompozitnom kontrolnom volumenu sačinjenom od simpleksa, mora vrijediti  $\sum_g^{N_G} \omega_g = 1$ .

Kao i u slučaju rekonstrukcije iz vrijednosti u težištima ćelija, definicija mreže osigurava da su korišteni funkcionali linearno nezavisni, pa interpolacija ima jedinstveno rješenje. Ova interpolacija je visokog reda točnosti ako se koriste odgovarajuće radijalne bazne funkcije. Kada se takva interpolacija koristi u metodi kontrolnih volumena, cijela metoda je visokog reda točnosti ako se numerički fluksevi kroz stranice ćelija računaju odgovarajućim Gausovim formulama visokog reda točnosti.

### 5.3.4. Povezivanje brzine i tlaka

SIMPLE klasa algoritama bazirana je uvijek na nekoj diskretizaciji, u smislu da se jednačba za tlak formira iz diskretnog sustava jednačbi (v. jedn. (A.19) ili (A.22)). Ako postoje stvarni proračunski čvorovi u točkama u kojima su potrebni SIMPLE algoritmu onda je SIMPLE egzaktna projektivna metoda, no kad ne postoje mora se raditi približna projekcija. To se obično radi Rhie-Chow metodom u osnovnoj metodi kontrolnih volumena, no postoje i druge približne projekcije za strukturirani razmještaj proračunskih čvorova [150, 53], a postoje i drugačiji algoritmi za nestrukturirane mreže [106] od SIMPLE algoritma.

Generalizirana interpolacija omogućuje, a ta mogućnost je u ovom radu korištena, da se egzaktna projekcija radi na način da se interpolant evaluira u točkama gdje je potreban u projektivnoj metodi, pri čemu je vrlo jednostavno birati funkcijske prostore za tlak i za brzinu da se odabere kombinacija funkcijskih prostora kojom se izbjegava "cik-cak" rješenje.

Prilikom projekcije brzine na solenoidno polje u formulaciji kontrolnih volumena visokog reda računa se prosječni gradijent tlaka, kojim se korigira prosječna brzina. Prosječni gradijent tlaka računa se u Poissonovoj jednačbi, u kojoj je izvor na desnoj strani površinski Gaussov operator divergencije brzine, koji se računa potrebnim visokim redom. Na lijevoj strani Poissonove jednačbe u Laplaceovom operatoru, odnosno preciznije u Gaussovom operatoru divergencije, ako se radi o toku homogene gustoće na stranicama ćelija se rekonstruira prosjek veličine  $\partial_n p$ , koji treba korigirati projekciju polja brzine u smjeru normale na stranicu. Nakon konvergencije jednačbe za tlak, volumni protoci  $\bar{Q}$  kroz stranice se onda eksplicitno korigiraju s prosječnom vrijednosti  $\partial_n p$  na stranici. Jednako tako se u fazi korekcije brzine u ćelijama, prosjek brzine korigira sa prosjekom veličine  $\nabla p$  u ćeliji.

### 5.3.5. Konvektivni i difuzni protoci

Kod formulacije metode kontrolnih volumena visokog reda, podintegralne funkcije, prilikom računanja konvektivnog protoka kroz stranice ćelija, zahtijevaju drugačiji tretman u odnosu na metodu drugog reda točnosti čak i ako se integrira po simpleksima. To je posljedica korištenja Gaussovih integralnih formula sa više od jednom integracijskom točkom na stranici. Volumni protok kroz simpleks stranicu  $f$  je:

$$\int_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS \approx \sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_g |S_f| = \bar{Q}_f.$$

Odgodena korekcija konvekcije je implementirana na način da se na desnu stranu linearnog sustava, u Gaussovom operatoru divergencije, radi korekcija prema implicitnom dijelu formulacije na način da se množenjem transportirane skalarne veličine  $\psi$  sa volumnim protokom kroz svaku stranicu  $\bar{Q}_f$  dobiva konvektivni protok kroz tu stranicu. Dakle, za skalarnu veličinu  $\psi$  potrebno je izračunati veličinu  $\tilde{\psi}_f$  tako da vrijedi:

$$\int_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \psi \, dS \approx \sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot (\mathbf{v} \psi)_g |S_f| = \tilde{\psi}_f \bar{Q}_f, \quad (5.50)$$

gdje je pretpostavljeno zbog jednostavnosti da se radi o simpleksu, pa je  $\mathbf{n}_f$  konstantna na  $f$ . Iz gornje jednadžbe može se izračunati potrebna skalarna veličina koja se koristi u odgođenoj korekciji:

$$\tilde{\psi}_f = \frac{\sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot (\mathbf{v} \psi)_g}{\sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_g} = \frac{\mathbf{n}_f \cdot (\overline{\mathbf{v} \psi})_f}{\mathbf{n}_f \cdot \bar{\mathbf{v}}_f}.$$

Jednadžba (5.50) vrijedi za svaku skalarnu veličinu, pa tako i za vektorske komponente. Posebno, konvektivni protok u jednadžbi količine gibanja računa se pomoću:

$$\tilde{\mathbf{v}}_f^* = \frac{\sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}^*)_g}{\sum_g^{G_f} \omega_g \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{v}_g} = \frac{\mathbf{n}_f \cdot (\overline{\mathbf{v} \mathbf{v}^*})_f}{\mathbf{n}_f \cdot \bar{\mathbf{v}}_f}.$$

Važno je da se brzina  $\mathbf{v}$  rekonstruira iz polja koje je korigirano do solenoidnosti istim poljem tlaka kao i volumni protoci  $\bar{Q}_f$  kroz stranice ćelija. Ako se jednadžba količine



gibanja rješava više puta bez projekcije na solenoidno polje, kao npr. zbog primjene odgođene korekcije, važno je u prije svakog rješavanja moći rekonstruirati brzinu  $\mathbf{v}$ , pa se ona čuva u memoriji do jednadžbe za tlak. Nakon toga će se izračunatu brzinu  $\mathbf{v}^*$  korigirati do solenoidnosti, te s istim poljem tlaka korigirati i protoke kroz stranice  $\overline{Q}_f$ , s kojima se od tada linearizira konvekcija.

Sličan postupak je potreban u difuznom članu ako kinematička viskoznost  $\nu$  nije konstantna, jer tada treba viskoznost integrirati zajedno sa gradijentom promatrane veličine.

### 5.3.6. Postupak rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi

Riješenje formulacije metode kontrolnih volumena visokog reda točnosti uvodi se kroz odgođenu korekciju u odnosu na uzvodno-centralnu shemu koja se tretira implicitno u osnovnoj metodi kontrolnih volumena.

**Nestacionarno rješenje** modela nestlačivog toka egzaktnom projekcijom može se sažeti u sljedeće korake:

1. Postavljaju se početni uvjeti za sva polja kod metode visokog reda, pa se početni uvjeti moraju osrednjiti na korištenoj mreži ako im se u ćelijama nalaze podatci o vrijednosti polja.
2. Započinje novi vremenski korak.
3. U osnovnoj metodi se formira matrica za jednadžbu količine gibanja. Iz interpolacije se za trenutne prosjeke u ćelijama izračuna korekcija brzine u odnosu na osnovnu metodu, te se s tom korekcijom na desnoj strani riješi jednadžba količine gibanja. Potrebno je napraviti nekoliko iteracija da se kroz odgođenu korekciju dođe do rješenja jednadžbe količine gibanja formulacije visokog reda.
4. Rješava se jednadžba za "mjeru tlaka"  $\varphi$ , dobivena uzimanjem divergencije Helmholtz-Hodgeove dekompozicije (A.4). Jedno rješavanje jednadžbe za tlak podrazumijeva više rješavanja linearnog sustava, da se kroz odgođenu korekciju na desnoj strani dođe u rješenje formulacije visokog reda točnosti. Pomoću prosjeka normalnih gradijenta izračunatog tlaka korigiraju se volumni protoci kroz stranice  $\overline{Q}$ , a pomoću prosječnih gradijenata tlaka korigiraju se prosječne brzine u ćelijama. Za razliku od algoritma tipa SIMPLE, kakav je i PISO, nije potrebno više puta rješavati

jednadžbu za tlak (i eksplicitno korigirati brzinu s izračunatim gradijentom tlaka) obzirom da je vezu između brzine i tlaka linearna, te ju linearna projektivna metoda nalazi u jednom koraku. Po završetku algoritma u memoriji su prosjeci u ćelijama solenoidnog polja brzine  $\bar{\mathbf{u}}$  i prosjeci tlaka  $\bar{p}$ , te protoci kroz stranice koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta  $\bar{Q}$  jer se s njima linearizira konvekcija ostalih transportnih jednadžbi koje se rješavaju sa Navier-Stokesovim.

5. Ako nije zadnji vremenski trenutak, vraća se u točku 2.
6. Ako je iz nekog razloga potrebno imati vrijednosti funkcije umjesto prosjeka po ćelijama, kao npr. za evaluacija reda točnosti metode, prije zapisivanja vrijednosti polja treba rekonstruirati iz prosjeka.

**Stacionarno rješenje** egzaktnom projekcijom dobiva se analogno, no sada se polja interpretiraju kao polazna polja za iterativnu metodu:

1. Za traženje stacionarnog rješenja nije ključno da li su polazni podatci u ćelijama u terminima vrijednosti ili prosjeka, pa se učitani podatci uvijek interpretiraju kao prosjeci polaznih polja.
2. Započinju Picardove iteracije. Formira se matrica jednadžbe količine gibanja, koja se rješava implicitno nakon što se na desnu stranu stavi korekcija do formulacije višega reda za trenutne vrijednosti polja brzine. Sada se jednadžba količine gibanja rješava implicitno podrelaksirana.
3. Evaluiraju se volumni protoci kroz stranice visokim redom točnosti, te se rješava jednadžba za mjeru tlaka  $\varphi$  tako da u stranicama normalni gradijent interpolanta tlaka korigira normalne projekcije interpolanta brzine, također u terminima prosjeka u stranicama. Eksplicitno se korigiraju volumni protoci  $\bar{Q}_f$  pomoću jednadžbe:

$$\mathbf{a}(S_f)(\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))|S_f| = \mathbf{a}(S_f)(\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) - \nabla\varphi(\mathbf{x}, t)))|S_f|,$$

ili zapisano kraće:

$$\bar{Q}_f(t) = \bar{Q}_f^*(t) - (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\nabla}\varphi)_f(t)|S_f|.$$

Na kraju se eksplicitno projicira prosjek brzine u svakoj ćeliji na solenoidno polje pomoću jednadžbe:

$$\mathfrak{A}(\Omega_P)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|\Omega_P| = \mathfrak{A}(\Omega_P) (\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) - \nabla\varphi(\mathbf{x}, t)) |\Omega_P|,$$

označeno kraće, nakon dijeljenja s volumenom ćelije:

$$\bar{\mathbf{v}}_P(t) = \bar{\mathbf{v}}_P^*(t) - \overline{\nabla\varphi}_P(t).$$

4. Provjera konvergencije svih jednadžbi, ako nije zadovoljena povratak na točku 2.
5. Zapisivanje polja na disk u terminima vrijednosti ili prosjeka u ćelijama.

Opisanom petljom dobiva se rješenje formulacije visokog reda točnosti metode kontrolnih volumena na proizvoljnoj mreži, tako što se proizvoljna poliedarska mreža rastavi u mrežu simpleksa. Metode rastavljanja u simplekse, za poliedarske ćelije opisane preko vrhova koji zatvaraju poligonalne stranice, opisane su u [99].

### Približna projekcija Rhie-Chow metodom

Ako se koristi približna projekcija Rhie-Chow metodom za rješavanje stacionarnog problema, postupak se razlikuje samo u koraku rješavanja jednadžbe za tlak. Tada se u izvoru na desnoj strani Poissonove jednadžbe brzina rekonstruira u stranicama pomoću interpolacije diskretne jednadžbe količine gibanja (diskretizirane osnovnom metodom), pa je red točnosti povezivanja brzine i tlaka (nametanja solenoidnosti polju brzine) ograničen s redom točnosti osnovne metode kontrolnih volumena.

Prilikom rješavanja nestacionarnog problema PISO algoritmom vrijedi slično kao u stacionarnom problemu, uz napomenu da tada treba riješiti jednadžbu za tlak više puta za samo jednu linearizaciju konvekcije kako bi se brzina i tlak potpuno povezali. To je i tipično za sve SIMPLE algoritme, pa tako i za približnu projekciju u Rhie-Chow duhu. Ta pojava je posljedica činjenice da se u jednadžbi za tlak (A.19) ili (A.22) eliptični operator konvekcije-difuzije  $\mathbf{N}$  aproksimira svojom dijagonalom  $\mathbf{a}_u$ .

## 6 Numerički primjeri

U ovom poglavlju nalaze se numerički primjeri kojima se ilustrira red točnosti predložene formulacije metode kontrolnih volumena. Također se osvrće na probleme koji se mogu pojaviti kada se koristi metoda kontrolnih volumena u formulaciji u kojoj se ne dozvoljavaju diskontinuirana rješenja na stranicama ćelija.

Prvo će biti istražen red točnosti same interpolacije radijalnim baznim funkcijama, a potom i formulacija metode kontrolnih volumena drugog i visokog reda točnosti, na problemu potencijalnog strujanja oko cilindra. Nadalje, formulacija će biti provjerena na slučaju sa čistom konvekcijom  $Pe = \infty$ , na primjerima koji imaju diskontinuitet u vrijednosti funkcije ili derivacijama. Na kraju će metoda biti upotrebljena za računanje strujanja u šupljini, pri čemu će povezivanje brzine i tlaka biti ili približno (u Rhie-Chow duhu), interpolacijom matricnih koeficijenata, ili egzaktno.

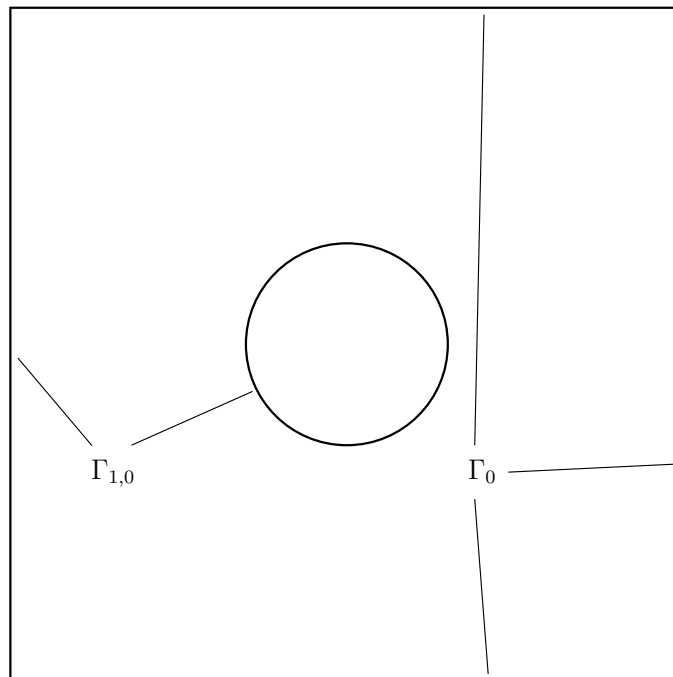
Korištene Wendlandove radijalne bazne funkcije, polinomi uz njih i Gaussovi integralni funkcionali označeni su u formatu  $(G^q)(K^k)(P^{m-1})$ . Tako npr.: "P<sup>1</sup>" označava linearni polinom, "P<sup>0</sup>" konstantni, a "P<sup>-1</sup>" je slučaj kada se ne koristi polinom.

Glatkoća funkcije je  $2k$ , pa je npr. "K<sup>1</sup>" Wendlandova  $C^2$  funkcija. Red Gaussove formule  $q$  označava stupanj polinoma koji ona integrira egzaktno.

### 6.1. Interpolacija

Potencijalno strujanje oko cilindra opisano je Laplaceovom parcijalnom diferencijalnom jednačinom. Ovdje će se koristiti za provjeru utjecaja tipa rubnih uvjeta na razne kombinacije radijalnih baznih funkcija i polinoma uz njih, te Gaussovih integralnih formula koje su funkcionali u generaliziranoj interpolaciji. Tip rubnih uvjeta u

generaliziranoj interpolaciji određuje koji funkcional treba koristiti u određenom interpolacijskom centru na rubu domene. Obzirom da se zadavanje vrijednosti u ćelijama može interpretirati kao djelovanje Gaussovog funkcionala u jednoj točki svake ćelije, njenom težištu, može se općenito govoriti da su u težištima pripadajući Gaussovi integralni funkcionali.



Slika 6.1: Skica cilindra sa prikazanim rubnim uvjetima.

Na slici 6.1 shematski je prikazana proračunska domena. Dio ruba označen sa  $\Gamma_0$  u svim primjerima ima Dirichletove rubne uvijete, odn. Lagrangeove podatke u kontekstu same interpolacije. Na rubu označenom s  $\Gamma_{0,1}$  koristiti će se ili Dirichletov rubni uvjet, ili Neumannov koji odgovara Birkhoffovim podacima u kontekstu interpolacije radijalnim baznim funkcijama.

### Interpretacija rezultata

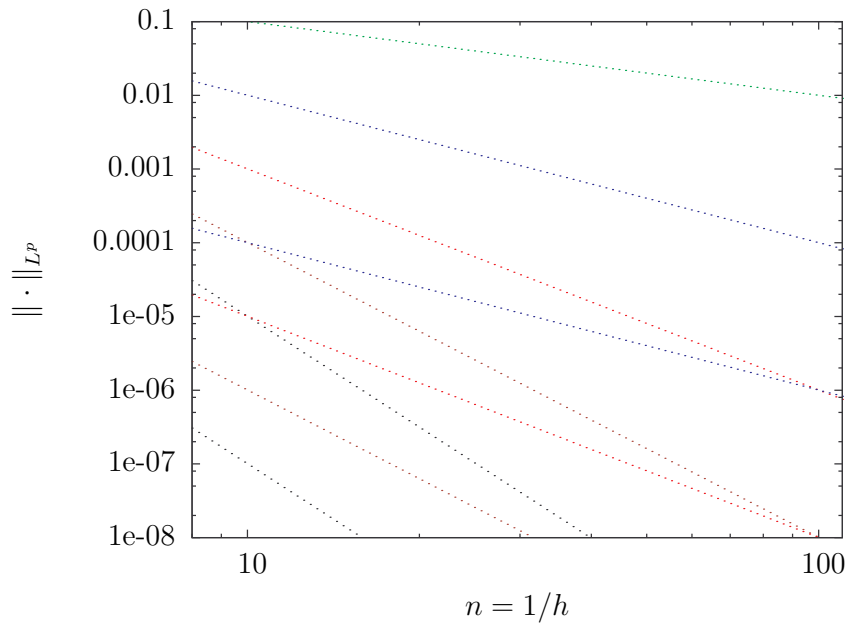
U svim grafovima u kojima se prikazuje greška interpolanta, ili njegovog gradijenta, kao funkcija broja podjela po segmentu  $n = 1/h$ , radi lakšeg očitavanja reda točnosti uneseni su pravci koji predstavljaju pojedini red, kao što se može vidjeti na slici 6.2. Tako je zelenom linijom označen prvi red točnosti, plavom drugi, crvenom treći, smeđom četvrti i crnom peti red točnosti.

Broj podjela  $n$  na jediničnom segmentu procjenjuje se kvadratnim korijenom broja ćelija u mreži, zato može poprimiti vrijednosti koje nisu cjelobrojne.

U svim grafovima prikazan je iznos najveće greške u domeni, koji je označen s  $p = \infty$ , kao i prosječna greška koja je označena s  $p = 2$ .

### 6.1.1. Interpolacija bez particije jedinice

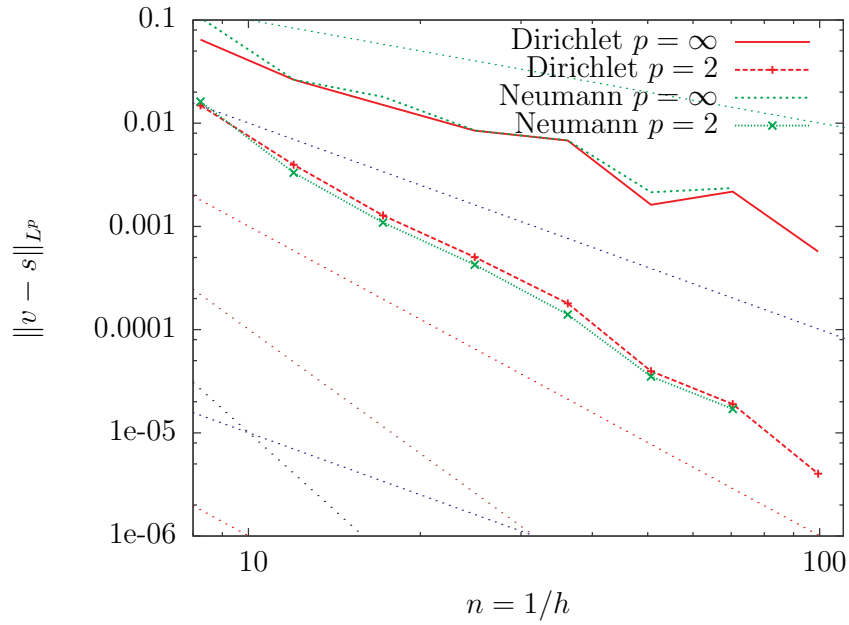
Iz rezultata se vidi da se povećavanjem glatkoće korištenih funkcija, kao i Gaussovih integrala, povećava red točnosti metode.



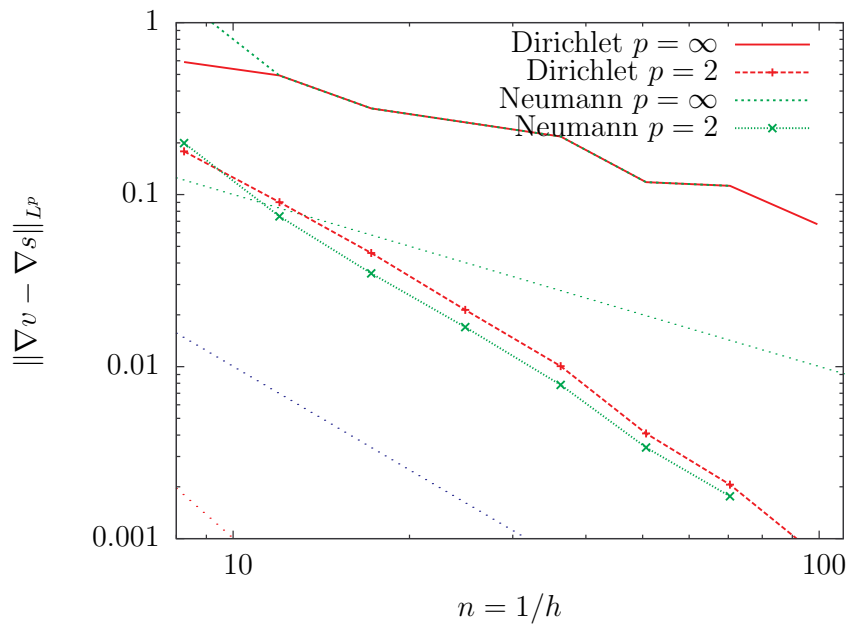
Slika 6.2: Slika uz objašnjenje izgleda grafova

Tako je npr. iz slike 6.11 vidljivo da je interpolacija preko trećeg reda točnosti kada se promatra najveća greška, a preko četvrtog reda ako se promatra prosječna greška. Iz slike 6.12 se vidi da je najveća greška gradijenta drugog reda točnosti, dok je prosječna trećeg reda točnosti.

Također se iz rezultata vidi da polinomi značajno podižu red točnosti gradijenta interpolanta, uključujući i linearni polinom, nakon čega se taj doprinos bitno smanjuje. U vrijednost interpolanta polinomi imaju manje značajan utjecaj na red točnosti, ali utječu na točnost, što također vrijedi do linearnog polinoma.

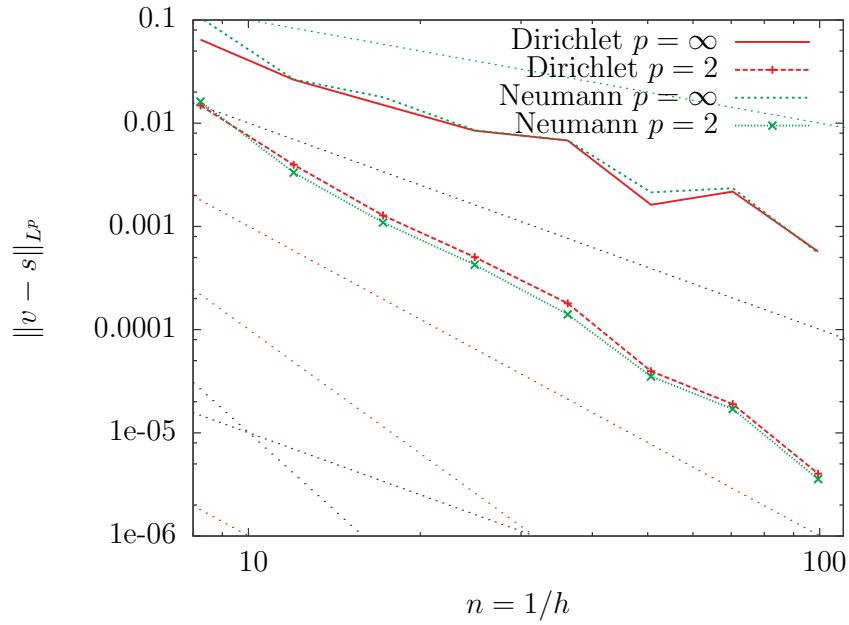


Slika 6.3: Interpolacija  $G^1 K^1 P^{-1}$ ,  $s$

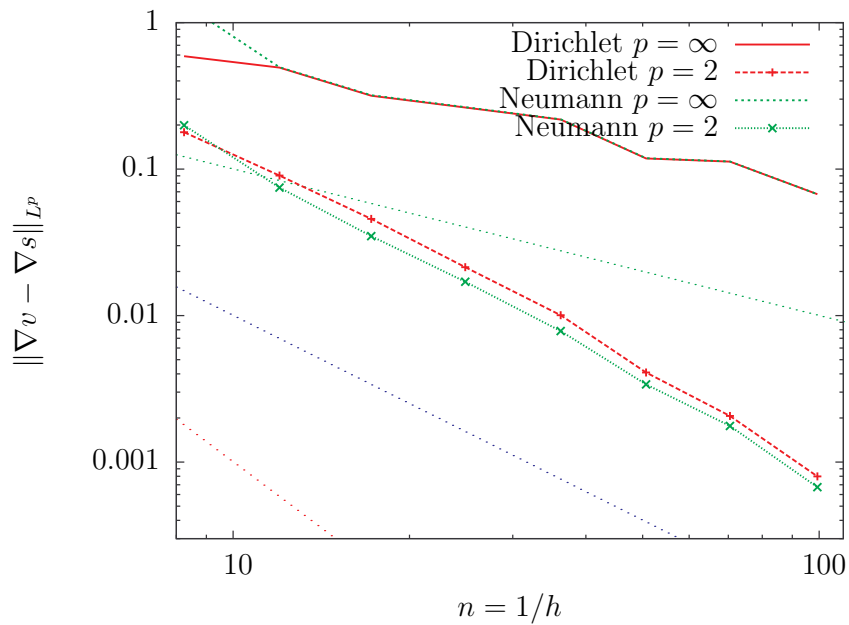


Slika 6.4: Interpolacija  $G^1 K^1 P^{-1}$ ,  $\nabla s$

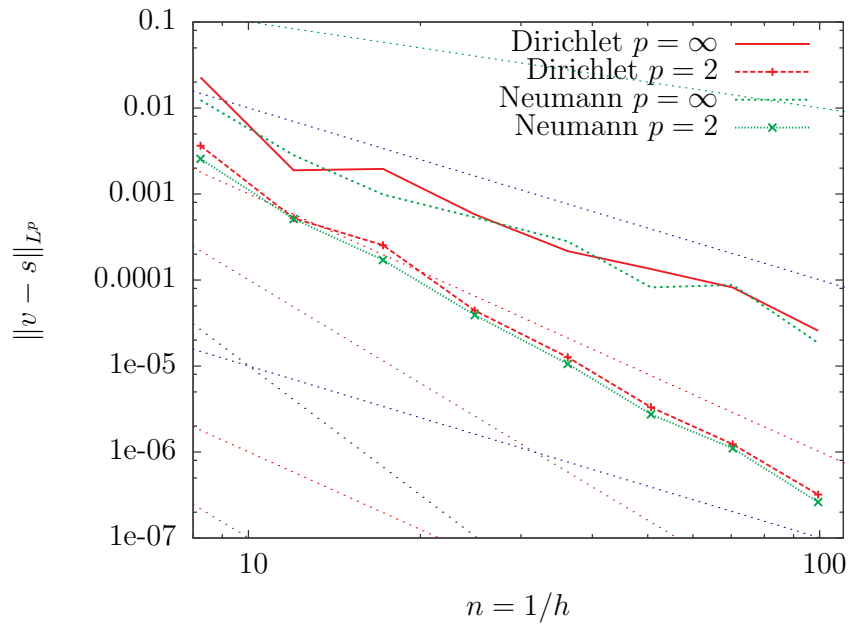




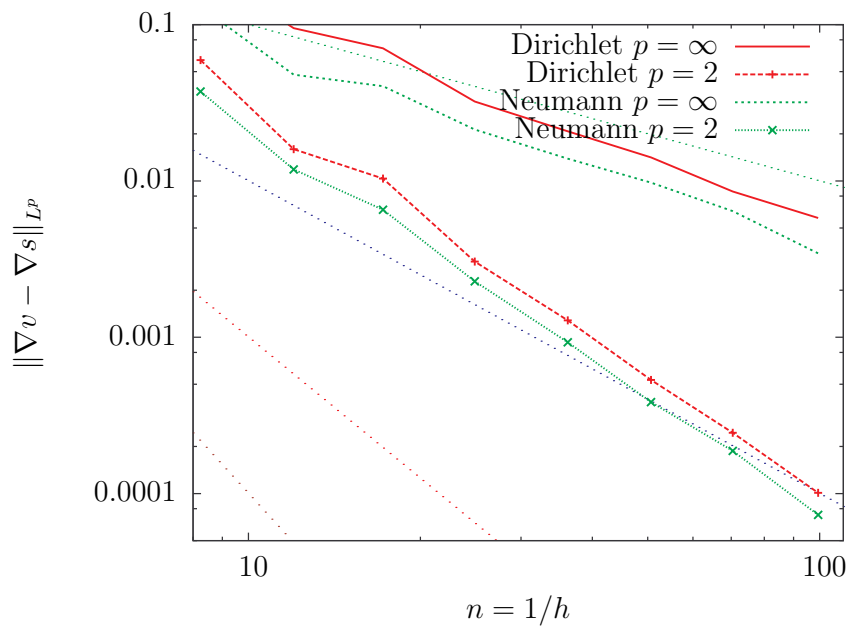
Slika 6.5: Interpolacija  $G^1 K^1 P^0, s$



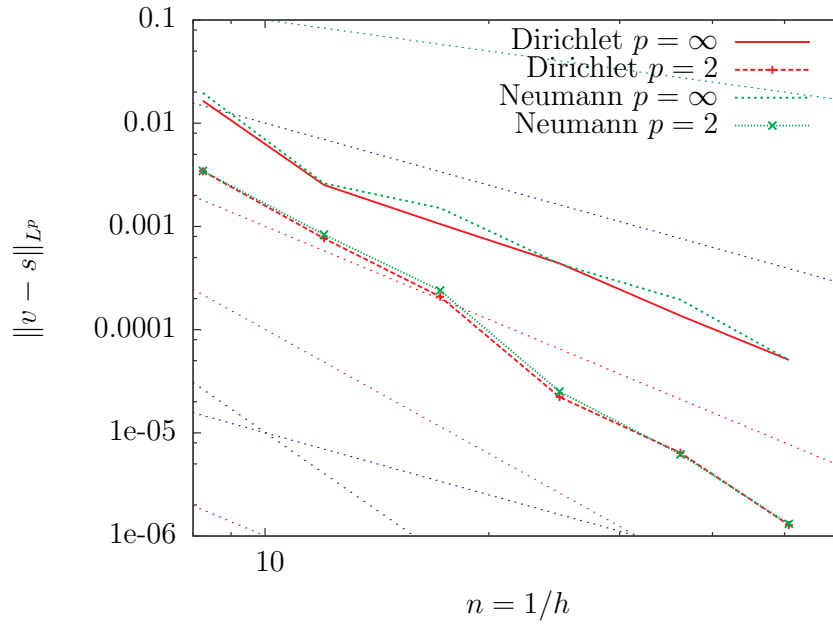
Slika 6.6: Interpolacija  $G^1 K^1 P^0, \nabla s$



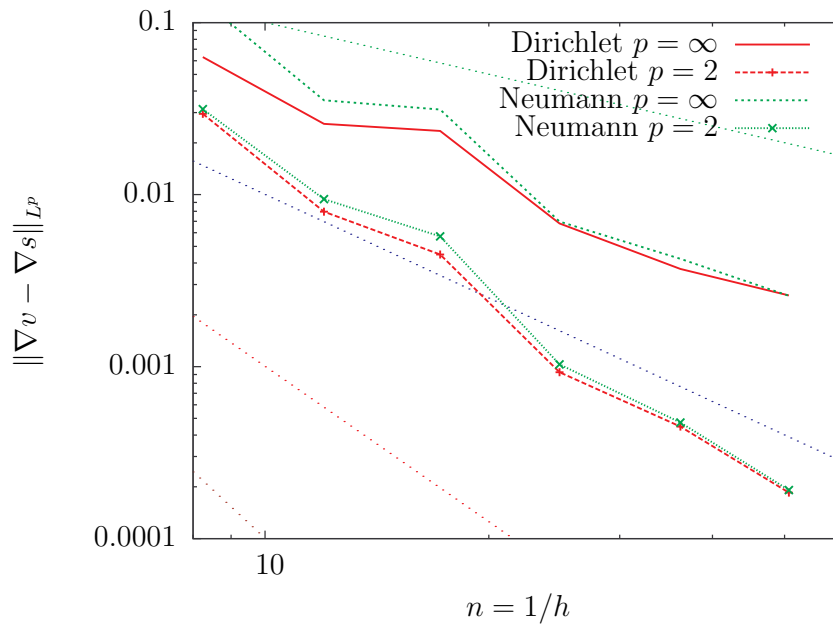
Slika 6.7: Interpolacija  $G^1 K^1 P^1$ ,  $s$



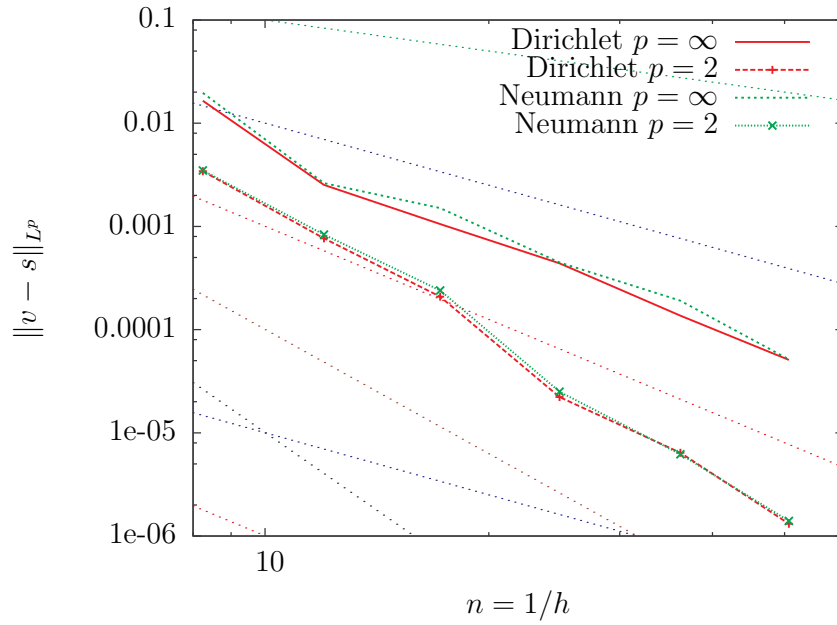
Slika 6.8: Interpolacija  $G^1 K^1 P^1$ ,  $\nabla s$



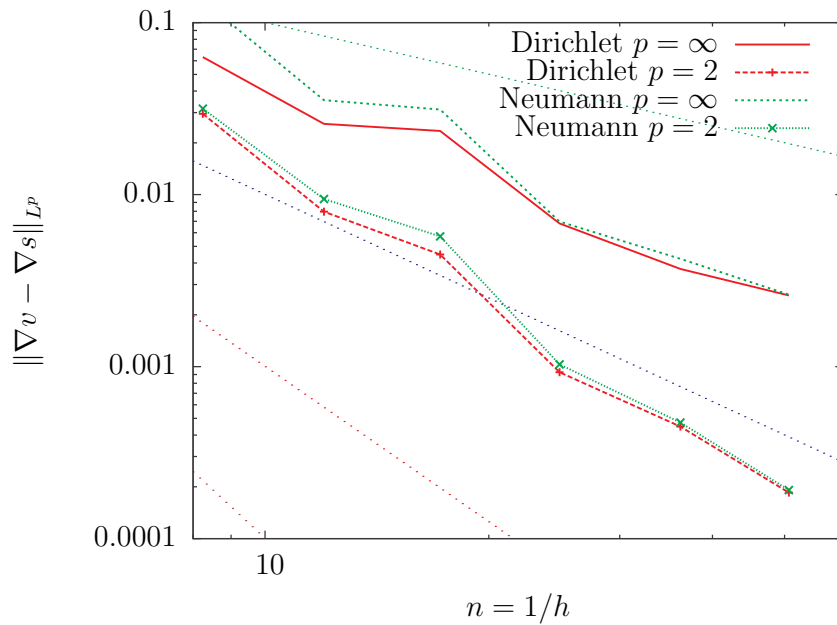
Slika 6.9: Interpolacija  $G^2 K^2 P^1, s$



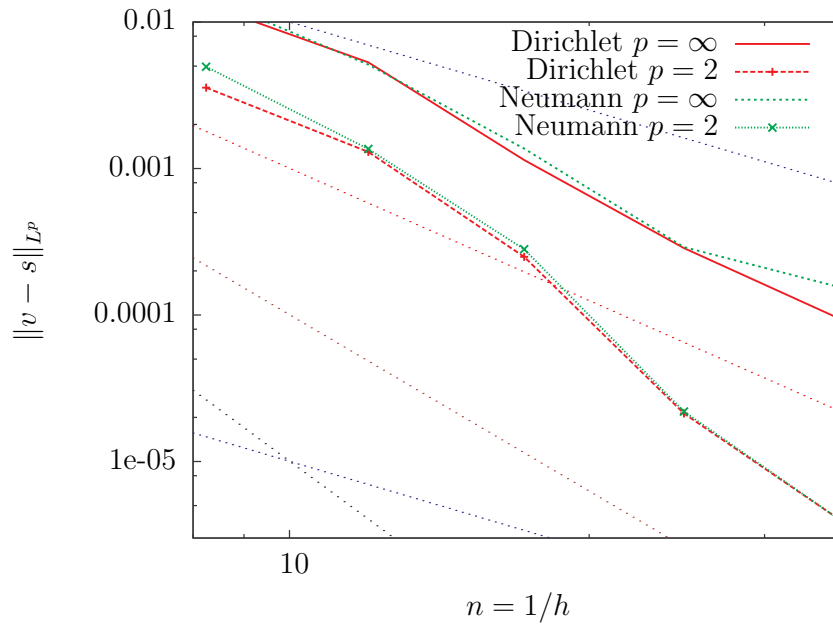
Slika 6.10: Interpolacija  $G^2 K^2 P^1, \nabla s$



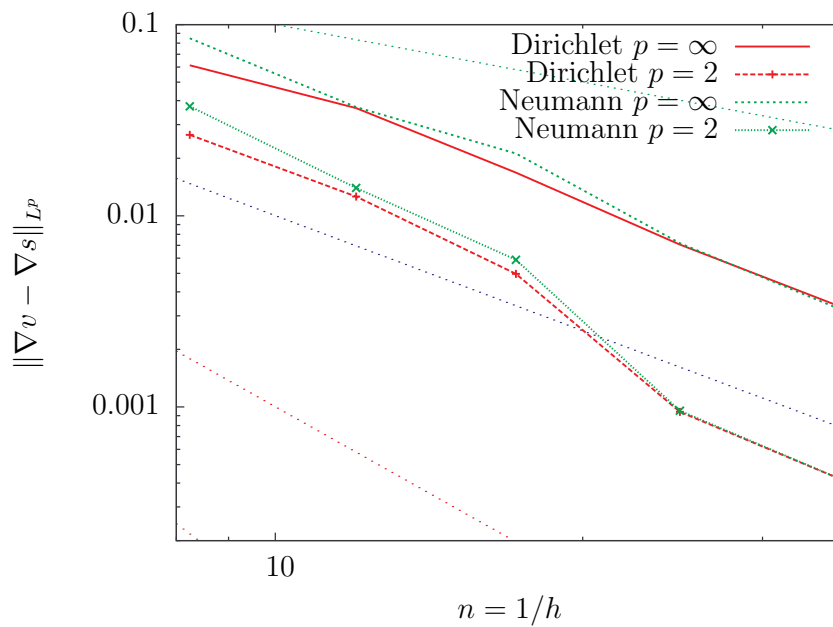
Slika 6.11: Interpolacija  $G^2K^2P^2, s$



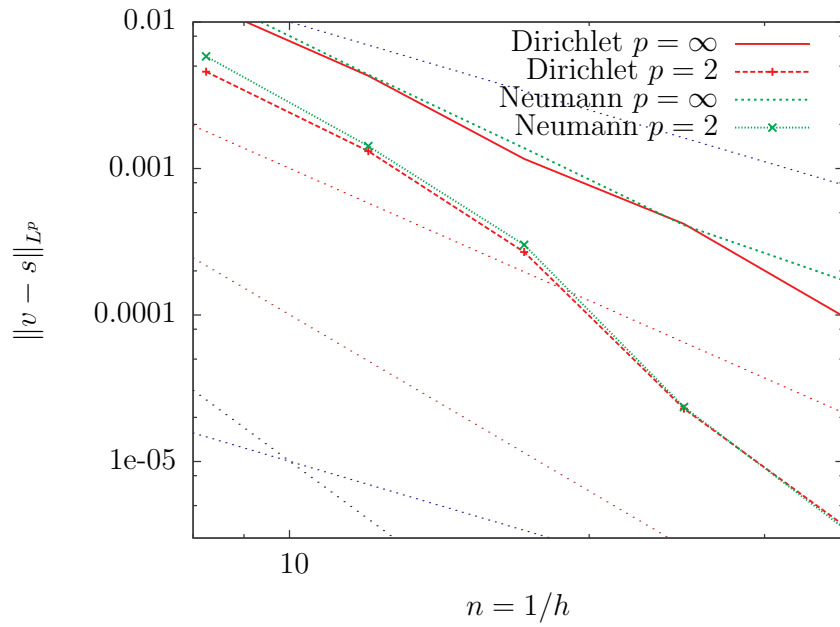
Slika 6.12: Interpolacija  $G^2K^2P^2, \nabla s$



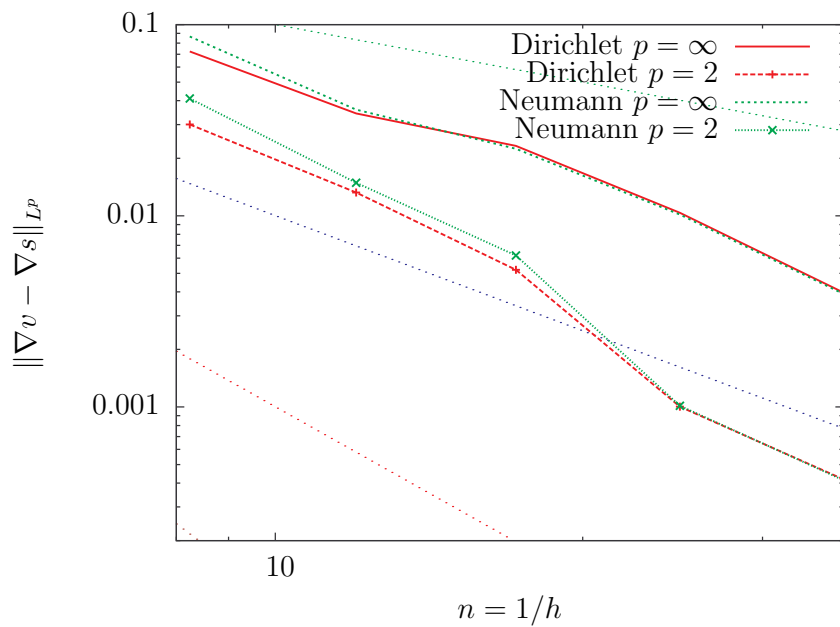
Slika 6.13: Interpolacija  $G^3 K^3 P^2$ ,  $s$



Slika 6.14: Interpolacija  $G^3 K^3 P^2$ ,  $\nabla s$



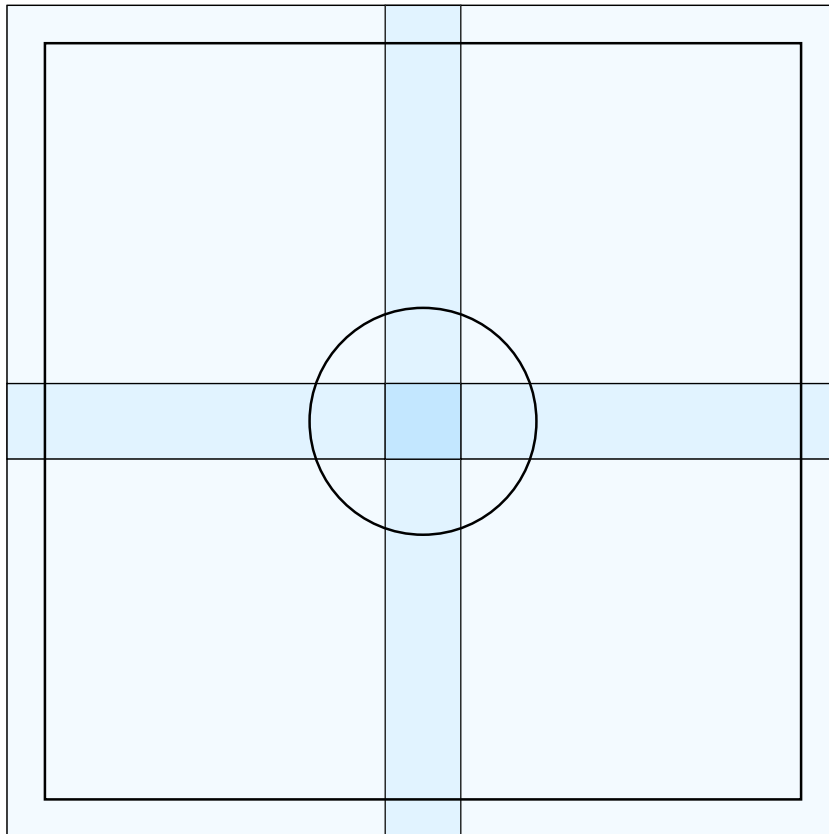
Slika 6.15: Interpolacija  $G^3 K^3 P^3$ ,  $s$



Slika 6.16: Interpolacija  $G^3 K^3 P^3$ ,  $\nabla s$

### 6.1.2. Interpolacija u particiji jedinice

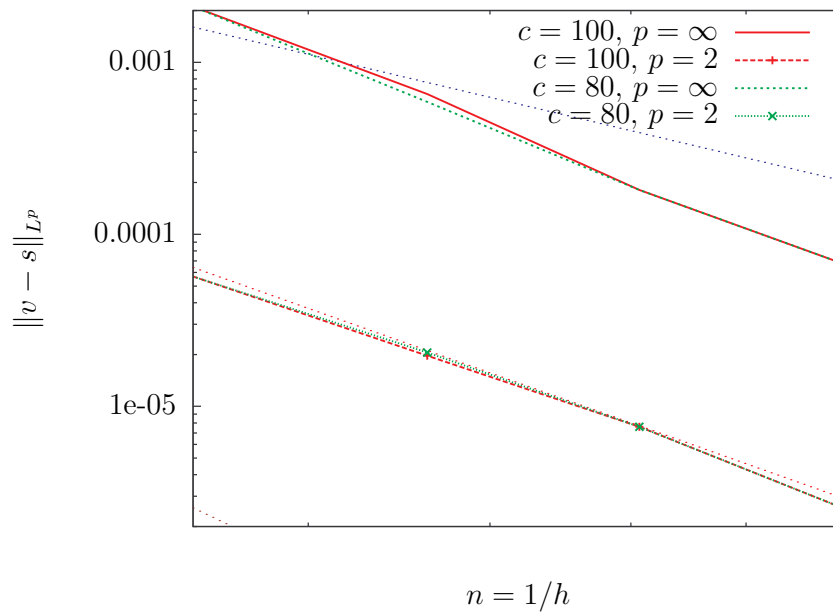
Kada se interpolacija koristi u particiji jedinice, domena se u 2D slučaju pokrije pravokutnicima tako da se oni "malo" preklapaju, kao što to prikazuje slika 6.17. Na slici su nosači kvadrati jer je i vanjski rub domene kvadratnog oblika, pa i implementirani algoritam za računanje nosača dođe do takvog rješenja.



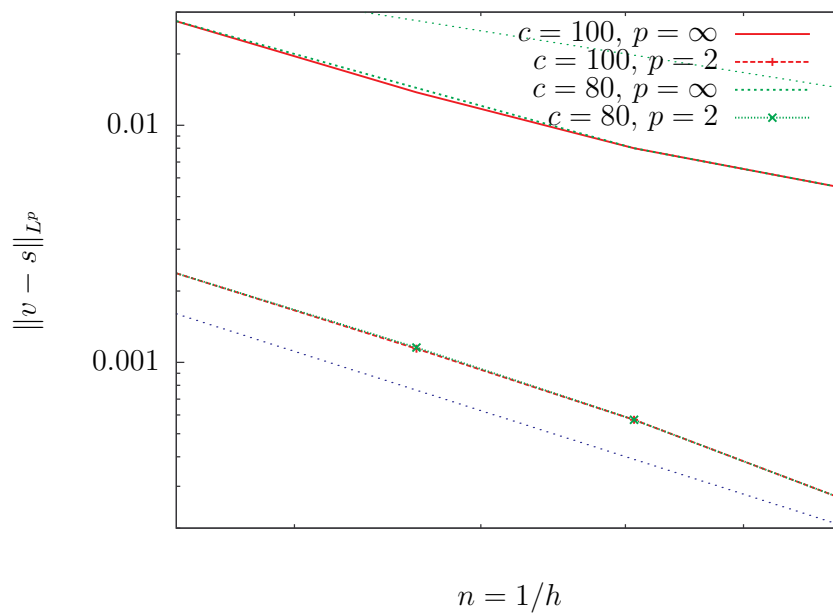
Slika 6.17: Nosači particije jedinice.

Ispitivat će se red točnosti interpolacija, kao i utjecaj glatkoće particije jedinice na red točnosti interpolacije. Također je ispitan utjecaj broja interpolacijskih centara u pojedinom nosaču, što je označeno sa  $c$ . Taj se broj naravno razlikuje od nosača do nosača, no njime se zadaje ciljani broj centara u nosaču algoritmu koji računa particiju jedinice.

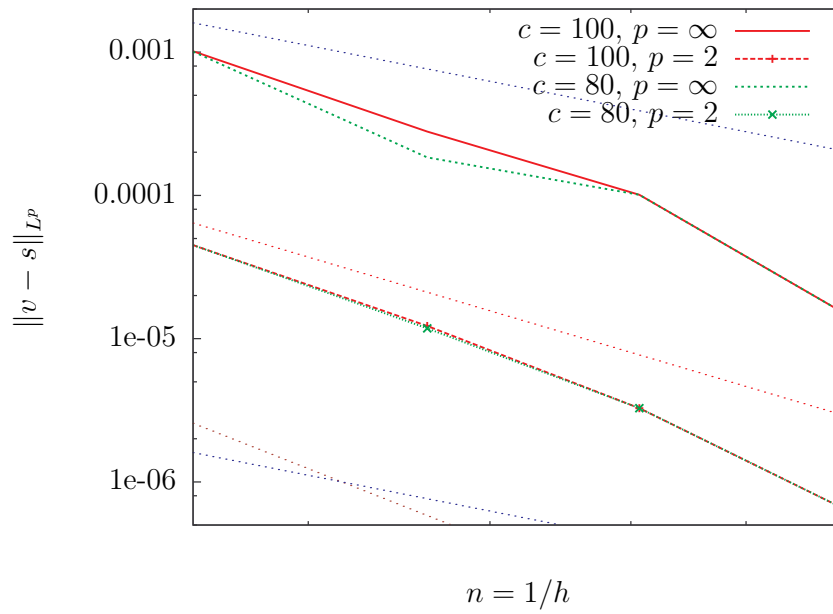
Rezultati pokazuju da u korištenim primjerima glatkoća nosača ne utječe na red točnosti interpolacije, bez obzira na glatkoću baznih funkcija. Štoviše, kao što će biti vidljivo u rezultatima metode kontrolnih volumena u kojoj je interpolacija u particiji


 Slika 6.18: Interpolacija u particiji jedinice,  $G^1K^1P^1$ ,  $\Upsilon \in C^0$ ,  $s$ 

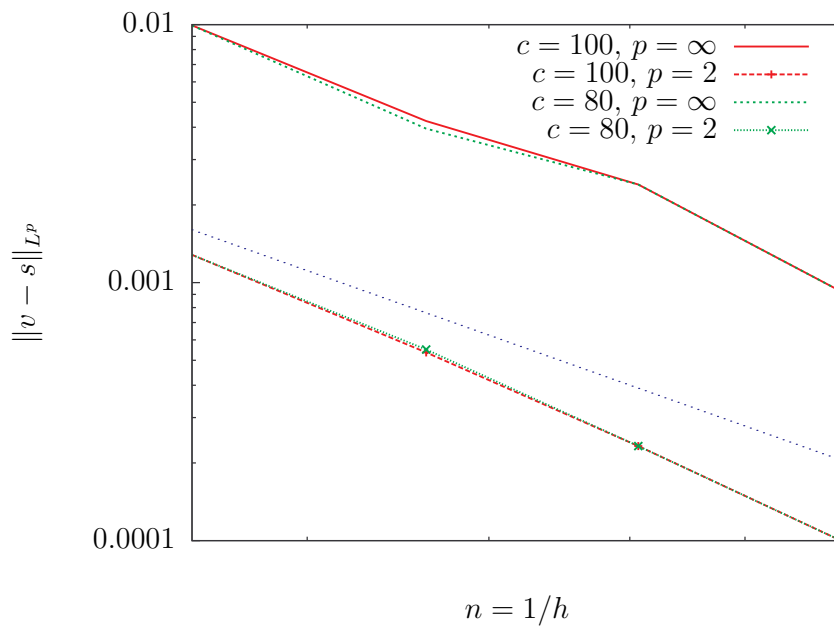
jedinice, dobivaju se potpuno ista rješenja bez obzira na korištenu glatkoću funkcije iščezavanja  $\Upsilon$ .


 Slika 6.19: Interpolacija u particiji jedinice,  $G^1K^1P^1$ ,  $\Upsilon \in C^0$ ,  $\nabla s$





Slika 6.20: Interpolacija u particiji jedinice,  $G^2 K^2 P^2$ ,  $\Upsilon \in C^2$ ,  $s$



Slika 6.21: Interpolacija u particiji jedinice,  $G^2 K^2 P^2$ ,  $\Upsilon \in C^2$ ,  $\nabla s$

## 6.2. Difuzija metodom kontrolnih volumena

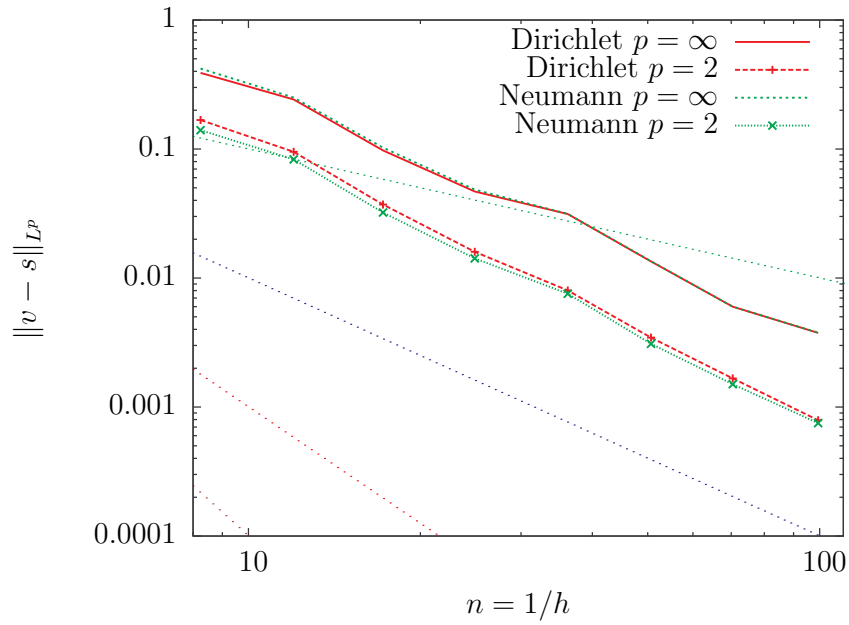
Formulacija metode kontrolnih volumena biti će ispitana na istom primjeru potencijalnog strujanja oko cilindra, kao i kod same interpolacije. Također će se varirati radijalne bazne funkcije, polinomi uz njih, kao i Gaussovi integrali u ćelijama. Na kraju će interpolacija biti testirana u particiji jedinice, pri upotrebi u metodi kontrolnih volumena.

### 6.2.1. Metoda kontrolnih volumena bez particije jedinice

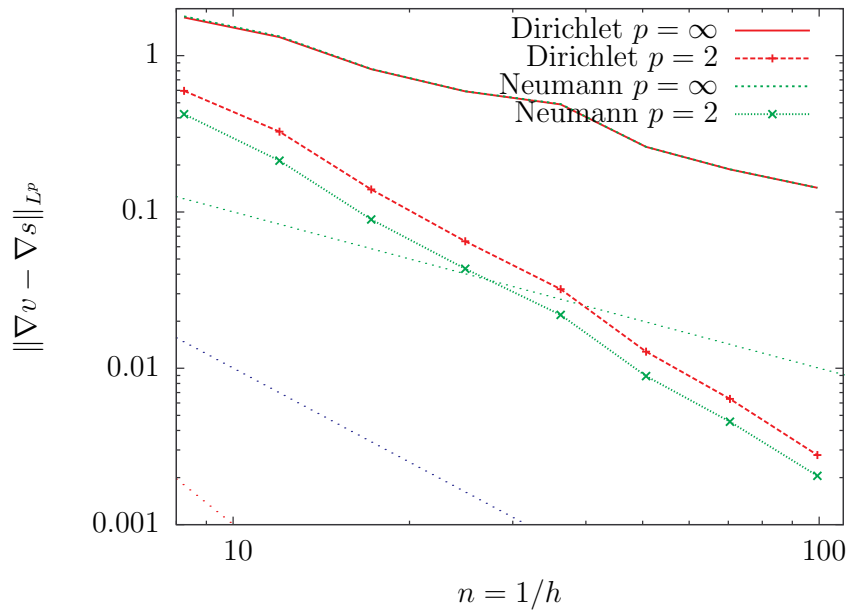
Rješenja metodom kontrolnih volumena s Wendlandovom  $C^2$  funkcijom, i jednom Gaussovom točkom po ćeliji, prikazana su na slici 6.22 za slučaj bez polinoma, slici 6.24 s konstantnim polinomom i slici 6.26 za linearni polinom. Takva formulacija je drugog reda točnosti za najveću grešku funkcije, i preko drugog reda za prosječnu grešku. Gradijent je prvog reda za najveću grešku, i drugog reda točnosti za prosječnu, što se vidi sa slika 6.23, 6.24 i 6.26. Isto kao u slučaju čiste interpolacije, linearni polinom podiže malo red točnosti u odnosu na konstantni polinom, ili slučaj bez polinoma.

Iz slika 6.28 i 6.30 vidi se da je metoda kontrolnih volumena više od drugog reda točnosti u najvećoj greški, i više od trećeg u prosječnoj greški. Gradijent te kombinacije funkcije, polinoma i Gaussovog funkcionala je drugog reda točnosti u najvećoj, i skoro trećeg reda u prosječnoj greški, što se vidi sa slika 6.29 i 6.31.

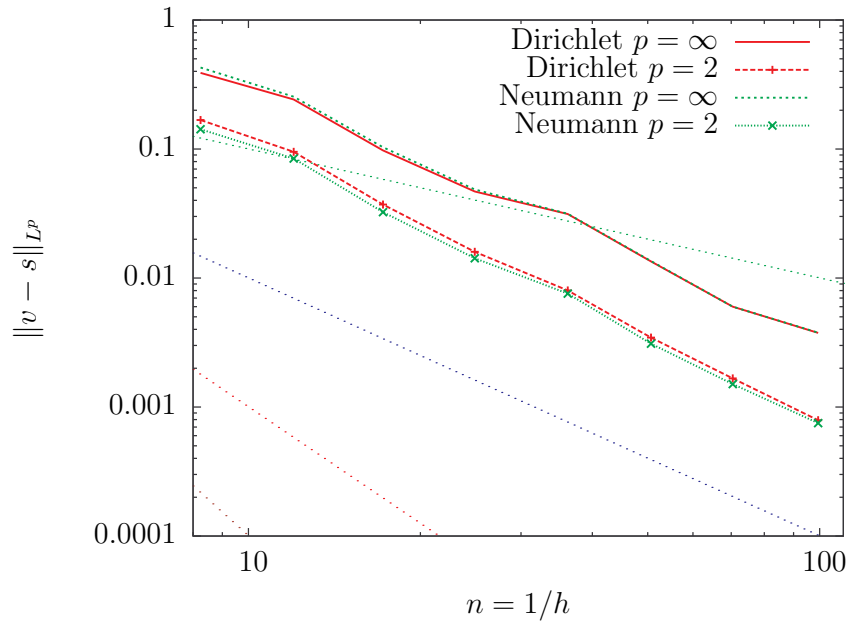
Riješenje metode kontrolnih volumena za grešku interpolanta, u G3W6P2,3 kombinaciji je trećeg reda točnosti za najveću, a četvrtog za prosječnu grešku, kao što se vidi sa slika 6.32 i 6.34. Tu je korištena Gaussova formula s minimalnim brojem točaka za traženu točnost, ali s negativnim težinskim centralnim koeficijentom. Ista kombinacija funkcije, spomenutog Gaussovog integrala, i kvadratnog i kubnog polinoma je preko drugog reda u najvećoj, i preko trećeg u prosječnoj greški, v. slike 6.33 i 6.35.



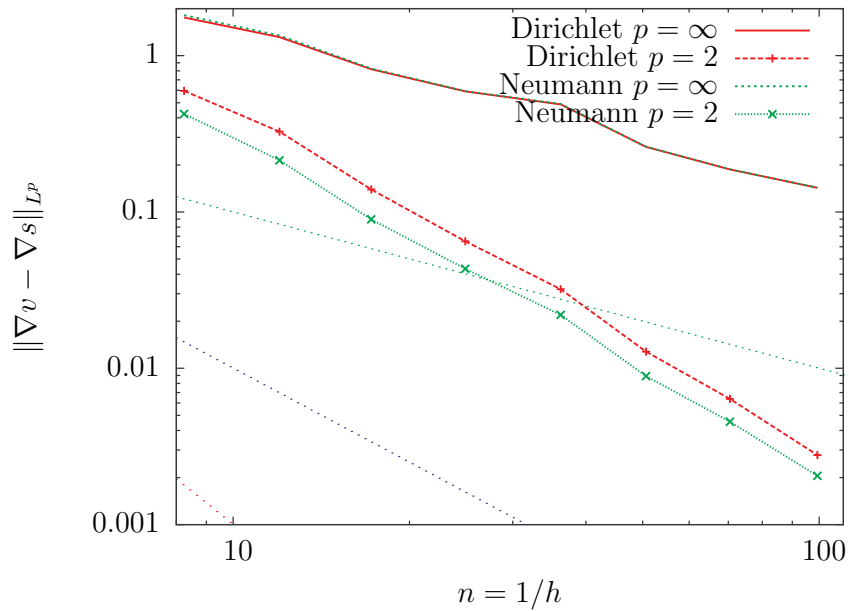
Slika 6.22: MKV  $G^1 K^1 P^{-1}$ ,  $s$



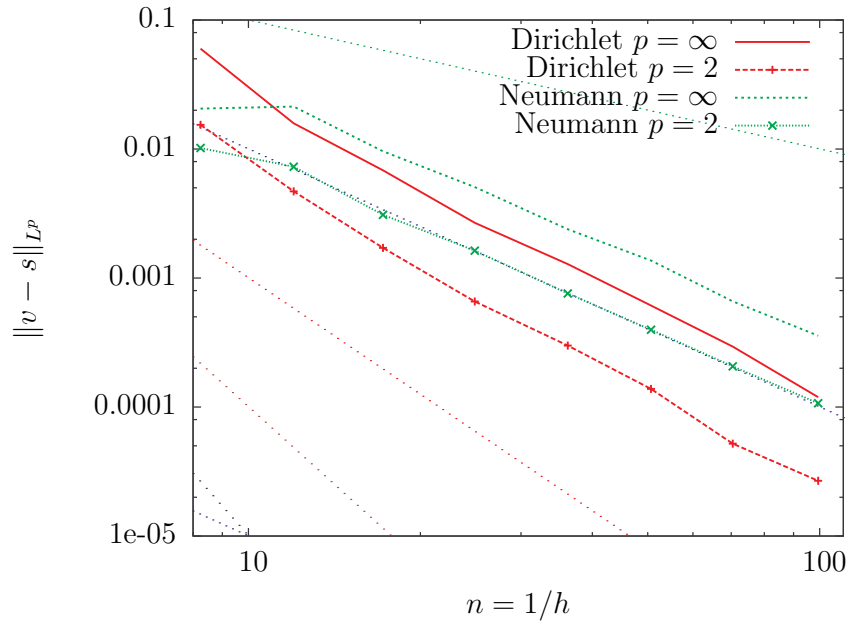
Slika 6.23: MKV  $G^1 K^1 P^{-1}$ ,  $\nabla s$



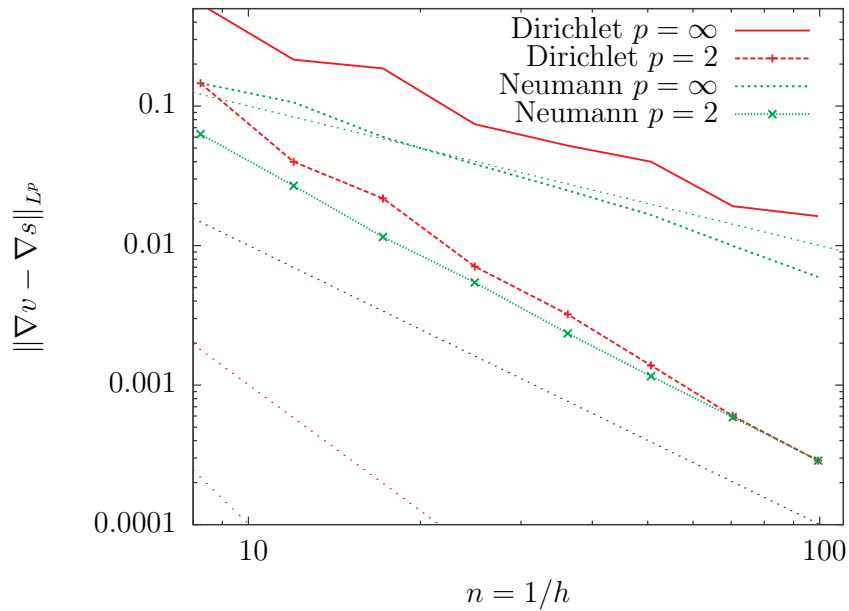
Slika 6.24: MKV  $G^1 K^1 P^0$ ,  $s$



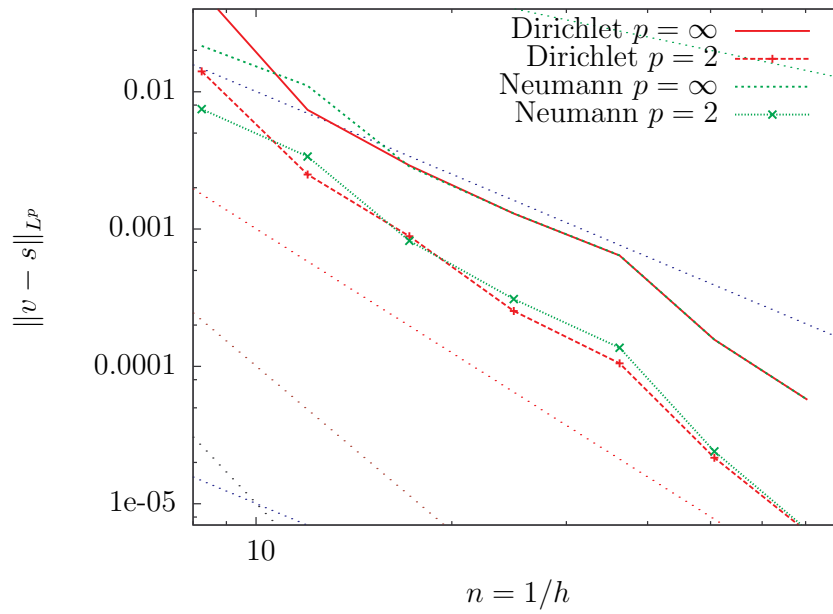
Slika 6.25: MKV  $G^1 K^1 P^0$ ,  $\nabla s$



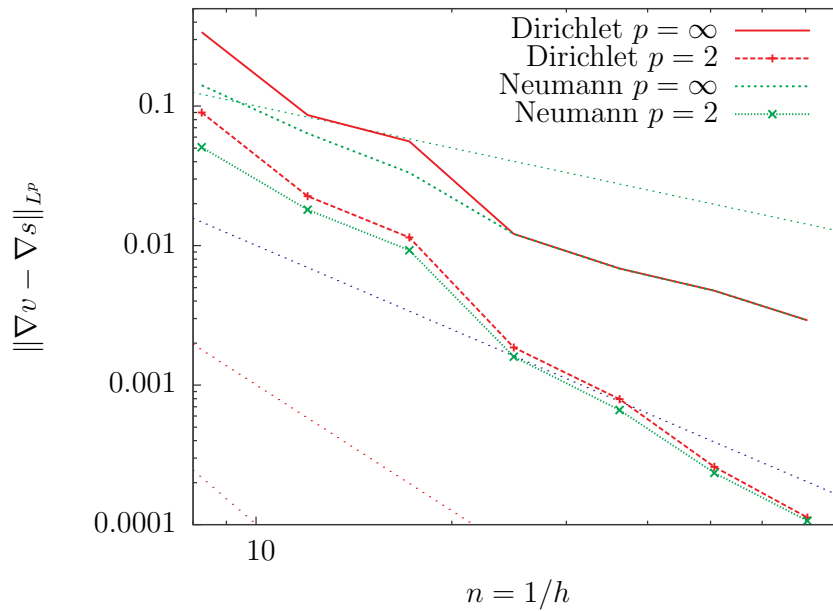
Slika 6.26: MKV  $G^1 K^1 P^1$ ,  $s$



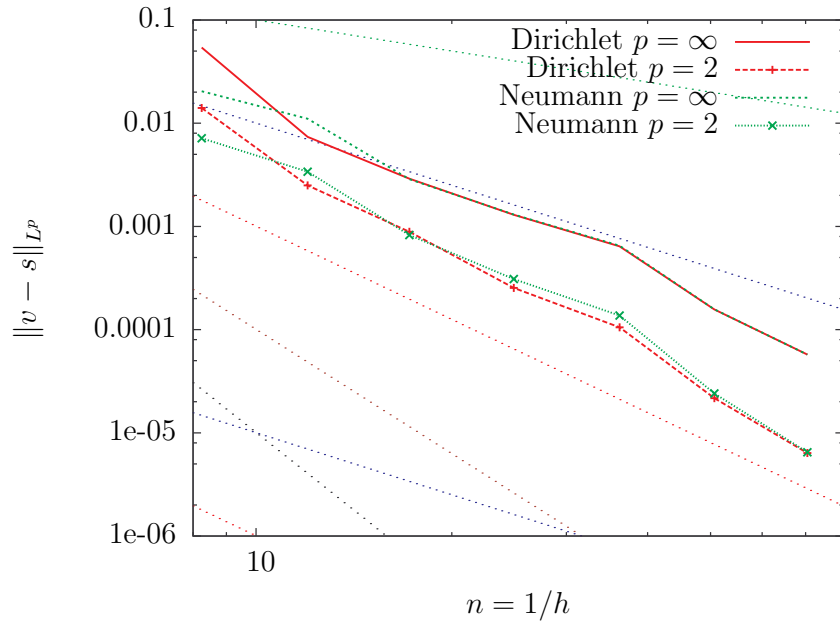
Slika 6.27: MKV  $G^1 K^1 P^1$ ,  $\nabla s$



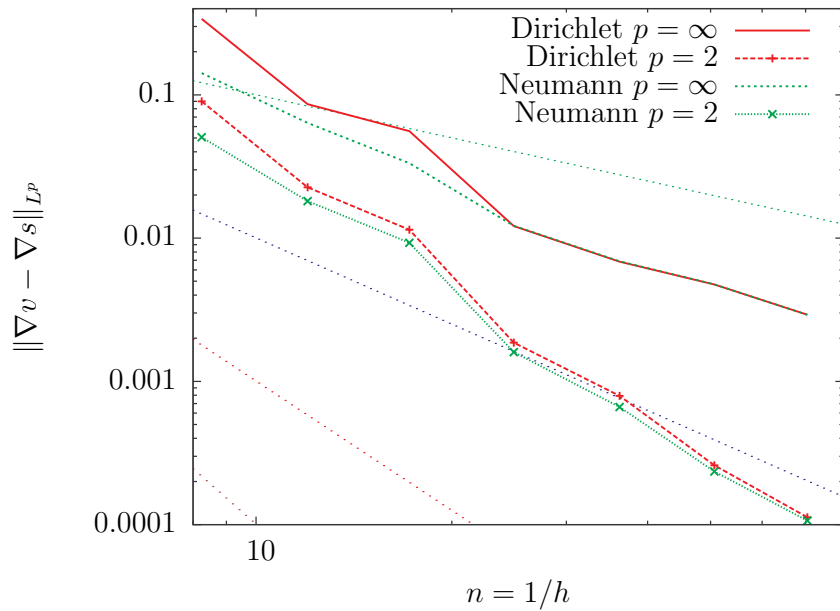
Slika 6.28: MKV  $G^2 K^2 P^1, s$



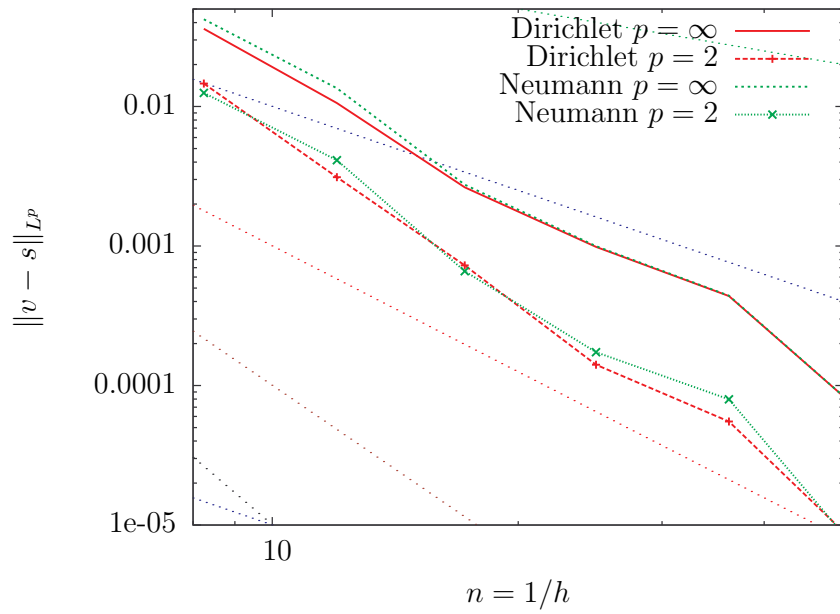
Slika 6.29: MKV  $G^2 K^2 P^1, \nabla s$



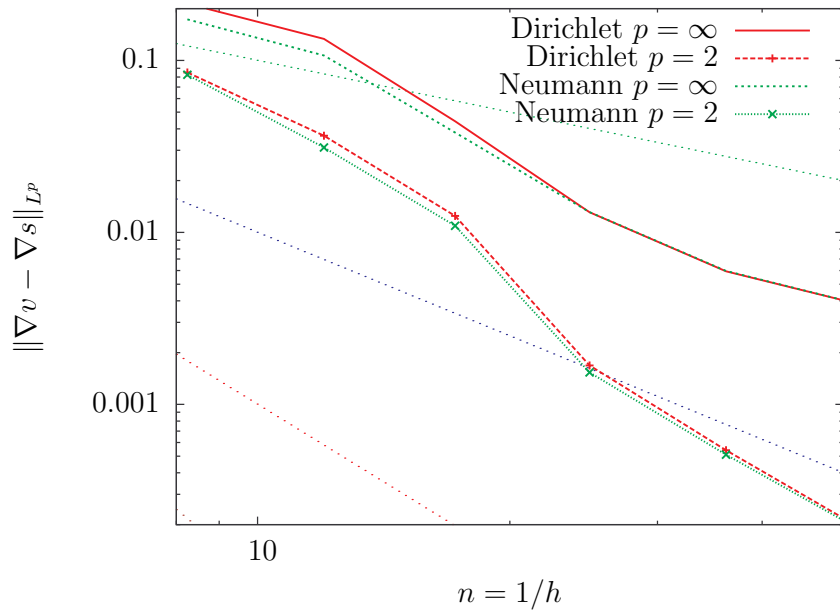
Slika 6.30: MKV  $G^2 K^2 P^2$ ,  $s$



Slika 6.31: MKV  $G^2 K^2 P^2$ ,  $\nabla s$

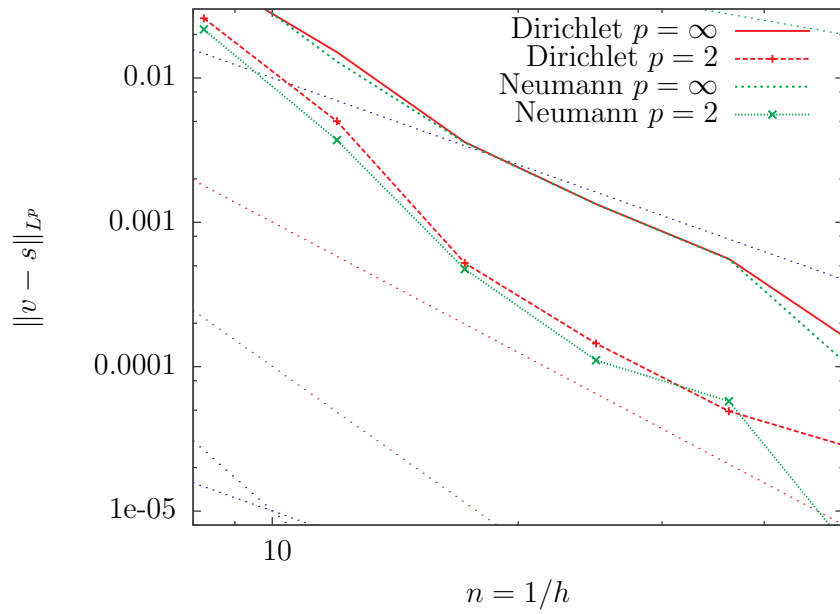


Slika 6.32: MKV  $G^3 K^3 P^2, s$

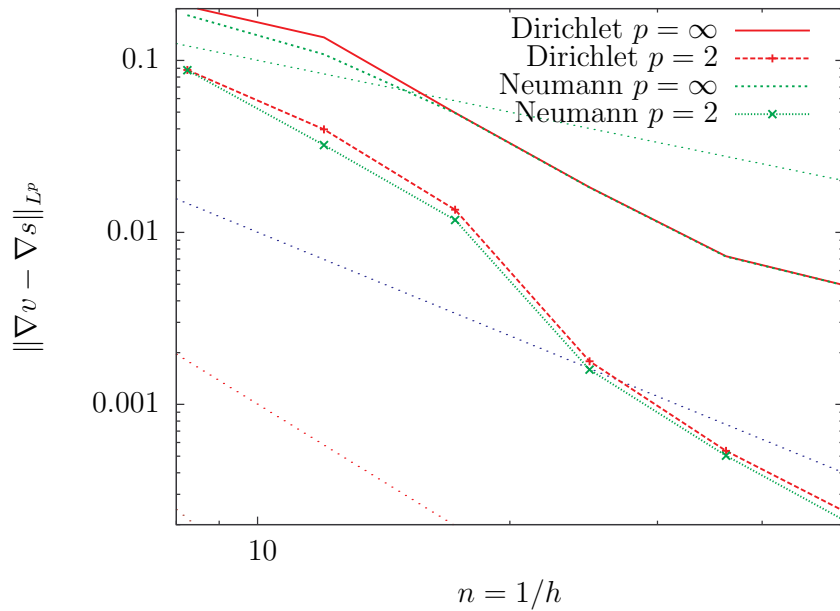


Slika 6.33: MKV  $G^3 K^3 P^2, \nabla s$





Slika 6.34: MKV  $G^3 K^3 P^3, s$



Slika 6.35: MKV  $G^3 K^3 P^3, \nabla s$

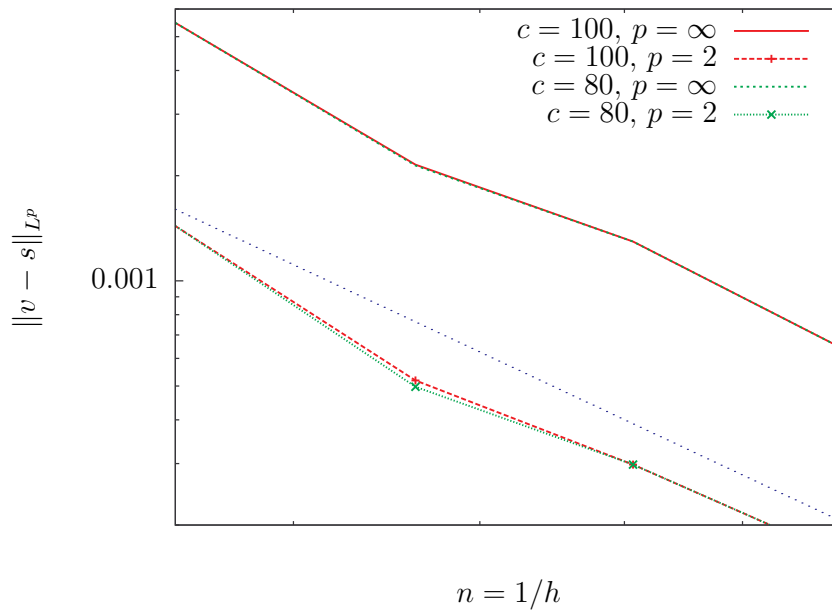
### 6.2.2. Metoda kontrolnih volumena s particijom jedinice

U ovom potpoglavlju su ilustrirani rezultati koji se dobivaju kada se interpolacija radialnim baznim funkcijama u particiji jedinice koristi za rekonstrukciju difuznih protoka u metodi kontrolnih volumena.

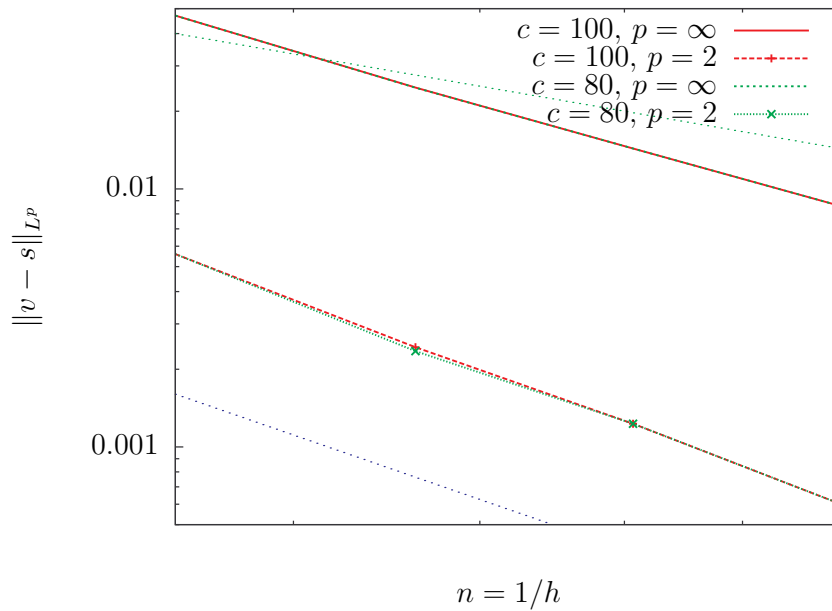
Slika 6.36 prikazuje red točnosti  $G^1K^1P^1$  interpolacije u particiji jedinice, te ilustrira utjecaj boja točaka  $c$  u nosačima. Na slici 6.37 prikazana je greška derivacije iste interpolacije.

Red interpolacije  $G^2K^2P^2$  prikazana je na slikama 6.38 i 6.40, dok red njene derivacije prikazana na slikama 6.39 i 6.41.

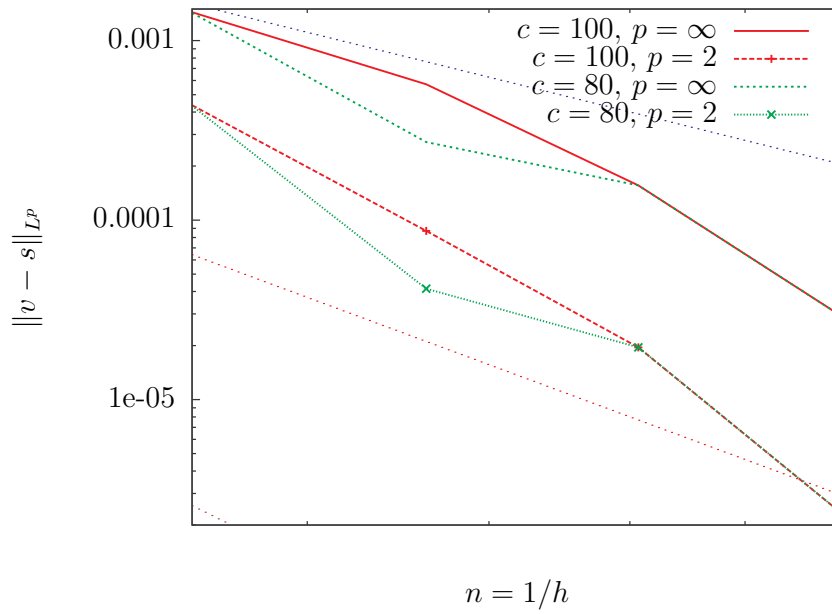
Na slikama 6.42 i 6.43 je prikazana greška funkcije, odnosno greška gradijenta, proračuna Laplaceovog problema na mreži od 620 kontrolnih volumena, za interpolaciju  $G^2K^2P^2$ . Isti problem je riješen na mreži od 9870 kontrolnih volumena, što je prikazano na slikama 6.44 i 6.45. Greške gradijenta dobivenoga polja, slike 6.43 i 6.45, su u logaritamskom mjerilu. Prelaskom sa 620 kontrolnih volumena na 9870 kontrolnih volumena, red točnosti metode za prosječnu grešku je 4.65, a za 3.69 najveću grešku. Raspored nosača patricije jedinice u rješenju na 620 kontrolnih volumena je točno onakav kakav je prikazan u shematskom prikazu 6.17. Sa slika 6.42 i 6.43 je vidljivo da se najveća greška pojavljuje u vrhovima kvadratičnih nosača.



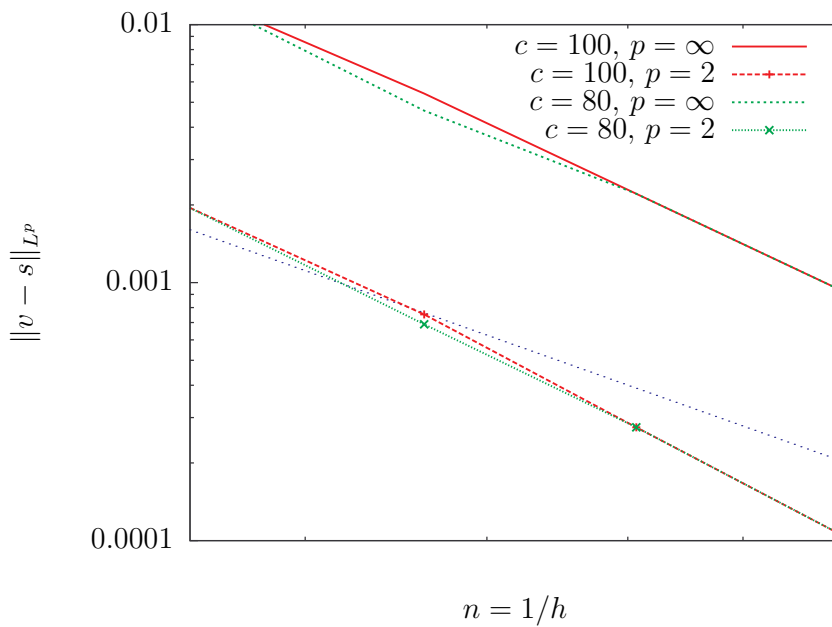
Slika 6.36: MKV particijom jedinice,  $G^1 K^1 P^1$ ,  $\Upsilon \in C^0$ ,  $s$



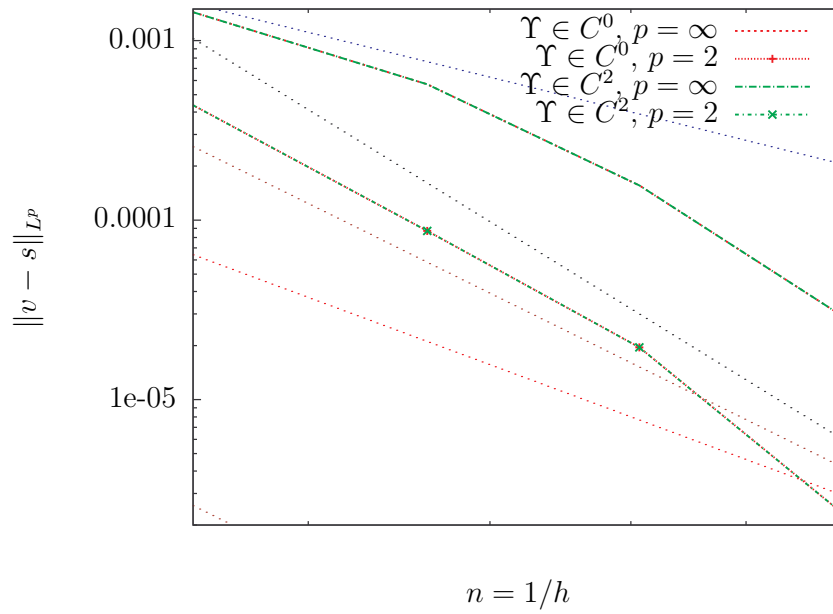
Slika 6.37: MKV particijom jedinice,  $G^1 K^1 P^1$ ,  $\Upsilon \in C^0$ ,  $\nabla s$



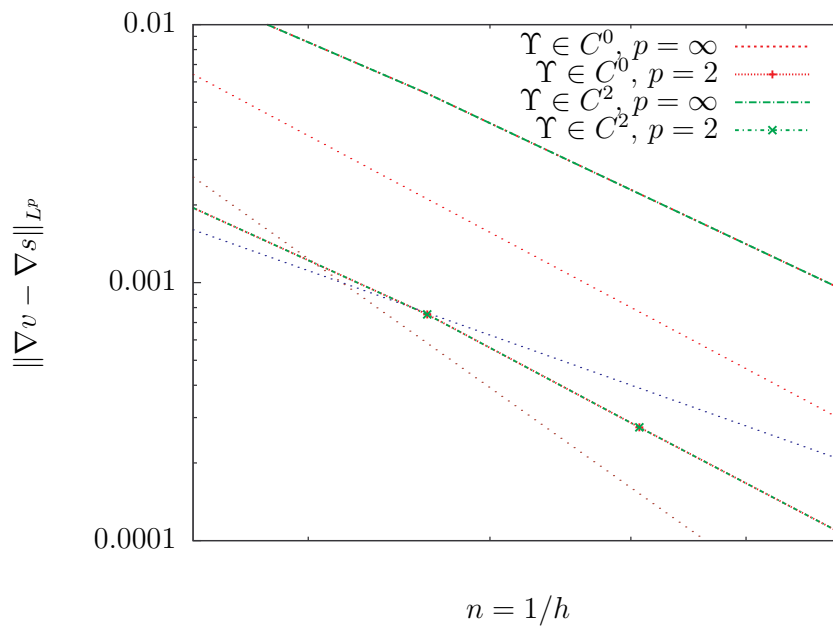
Slika 6.38: MKV particijom jedinice,  $G^2K^2P^2$ ,  $\Upsilon \in C^2$ ,  $s$



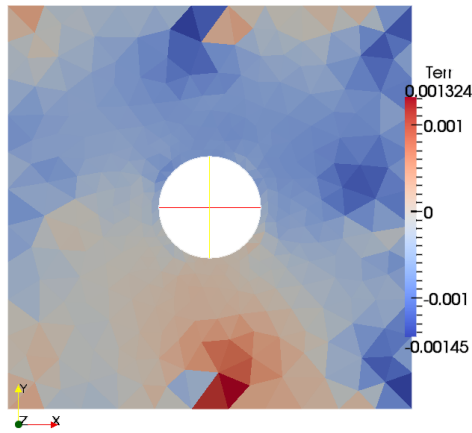
Slika 6.39: MKV particijom jedinice,  $G^2K^2P^2$ ,  $\Upsilon \in C^2$ ,  $\nabla s$



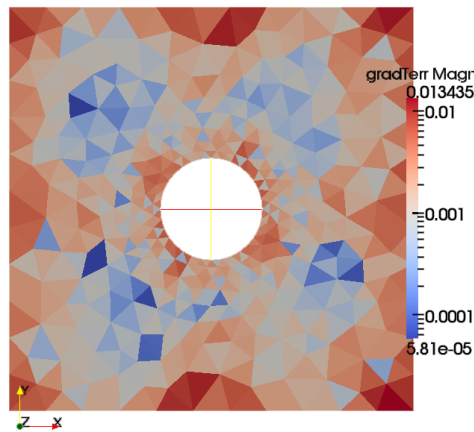
Slika 6.40: MKV particijom jedinice,  $G^2K^2P^2$ , usporedba  $\Upsilon^0$  i  $\Upsilon^2$ ,  $s$



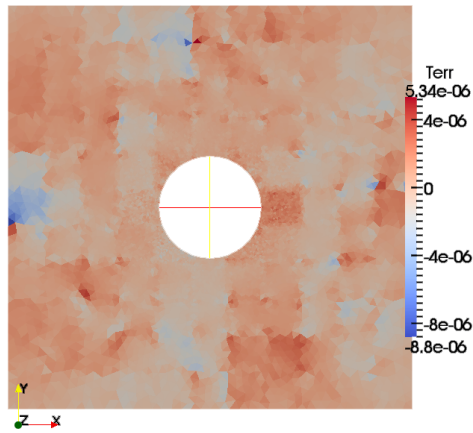
Slika 6.41: MKV particijom jedinice,  $G^2K^2P^2$ , usporedba  $\Upsilon^0$  i  $\Upsilon^2$ ,  $\nabla s$



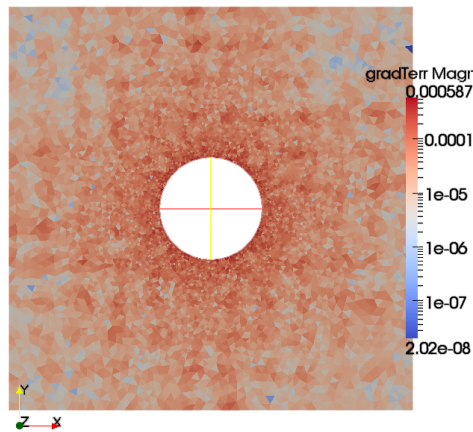
Slika 6.42: Greška interpolanta  $G^2K^2P^2$  u particiji jedinice  $\Upsilon^0$ ,  $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 620 ćelija.  $\|v - s\|_{L^2(\Omega)} = 0.000444345$ ,  $n = 24.9$ .



Slika 6.43: Greška gradijenta interpolanta  $G^2K^2P^2$  u particiji jedinice  $\Upsilon^0$ ,  $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 620 ćelija, u log mjerilu.  $\|\nabla v - \nabla s\|_{L^2(\Omega)} = 0.00196839$ ,  $n = 24.9$ .



Slika 6.44: Greška interpolanta  $G^2K^2P^2$  u particiji jedinice  $\Upsilon^0$ ,  $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 9870 ćelija.  $\|v - s\|_{L^2(\Omega)} = 7.12347e - 07$ ,  $n = 99.348$ .



Slika 6.45: Greška gradijenta interpolanta  $G^2K^2P^2$  u particiji jedinice  $\Upsilon^0$ ,  $c = 100$ , dobivenoga metodom kontrolnih volumena na mreži od 9870 ćelija, u log mjerilu.  $\|\nabla v - \nabla s\|_{L^2(\Omega)} = 5.01201e - 05$ ,  $n = 99.348$ .

### 6.3. Konvekcija-difuzija

U ovom primjeru računa se konvektivno-difuzijska jednadžba u pravokutnom kanalu duljine  $L = 3$  u  $x$  smjeru, jedinične širine u  $y$  smjeru, konstantnom brzinom  $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$  i koeficijentom difuzije  $\nu_\psi = \frac{1}{Pe} = 0.01$ . Rubni uvjeti su:

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \psi(x, 1) = 0, \\ \psi(0, y) &= \sin(\pi y), \\ \frac{\partial \psi(L, y)}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Analitičko rješenje promatranog problema dano je sa [9]:

$$\psi(x, y) = \sin(\pi y) \frac{r_2 e^{r_1 x + r_2 L} - r_1 e^{r_1 L + r_2 x}}{r_2 e^{r_2 L} - r_1 e^{r_1 L}},$$

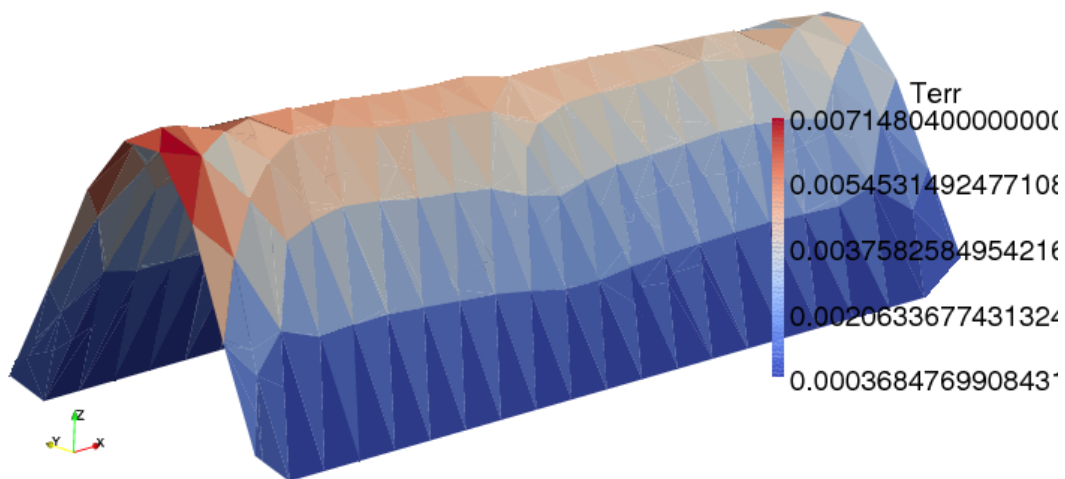
gdje je:

$$r_{1,2} = \frac{v_\infty}{2} Pe \pm \sqrt{\left(\frac{v_\infty}{2} Pe\right)^2 + \pi^2}.$$

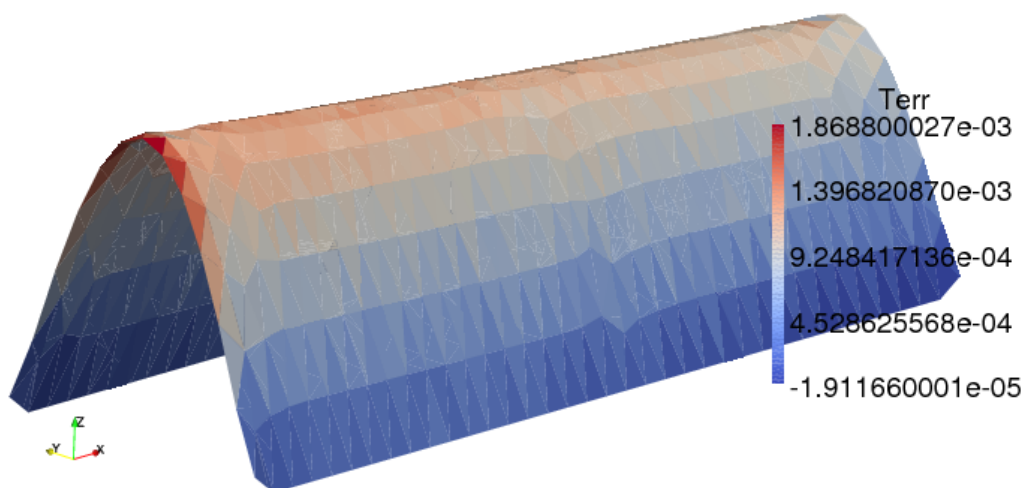
Riješenje za  $G^3 K^3 P^3$  interpolaciju dobiveno je na mrežama od 182, 328, 436, 686 i 1002 kontrolnih volumena, dok je za interpolaciju  $G^2 K^2 P^2$  pored navedenih korištena i mreža od 1524 kontrolnih volumena.

Na slici 6.48 prikazano je rješenje i greška za  $G^2 K^2 P^2$ , a na slici 6.49 rješenje i greška  $G^3 K^3 P^3$  interpolacije u metodi kontrolnih volumena. Iznos riješena predstavlja visina površine u smjeru osi  $z$ , dok boja predstavlja grešku. Sa slika se vidi da se postiže red točnosti viši od drugog kako za prosječnu, tako i za najveću grešku. Dobiveni red točnosti, za najveću grešku u domeni, je veći od reda točnosti dobivenoga aproksimacijom polinomima u [9] kako za rekonstrukciju egzaktnu za kvadratni, tako i za onu egzaktnu za kubni polinom.

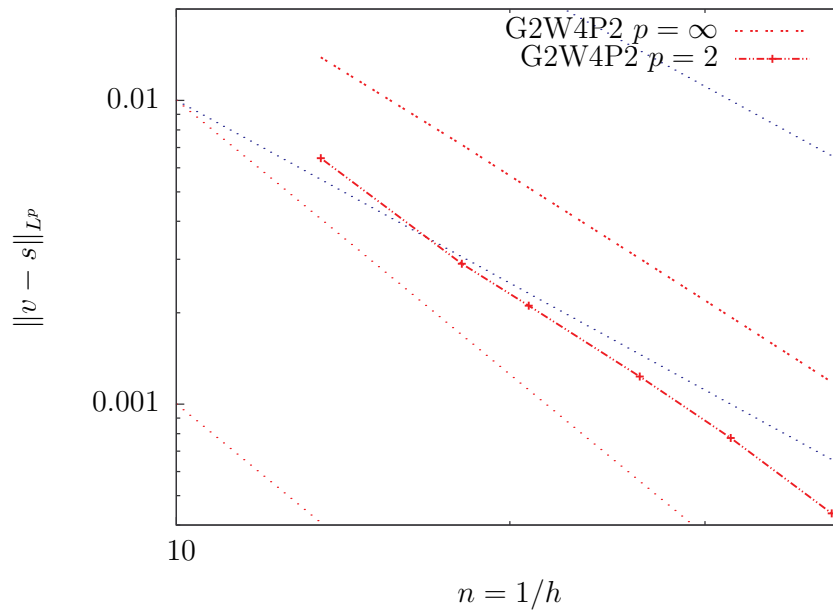




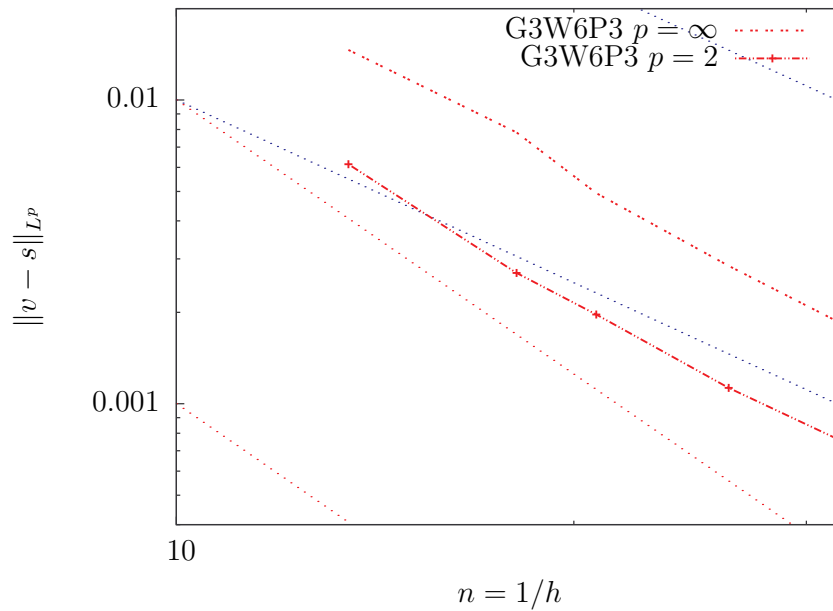
Slika 6.46: Greška  $G^3 K^3 P^3$  interpolacije na mreži od 328 ćelija



Slika 6.47: Greška  $G^3 K^3 P^3$  interpolacije na mreži od 1002 ćelije



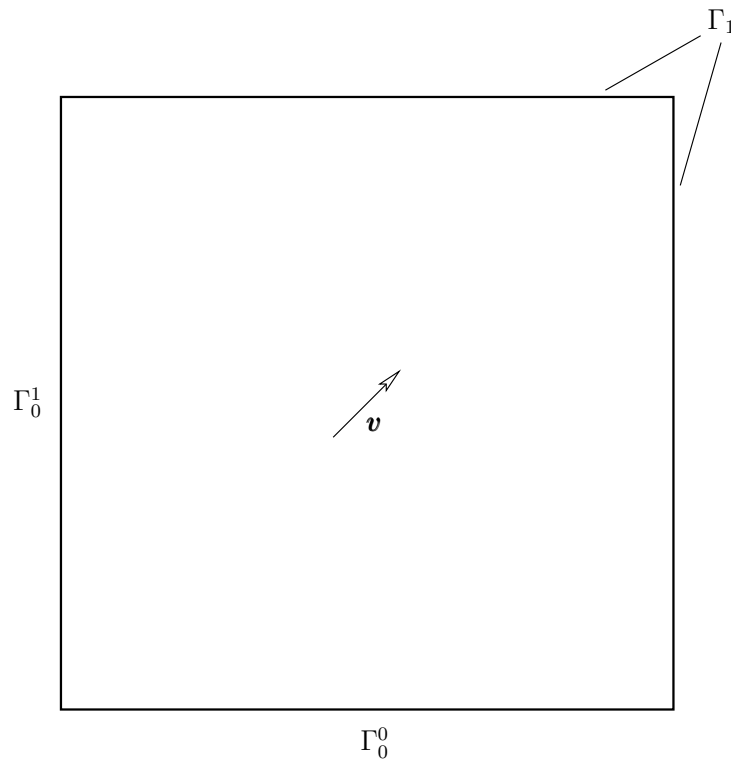
Slika 6.48: Greška  $G^2K^2P^2$  interpolacije za problem konvekcije-difuzije



Slika 6.49: Greška  $G^3K^3P^3$  interpolacije za problem konvekcije-difuzije

## 6.4. Konvekcija

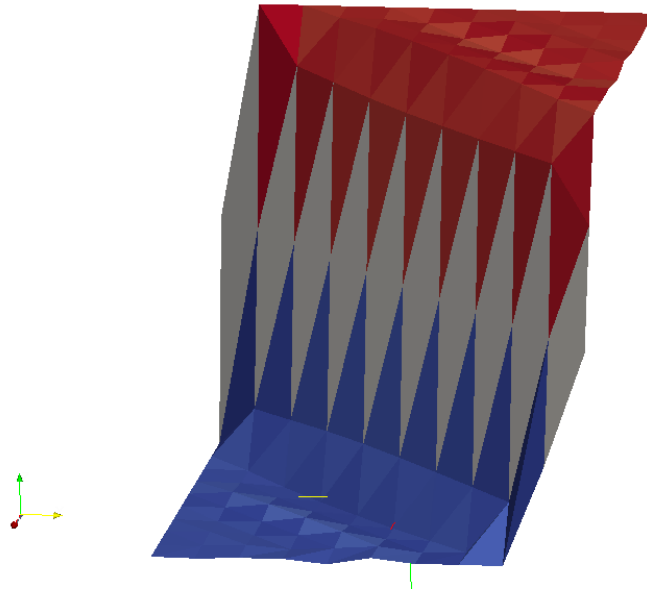
Kod čiste konvekcije moguće je koristiti i Wendlandovu  $C^0$  funkciju, pri čemu se u interpolacijskim centrima na Neumannovom rubu domene pojavljuju diskontinuiteti u vrijednosti funkcije kao što to prikazuje slika 3.6. No nema diskontinuiteta u vrijednosti u unutrašnjosti domene. Upotreba Wendlandovih  $C^0$  funkcija za rekonstrukciju konvekcije je moguća u slučajevima gdje ne treba evaluirati gradijent interpolanta u težištima ćelija, što je jasno već i sa slike 3.5.



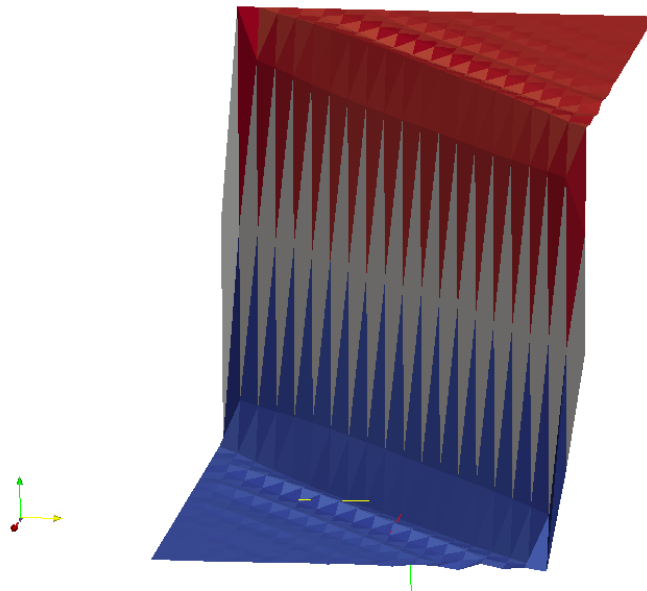
Slika 6.50: Kvadratna domena kod konvekcije "stepenastog" profila.

Rezultati sa stepenastim profilom pokazuju da se oscilacije ne smanjuju profinjavanjem mreže što upućuje da se radi o Gibbsovom fenomenu,

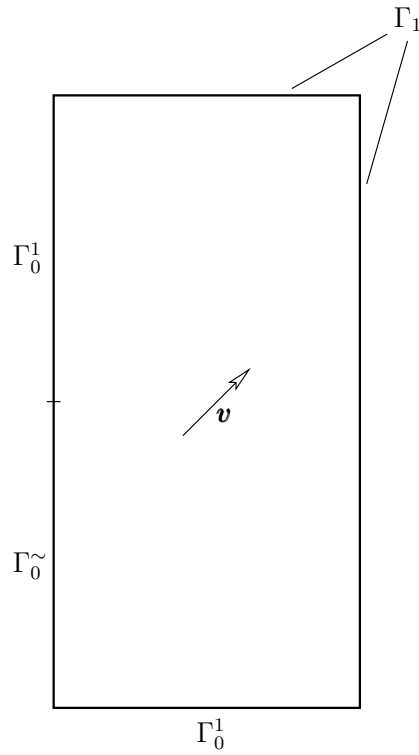
Usporedbom sa numeričkim proračunom korištenih primjera linearnom shemom za konvekciju, metoda kontrolnih volumena s interpolacijom radijalnim baznim funkcijama ima manje numeričke difuzije, i manje joj oscilira rješenje.



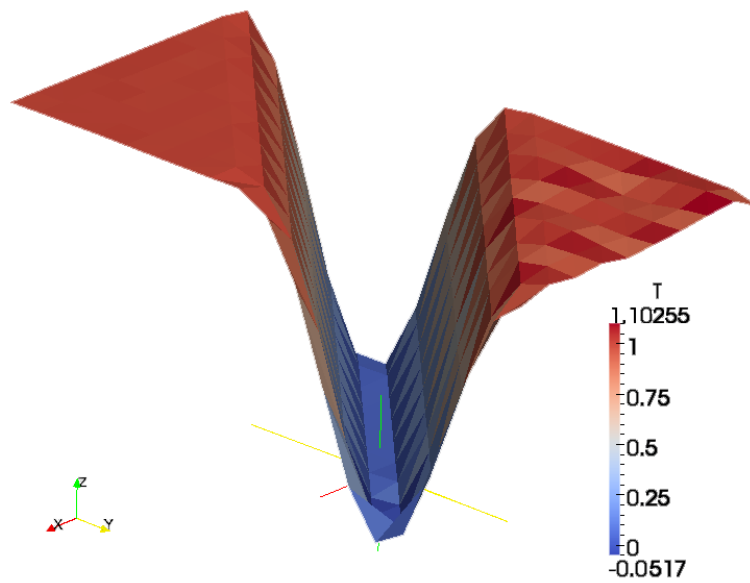
Slika 6.51: Konvekcija stepenastog profila, 10x10 kontrolnih volumena



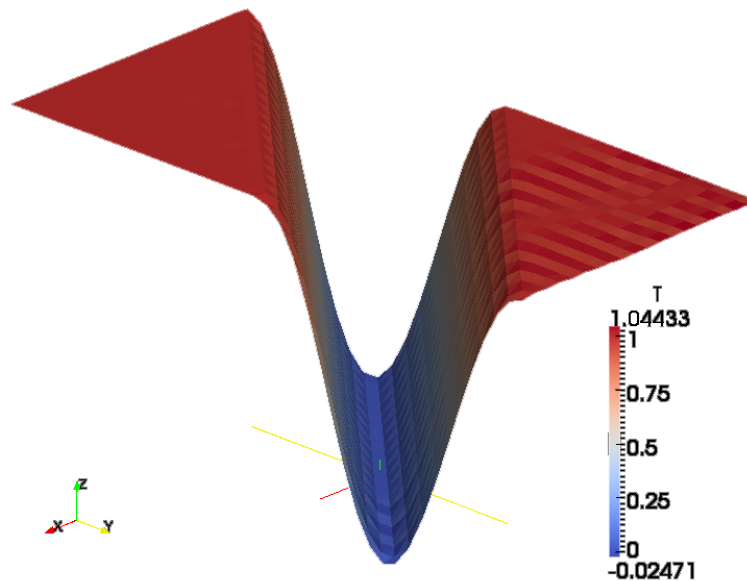
Slika 6.52: Konvekcija stepenastog profila, 20x20 kontrolnih volumena



Slika 6.53: Pravokutna domena kod konvekcije  $\sin^2$  profila.



Slika 6.54: Konvekcija  $\sin^2$  profila, 9x18 kontrolnih volumena

Slika 6.55: Konvekcija  $\sin^2$  profila, 19x38 kontrolnih volumena

## 6.5. Strujanje u šupljini

U ovom poglavlju prikazani su rezultati predložene formulacije primijenjeni na proračun strujanja u šupljini. Na slikama, koje su u logaritamskom mjerilu, su prikazane greške iznosa polja brzine na mrežama od 44 ćelije (slika 6.57), 148 ćelija (slika 6.59) i 572 ćelije (slika 6.61). Slike 6.58, 6.60, i 6.62 prikazuju  $x$  komponentu greške polja brzine na istim mrežama, te se s njih jasno vide oscilacije riješena koje u gornjim vrhovima domene uzrokuje diskontinuitet rubnog uvjeta u  $x$  komponenti polja brzine. U donjoj polovici domene oscilacije su prigušene viskoznošću u određenoj mjeri, te se donja polovica domene koristi za procjenjivanje reda točnosti metode, što je prikazano na slici 6.56.

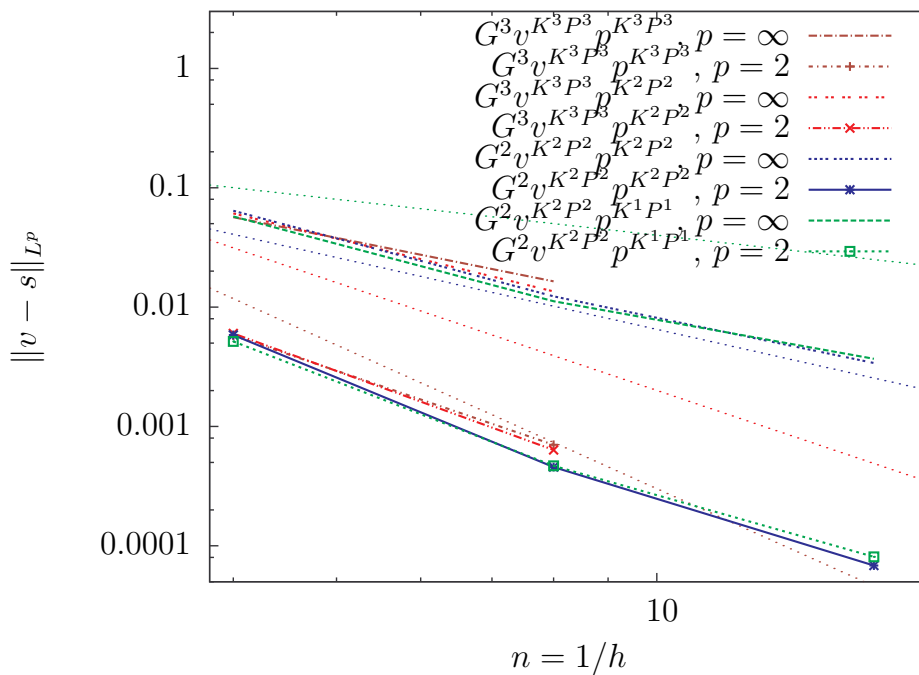
Svi prikazani primjeri odgovaraju Reynoldsovom broju  $Re = 1$ . Greška je izračunata na način da je osnovnom metodom riješeno strujanje na mreži od 250 000 kontrolnih volumena, te je to rješenje uzeto kao "tačno".

Sa slika se vidi da je greška vrlo mala čak i na jako gruboj mreži, osim u vrhovima u kojima se oscilacije izazivaju. Provedeni su i proračuni sa približnim povezivanjem brzine i tlaka, te rješenje egzaktne projekcije ima manju grešku od približne, i glađe je.

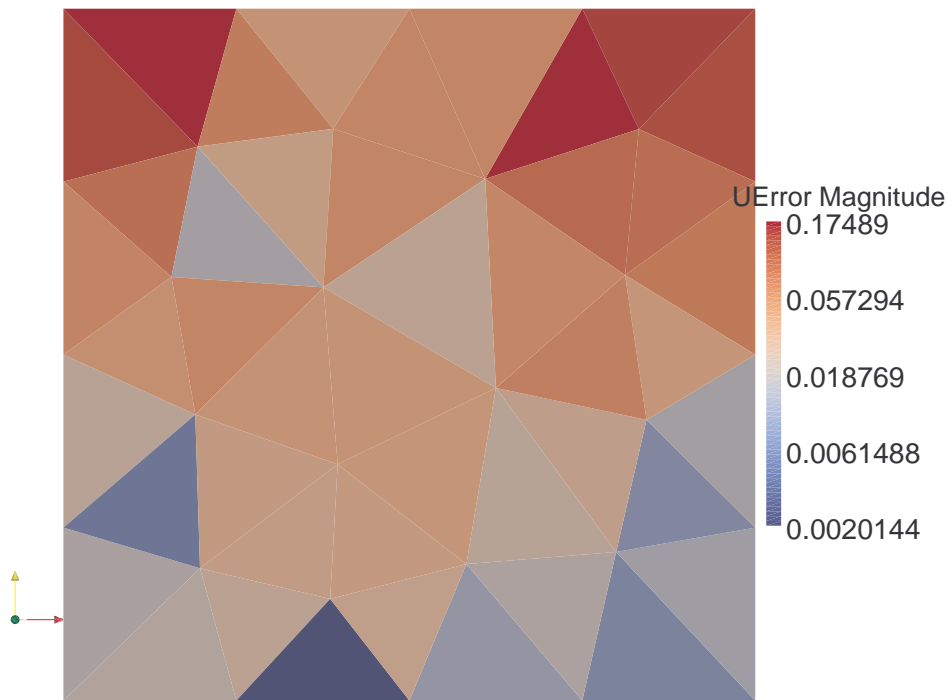
Povećavanjem Reynoldsovog broja ima za posljedicu da se oscilacija rješenja, uzrokovana diskontinuitetom u rubnom uvjetu, iz vrhova širi dublje u unutrašnjost domene.

Uvidom u sliku 6.56 jasno je da se ne može zaključiti da je postignut visoki red

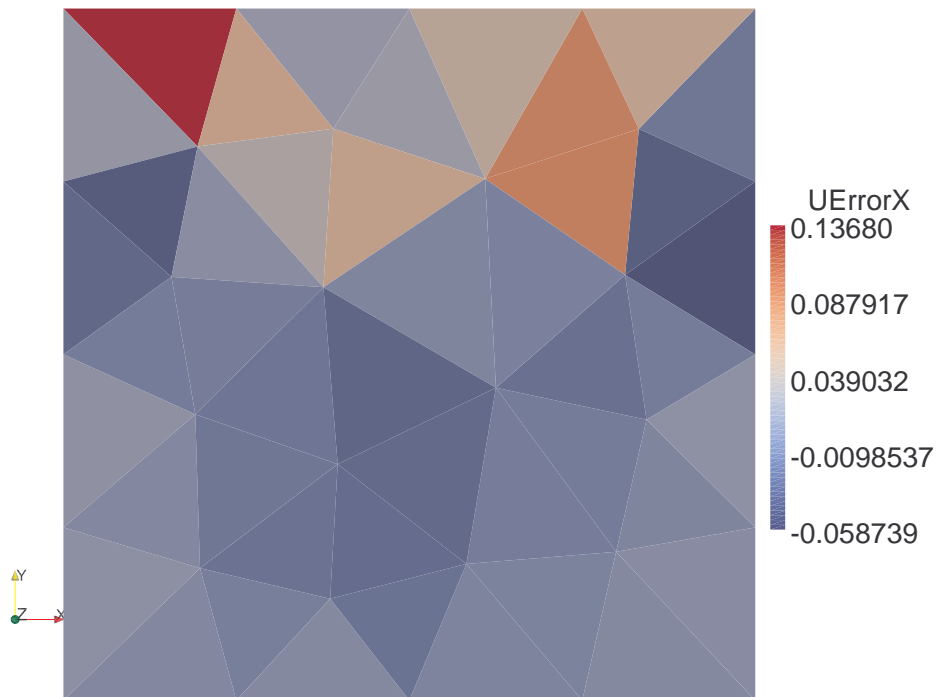
točnosti formulacije na odabranom primjeru. Dva su moguća razloga za takav rezultat. Prvo, diskontinuitet u gornjim vrhovima uzrokuje grešku koja se ne smanjuje profinjavanjem mreže, a ne može se sa sigurnošću zaključiti koliko ona smanjuje red točnosti u donjoj polovici domene gdje se greška mjeri. Drugi razlog je taj što se u proračunu koristi Neumannov rubni uvjet za tlak, obzirom da zadani rubni uvjet za brzinu zadovoljava globalno jednadžbu količine gibanja, pa se zadavanjem Neumannovog ne dozvoljava korekcija brzine po rubnim stranicama domene. To je kontroverzna tema jer je poznato da takav odabir rubnog uvjeta za tlak narušava red točnosti metode pri manjim  $Re$ , pogotovo ako se radi o metodi visokog reda [53]. Sa slike 6.56 se vidi i da boji red točnosti postiže rekonstrukcijom koja je egzaktna za kvadratne polinome od rekonstrukcije koja je egzaktna za kubne polinome. Iz tog razloga se ne može donijeti zaključak što narušava visoki red točnosti bez daljnjih numeričkih eksperimenata.



Slika 6.56: Greška brzine pri strujanju u šupljini

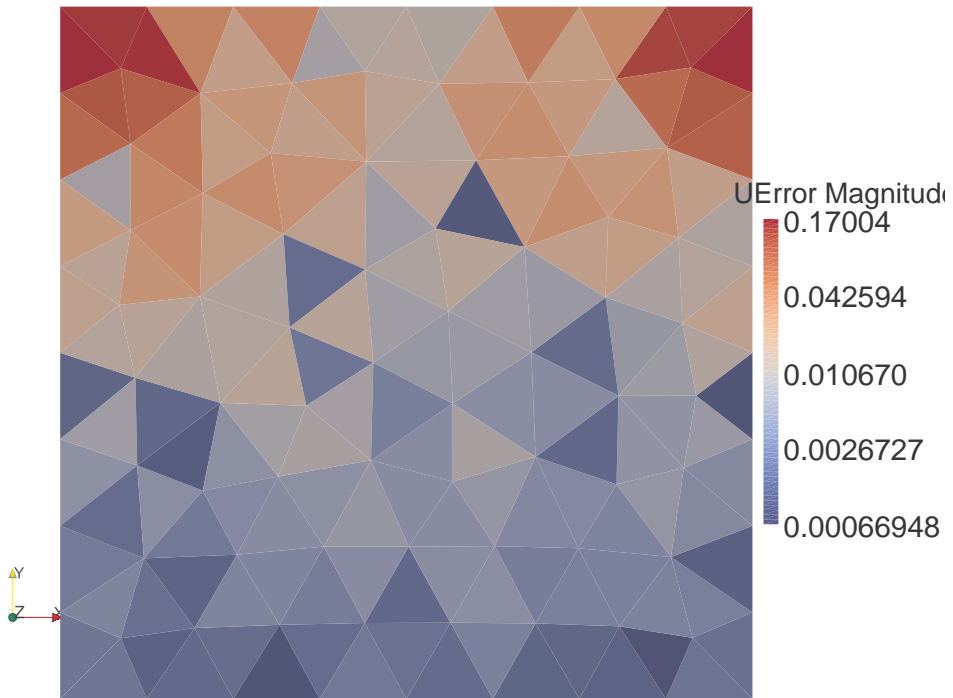


Slika 6.57: Greška iznosa brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 44 ćelije, u logaritamskom mjerilu.

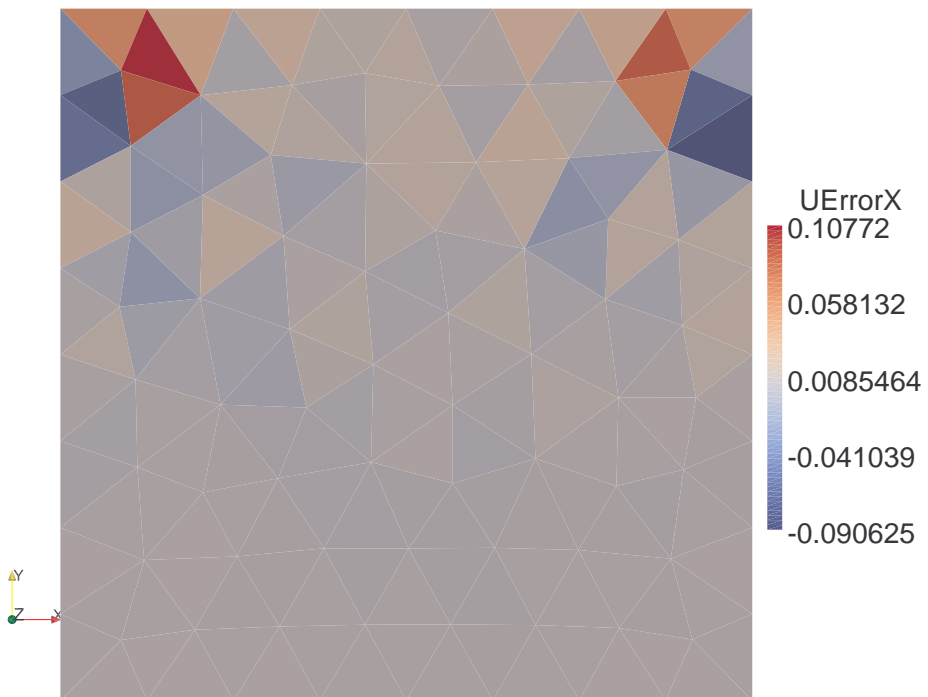


Slika 6.58: Greška  $x$  komponente brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 44 ćelije

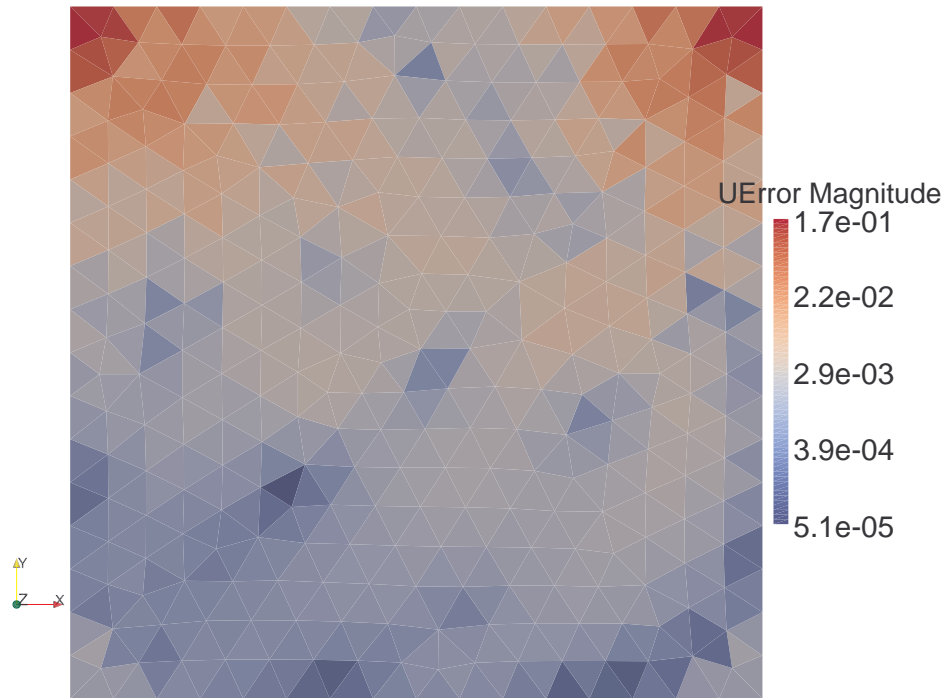




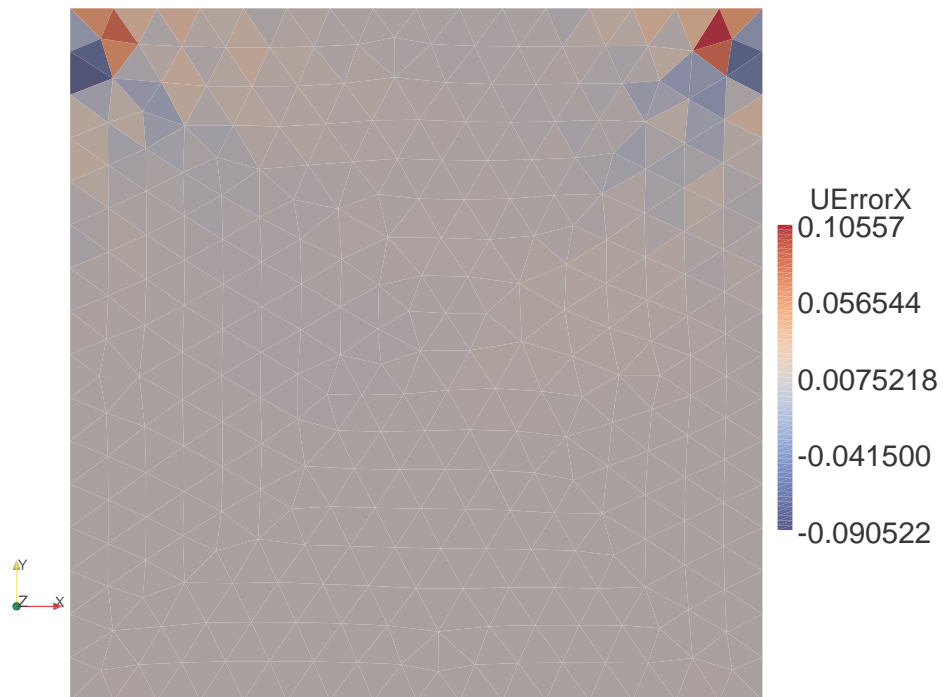
Slika 6.59: Greška iznosa brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 148 ćelije, u logaritamskom mjerilu.



Slika 6.60: Greška  $x$  komponente brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 148 ćelije.



Slika 6.61: Greška iznosa brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 572 ćelije, u logaritamskom mjerilu.



Slika 6.62: Greška  $x$  komponente brzine u ćelijama,  $G^2 v^{K^2 P^2} p^{K^2 P^2}$  na 572 ćelije.



# 7 | Zaključak

## 7.1. Zaključak doktorskoga rada

Metoda kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži znatno sužava izbor metoda interpolacije koje se mogu koristiti za rekonstrukciju vrijednosti funkcije, i njezinoga gradijenta, u stranicama kontrolnih volumena gdje su potrebne za računanje numeričkih flukseva. Taj problem je još više izražen kod metoda visokog reda točnosti. U ovom radu je korištena generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama, u metodi kontrolnih volumena na proizvoljnoj poliedarskoj mreži, za računanje konveksijsko-difuzijske jednadžbe. Ta je formulacija primijenjena za računanje difuzije, konvekcije, i nestlačivog toka viskoznog fluida. Za povezivanje brzine i tlaka u proračunu strujanja korištena je približna, a također i egzaktna projekcija. Numerički rezultati potvrđuju teoretske, da se pomoću generalizirane interpolacije radijalnim baznim funkcijama može povećati točnost numeričkog proračuna metodom kontrolnih volumena, kao i njen red točnosti.

Iz provedenoga istraživanja proizlaze slijedeći zaključci:

- Interpolacijom, koja formalno može biti proizvoljno visokog konačnog reda točnosti upotrebom odgovarajućih radijalnih baznih funkcija, moguće je uz korištenje Gaussovih formula za volumne i površinske integrale koje ne narušavaju red točnosti interpolacije, formulirati metodu kontrolnih volumena na poliedarskoj mreži visokog reda točnosti.
- Moguće je koristiti *a priori* particiju jedinice u dijelovima domene u kojima se ne pojavljuju diskontinuiteti, što je povoljno obzirom da su takve particije jedinice

efikasnije od onih koje su uobičajene za proračun hiperboličkih problema. *A priori* particije jedinice imaju nedostatak jer ne ovise o rješenju, pa ih nije moguće koristiti u općem slučaju.

- U područjima u kojima se pojavljuju diskontinuiteti, zbog npr. konvekcije diskontinuiranoga polja ili zbog diskontinuiteta u rubnom uvjetu, potrebno je potražiti slabo riješenje koje ne oscilira, npr. *a posteriori* particijom jedinice WENO tipa.
- Generalizirana interpolacija radijalnim baznim funkcijama je iznimno fleksibilna interpolacijska metoda, jer ne nameće strukturu na interpolacijske centre, a interpolant se rekonstruira iz jednadžbi pa je moguće zadavati razne tipove podataka kao interpolacijske uvijete jednostavnim računanjem željenih funkcionala. Pri tome ti funkcionali moraju biti linearno nezavisni.
- Particija jedinice je također vrlo fleksibilna metoda, koja omogućava da se interpolacija radijalnim baznim funkcijama primjenjuje na fine mreže tako da se način računanja particije jedinice prilagodi promatranom problemu. Zbog njene fleksibilnosti, moguće je kombinirati *a priori* i *a posteriori* particije jedinice, te time stabilizirati slabo riješenje samo u područjima u kojima se pojavljuje Gibbsov fenomen. Pri tome, ako se iz nosača *a priori* dijela particije maknu interpolacijski centri u kojima se nalazi uzrok oscilacija, interpolacija će zbog svoje optimalnosti ta područja zamijeniti "najgladim mogućim poljem" iz svog Hilbertovog prostora. Na taj se način smanjuju oscilacije rješenja u ostatku *a priori* nosača. Kada je dana mreža kontrolnih volumena, sa pripadajućim stranicama na rubu domene u kojima se zadaju rubni uvjeti, određeni su i interpolacijski centri. Svaki nosač u particiji jedinice je podskup tih centara.

Kao krajnji zaključak slijedi da formulacija navedena u ovom radu omogućava modeliranje dijela problema kakvi se javljaju u okviru strujanja nestlačivog fluida. Da bi formulacija omogućila računanje svih problema koji se javljaju kod takvih tokova potrebno je istraživanje proširiti na slaba rješenja, kako je navedeno u poglavlju 7.3..

## 7.2. Sažeti prikaz znanstvenog doprinosa rada

Iz ovog rada je proizašao slijedeći znanstveni doprinos u području tehničkih znanosti:

- Formulirana je metoda kontrolnih volumena visokog reda točnosti na poliedarskoj mreži centriranoj u ćelijama. Formulacija omogućuje zadavanje Dirichletovog i Neumannovog, ili općenitijeg Robinovog rubnog uvjeta bez da se naruši visoki red točnosti metode kontrolnih volumena.
- Interpolacija radijalnim baznim funkcijama je primijenjena za rješavanje problema opisanih parcijalnim diferencijalnim jednačbama metodom kontrolnih volumena, u *a priori* particiji jedinice koja je korištena u računalnoj grafici.
- Metoda iz rada korištena je u približnoj projekciji u Rhie-Chow duhu, kao i u egzaktnoj projekciji, prilikom nametanja solenoidnosti polju brzine.

### 7.3. Prijedlog smjerova daljnjih istraživanja

Iz provedenih numeričkih eksperimenata se vidi da odabir efikasne *a priori* particije jedinice donosi probleme u slučajevima kada postoji diskontinuitet u rubnim uvjetima, kada se kroz strujno polje konvektira diskontinuitet ili kada se diskontinuitet pojavljuje iz nekog drugog razloga. Metoda kontrolnih volumena u suštini je *slaba formulacija* problema, kojom se može tražiti rješenje u većem prostoru i na taj način stabilizirati rješenje. Tada funkcija može imati diskontinuitete po stranicama kontrolnih volumena, što je standardan način stabilizacije rješenja kod hiperboličkih problema. To je moguće postići korištenjem WENO tipa particije jedinice, kojom se stabilno rješenje nalazi na način da se odabere više nosača za istu evaluacijsku točku, te da dominiraju interpolanti iz onih nosača u kojima interpolant ne oscilira. Utjecaj lokalnih interpolanata koji osciliraju treba biti zanemariv u globalnom interpolantu. Standardan problem identifikacije Gibbsovih oscilacija je taj što ih se obično ne razlikuje dovoljno od glatkih ekstrema. Taj problem je možda i izraženiji kod računanja konvektivno-difuzijske jednačbe u kojoj je uobičajeno da se u domeni pojavljuju glatki ekstremi. Kod WENO shema sa radijalnim baznim funkcijama postalo je uobičajeno koristiti normu interpolanta u njegovom prostoru za identifikaciju Gibbsovih oscilacija. Tako se predlažu slijedeće smjernice za daljnja istraživanja:

- Daje se naslutiti da bi za identifikaciju oscilacija možda bila prikladnija mjera samo viših derivacija od onih koje implicira traženo klasično rješenje, konkretno viših od druge derivacije kod konveksijsko-difuzijske jednačbe. Na taj način glatki

ekstremi ne bi nužno bili identificirani kao oscilacije, što je potrebno detaljnije istražiti.

- Također je potrebno istražiti kakve posljedice bi imala identifikacija Gibbsovog fenomena na način da najviše derivacije i najviše pridonose "pozitivnoj identifikaciji" oscilacija.
- Slijedeća stvar koja je potrebna metodi iz ovoga rada, da bi bila efikasno primjenjiva na najopćenitije probleme koji se mogu pojaviti prilikom numeričkog modeliranja nestlačivog toka fluida, je upotreba generalizirane interpolacije sa *solenoidnom jezgrom*. Tu se projekcija polja brzine ugradi u jezgru interpolacije, te rješavanje jednadžbe za tlak u svrhu postizanja solenoidnosti postaje nepotrebno. Taj pristup ima posebno velik potencijal daljnjem povećavanju efikasnosti proračuna nestlačivih tokova jer prilikom računanja nestlačivog toka većina računalnog vremena se potroši na jednadžbu tlaka. Ova činjenica je puno značajnija u metodama, kakva se koristi i u ovom radu, u kojima se radi *odgođena korekcija*, jer se tu inherentno tlak rješava barem dva puta u svakom vremenskom koraku, čak i za jednu faktorizaciju lineariziranog Navier–Stokesovog operatora. Okolnosti oko korištenja solenoidne jezgre za proračun nestlačivog strujanja su relativno poznate, jer je takva formulacija već korištena u bezmrežnoj metodi [166].
- Daljnje istraživanje, koje nije vezano za metodu kontrolnih volumena ali bi dovelo do metode upotrebljive u tehničkim znanostima, je vezano za upotrebu interpolacije radijalnim baznim funkcijama u metodama rubnih elemenata. Obzirom na fleksibilnost generalizirane interpolacije radijalnim baznim funkcijama, metode toga tipa bi mogle naći primjenu u širokom spektru problema kakvi se rješavaju u zrakoplovstvu i tehničkim znanostima općenito.

# A | O povezivanju brzine i tlaka pri modeliranju nestlačivog toka metodom kontrolnih volumena

## A.1. Uvod

Potreba za računanjem nekompresibilnog viskoznog toka newtonovskog fluida javlja se kod rješavanja mnogih inženjerskih problema. Nažalost, uvjet solenoidnosti dominira svim aspektima računanja nestlačivog toka [77, 78, 79]. Kada se promatraju problemi koje uzrokuje računanje nestlačivog strujanja obično se promatra model stacionarnog nestlačivog strujanja Navier-Stokesovog ili Eulerovog fluida, jer se tako izolira promatrani problem od drugih utjecaja kao što su shema marširanja kroz vrijeme ili turbulencija.

Navier-Stokesove jednadžbe za stacionarno strujanje homogenog fluida,  $\rho = \text{konst}$  i  $\nu = \text{konst}$ , u nekonzervativnom diferencijalnom obliku glase [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{A.1}$$

gdje je  $\mathbf{v}$  brzina,  $p$  tlak,  $\rho$  gustoća i  $\nu$  kinematička viskoznost. Zadavanjem rubnih uvjeta stacionarni problem koji se promatra postaje matematički definiran.

Kod Navier-Stokesovih jednadžbi najveće probleme stvaraju konvekcija, te povezivanje brzine i tlaka. Iz tog razloga je uobičajeno pojednostaviti model kada se promatra povezivanje brzine i tlaka. Kada Reinoldsov broj postaje malen,  $Re \rightarrow 0$ , konvektivni član brže od ostalih postaje malen te se može zanemariti. Tada se promatraju linearne



Stokesove jednadžbe [4]:

$$\begin{aligned}\nu \nabla^2 \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Nakon diskretizacije jednadžbi (A.1) ili (A.2) riješenje odabrane formulacije može se formalno zapisati u obliku <sup>1</sup>:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N} & \mathbf{G} \\ D & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\tag{A.3}$$

gdje  $\mathbf{G}$  i  $D$  označavaju operator gradijenta odnosno divergencije,  $\mathbf{p}$  je vektor diskretnih vrijednosti tlaka  $p$ ,  $\mathbf{u}$  vektor diskretnih vektora brzina  $\mathbf{v}$ , dok  $\mathbf{f}$  označava volumne izvore  $\mathbf{g}$  u jednadžbama količine gibanja.

Kada postoji konvekcija <sup>2</sup>  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{v})$ , prilikom implicitnog <sup>3</sup> marširanja kroz vrijeme, u svakom vremenskom trenutku koristi se Newtonova ili Picardova metoda za pronalaženje fiksne točka nelinearnog problema (A.3). Nakon linearizacije dobiva se problem sedlastog tipa [114], koji ima blok nula na glavnoj dijagonali uz jednadžbe za tlak.

U Navier–Stokesovim jednadžbama, polje brzine i tlak nisu međusobno potpuno povezana jednadžbom količine gibanja i jednadžbom kontinuiteta. To je posljedica diferencijalno-algebarske prirode Navier–Stokesovih jednadžbi [190]. Jednadžba kontinuiteta je zapravo kinematičko ograničenje na polje brzine koje zadovoljava jednadžbu količine gibanja.

Tlak je kontroverzna varijabla u nestlačivom strujanju. Nije termodinamička varijabla, te za nju ne postoji "jednadžba stanja". Kod nestlačivog toka, tlak je matematička varijabla [62], odnosno Lagrangeov multiplikator koji "ograničava" polje brzine na **sole-noidno**,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Gradijent tlaka je važniji od tlaka, te je njegova fizikalna interpretacija sila po jedinici volumena. Tlak se obično koristi samo da se pomoću njega nametne solenoidnost, a ne bi ni bio potreban kada bi se brzina, koja zadovoljava jednadžbu količine gibanja, na neki drugi način projicirala na solenoidno polje.

<sup>1</sup> U ovom obliku nije implementiran rješavač, već je to riješenje odabrane formulacije.

<sup>2</sup>  $\mathcal{N}(\mathbf{v})$  samo podsjeća da nisu u svim metodama točke na rubu ujedno i proračunski čvorovi u kojima je definiran  $\mathbf{u}$ . Npr. nisu u metodi kontrolnih volumena na mrežama centriranim u ćelijama, kao ni u pomaknutim mrežama centriranim u vrhovima ako su čvorovi za tlak na rubu. O rasporedu čvorova u metodama kontrolnih volumena biti će više je riječi u poglavlju A.2.1..

<sup>3</sup> Tlak je prirodno tretirati implicitno zbog diferencijalno-algebarske prirode problema [190].

Nakon što se izvede jednačba za tlak, dobivena jednačba je eliptičnog tipa što dobro opisuje posljedicu beskonačne brzine prostiranja slabih tlačnih poremećaja. Kao posljedica, tlak se obično tretira implicitno, jer u protivnom ili formulacija nije konzervativna, ili se respregnu rubni uvijeti. Obzirom da se, kod numeričkog simuliranja nestlačivog toka, većina procesorskog vremena potroši na jednačbu tlaka, vrlo je uobičajeno koristiti implicitne metode za marširanje kroz vrijeme, a ako se računa cijeli sustav diskretnih jednačbi (A.3) odjednom (simultano), upotreba implicitne vremenske sheme je nužna. Implicitne sheme su poželjne jer omogućuju relativno velike vremenske korake.

**Napomena** Ako postoji konvekcija,  $Re \neq 0$ , iz jednačbe (A.1) vidi se da je gradijent tlaka kvadratna funkcija brzine [39].

## A.2. Tipovi mreža u metodi kontrolnih volumena

U metodi kontrolnih volumena, nakon što se linearizira operator konvekcije, obično se ne rješavaju cijele diskretne Navier-Stokesove jednačbe odjednom, nego se problem metodom **faktorizacije operatora**<sup>4</sup> (engl. *operator splitt, operator factorisation*) rastavi na više manjih problema. Kod nestlačivog strujanja ključno je što eliptičnost jednačbe za tlak<sup>5</sup> ne dozvoljava računanje tlaka eksplicitno. Iz tog razloga vremenske sheme koje se koriste u metodama u kojima se pomoću tlaka osiguravaju solenoidnost redovno su ili semi-implicitne ili potpuno implicitne. Slijedeća posljedica implicitnosti tlaka, i međusobne linearne veze tlaka i brzine kod lineariziranih Navier-Stokesovih jednačbi, je da kada se koristi faktorizacija operatora, tlak će uvijek kasniti jednu iteraciju za rješanjem jednačbe količine gibanja.

Za računanje nestlačivog toka metodom kontrolnih volumena ključan je rad Harlowa i Welsha [87]. U njemu se koristi konfiguracija mreže koja u jednačbi količine gibanja omogućuje egzaktnu projekciju, o čemu će biti riječi u poglavlju A.4.. Tu će se konfiguraciju u daljnjem tekstu referirati akronimom MAC<sup>6</sup> iz razloga koji će biti izneseni u poglavlju A.2.1.. U MAC konfiguraciji su čvorovi za tlak na stranicama kontrolnih

<sup>4</sup> Faktorizacija operatora objašnjena je u poglavlju A.3.3..

<sup>5</sup> Odnosno "krutost" zahtjeva solenoidnosti polja brzine,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , koji prirodno generira eliptičnu jednačbu za tlak.

<sup>6</sup> Akronim "Marker and cell" nema nikakve veze sa razmještajem proračunskih čvorova.

volumena za brzinu, gdje su i potrebni prilikom konzervativne <sup>7</sup> evaluacije gradijenta tlaka.

**Napomena** U MAC konfiguraciji isti se rezultat dobiva ako se gradijent tlak evaluira kao volumni integral. Drugim riječima, volumni integral tlaka na MAC konfiguraciji je konzervativan.

Ako se konvekcija i difuzija ne računaju simultano s jednačbom za tlak, faktorizacija uzrokuje da rješenje tlaka kasni za rješenjem jednačbe količine gibanja. Kao posljedica, čak i u semi-implicitnoj metodi često se jednačba za tlak rješava više puta u svakoj linearizaciji brzine da se jače povežu polja tlaka i brzine. Kod implicitnih metoda u Rhie-Chow postupku obično se ne rješava povezivanje brzine i tlaka na visoku točnost osim ako se ne radi o kraju vremenskog koraka, te se ne rade posebne iteracije zbog kašnjenja jednačbe za tlak SIMPLE algoritma, već se provode samo Picardove linearizacije konvekcije.

### A.2.1. Međusobni položaj proračunskih čvorova u mreži

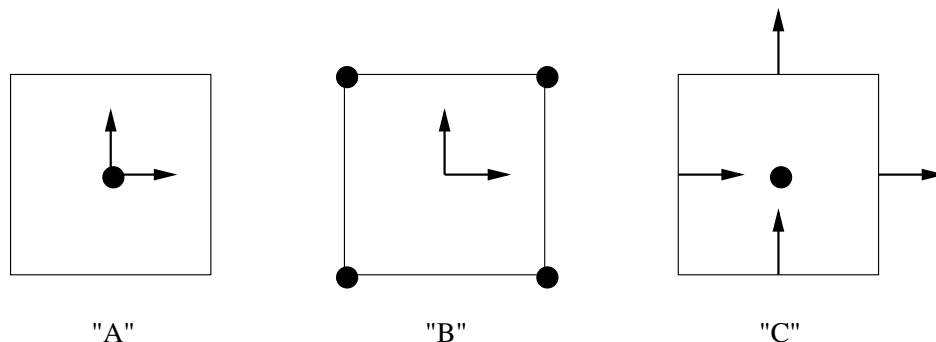
Jedan od prvih radova koji sustavno analizira problem razmjesta proračunskih čvorova potiče od Arakawe i Lamba [11], u kojemu se razlikuju “A”, “B” i “C” mreže, prikazane na slici A.1. Mreža tipa “A” danas se u literaturi naziva centrirana u ćelijama (engl. *cell-centered*), “B” je centrirana u vrhovima (engl. *vertex-centered*), a “C” MAC konfiguracija mreže, kao što to prikazuje slika A.1. U ovom radu se proračunske mreže promatraju u kontekstu metode kontrolnih volumena, pa se vrijednosti varijabli u proračunskim čvorovima interpretiraju kao prosječne vrijednosti u ćelijama.

U mrežama tipa “A”, i brzine i tlak su u težištu istog kontrolnog volumena, što znači da je razmjestaj proračunskih čvorova nužno nepomaknut. U mrežama “B” tipa su obično čvorovi za brzinu u težištima ćelija, dok su čvorovi za tlak u vrhovima ćelija. Moguć je i obratan raspored, iako on nije uobičajen jer je prirodnije imati čvorove za tlak na rubu domene pogotovo ako se radi o aero-elastičnim proračunima. Tada su osim čvorova za tlak na rubu i točke koje definiraju mrežu, a time i njenu deformaciju, pa se osim konzervativne razmjene sila, egzaktno može nametati i konzervativna razmjena energije između fluida i strukture u jednom koraku slabo povezanog (engl. *loosely*,

---

<sup>7</sup> Volumni član gradijenta tlaka konzervativno je diskretiziran u jednačbi količine gibanja ako se računa, pomoću teorema Gauss-Ostrogradskog, iz stranica kontrolnih volumena.

Slika A.1: Glavni tipovi mreža. "A" mreža je centrirana u ćelijama za sve varijable odn., ima nepomaknuti, dok. "B" i "C" imaju pomaknuti raspored proračunskih čvorova. "B" je centrirana u vrhovima, a "C" je MAC konfiguracija.



*weakly coupled*) aero-elastičnog proračuna. Dakle kod ove konfiguracije zapravo postoje dva skupa kontrolnih volumena, oni za tlak i oni za brzinu. U tom smislu konfiguracija "B" ima djelomično pomaknute proračunske čvorove. Mreže tipa "C" su posebno važne sa teoretskog aspekta povezivanja brzine i tlaka, jer su to mreže na kojima je projekcija brzine na solenoidno polje egzaktna. Kod ove konfiguracije svaka skalarna komponenta ima svoju mrežu, tako da npr. u 2D postoje 3 mreže, ona za tlak, i jedna za svaku komponentu brzine. Može se reći da je ovo potpuno pomaknuta mreža, iako će se na nju kolokvijalno referirati kao MAC konfiguracija, da se istakne razlika prema djelomično pomaknutoj, "B" konfiguraciji mreže.

Sa slike A.1 se vidi da je konfiguracija "A" uvijek različita od konfiguracija "B" ili "C", dok se "B" razlikuje od "C" tek u više od 1D prostoru. Odabir konfiguracije stvara suštinski različite pristupe prilikom projekcije brzine [53], pa se taj odabir očituje u gotovo svakom aspektu postupka za računanje nestlačivog strujanja.

Iako u prvi mah može izgledati da se "C" (MAC) konfiguracija nameće kao rješenje problema odabira rasporeda čvorova, računanje na njoj otežava upotrebu modernih konvekcijskih algoritama, i ne pruža fleksibilnost topologije mreže, jer se MAC može definirati samo na strukturiranim odnosno blok-strukturiranim mrežama. Također, na MAC konfiguraciji nije jednostavno napraviti formulaciju višeg reda točnosti.

Postoje i složenije konfiguracije mreža, ali gornja tri razmještaja obuhvaćaju većinu onih koje se susreću u literaturi.

## A.3. Metode za povezivanje brzine i tlaka

Postoji više pristupa rješavanja nestlačivosti strujanja, koji se općenito mogu svrstati u dvije kategorije:

- metode sa primitivnim varijablama,
- metode sa zamjenskim varijablama.

Metode sa zamijenjenim varijablama su se prve pojavile kod računanja dvodimenzionalnog nestlačivog strujanja, te se u njima problem formulira tako da se brzina i tlak zamjene obično sa vrtložnošću i strujnom funkcijom. To stvara probleme kod implementacije rubnih uvjeta [15, 151, 62]. Kada je promatrano strujanje 3D, ostaju problemi oko implementacije rubnih uvjeta, a pojavljuju se i dodatni problemi koji se više ili manje uspješno rješavaju [13, 89, 63, 64].

Metode s primitivnim varijablama mogu se razvrstati u dvije grupe:

- metode bazirane na projekciji, koje ne mijenjaju prirodu problema u procesu rješavanja,
- metode koje mijenjaju prirodu problema potpuno (u svojoj formulaciji), ili samo u postupku rješavanja.

Kod "penalty" formulacija, kao i formulacija umjetne stlačivosti, mijenja se u određenoj mjeri priroda problema, iako u formulacijama umjetne stlačivosti konačno rješenje je i rješenje polaznog diferencijalno-algebarskog problema.

Poissonova jednadžba za tlak je projektivna formulacija, jer daje tlak koji se može smatrati potencijalnim poljem kojim se osigurava solenoidnost brzine. Težište ovog rada je na projektivnim metodama, odnosno konkretnije Poissonovoj jednadžbi za tlak. U ovom radu koristi se projektivna metoda za nametanje solenoidnosti, a zbog cjelovitosti ilustrirana je ideja i ostalih spomenutih metoda na primitivnim varijablama.

### A.3.1. Penalty formulacije

U penalty formulaciji (PF) se potpuno promjeni priroda problema. Umjesto da se rješava polazni problem koji je sedlastoga tipa, PF omogućava da se varijacijski problem na ograničenju riješi aproksimativno. Diskretna formulacija sustava biti će pozitivno definitna [112], uz pretpostavku da je linearizacija  $\mathbf{N} \equiv \mathcal{N}(\mathbf{v})$  pozitivno definitna.

Koncept PF uveo je Courant [47]. Od tada se formulaciju koristilo u metodi konačnih elemenata za 2D i 3D probleme [172, 193, 194, 119], kao i u metodi kontrolnih volumena te konačnih diferencija [63, 142, 148].

U PF se tlak u jednadžbu kontinuiteta uvodi na slijedeći način:

$$\frac{1}{\lambda}p + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gdje je  $\lambda$  velik. Nije *a priori* jasno koliki treba biti koeficijent  $\lambda$ , kao ni koeficijent  $\beta$  u formulaciji umjetne stlačivosti opisane u poglavlju A.3.2., već ih je potrebno odrediti numeričkim eksperimentima [148]. Za  $\lambda \rightarrow \infty$  dobiva se polazni problem. Preveliki  $\lambda$  uzrokuje numeričke probleme, poznate u metodi konačnih elemenata kao *locking* fenomen u proračunima elastičnosti jer problem tada postaje polazni sedlasti problem, dok premali  $\lambda$  rezultira gubitkom mase. Nedostatak PF je da je teško konstruirati efikasan iterativni postupak [112].

### A.3.2. Formulacija umjetne stlačivosti

Ovom formulacijom se također mijenja priroda problema, no on postaje hiperboličan, što omogućuje upotrebu kôdova razvijenih za stlačive tokove na nestlačive probleme. To je i razlog popularnosti ove metode u određenim krugovima, jer se problem opisan parcijalnim diferencijalnim jednadžbama rješava metodama za obične diferencijalne jednadžbe, a njih je jednostavnije implementirati. Time se naravno ne izbjegava eliptična priroda jednadžbe za tlak, što i dalje stvara određene probleme.

Formulaciju umjetne stlačivosti uveo je Chorin [39]. U njoj se uvodi vremenska derivacija tlaka na način da se krene od Navier-Stokesovih jednadžbi za pseudo stlačivi tok fluida konstantne viskoznosti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

U gornjoj je jednadžbi zanemarena volumna viskoznost jer je cilj model sa malom stlačivosti kojim se aproksimira nestlačivi tok. Pretpostavka male stlačivosti, u izotermnim uvjetima, omogućuje linearizaciju jednadžbe stanja:

$$p = p(\rho) \approx p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0),$$

gdje je  $c_0^2 = (\partial p / \partial \rho)|_T$  brzina zvuka pri stanju  $(p_0, \rho_0)$ . Sada je moguće eliminirati gustoću iz jednadžbe kontinuiteta, što rezultira jednadžbom za tlak:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gdje je  $\beta = c_0^2$  "umjetna stlačivost", a  $\tau$  pseudo vrijeme.

Chorinova metoda je formulirana za stacionarne probleme, te ju je potrebno modificirati za nestacionarne zadaće [125, 168, 152, 153]. Ono što se dogodi kod nestacionarnih zadaća je da se, zbog aproksimacije eliptičnog problema hiperboličnim dobiva "krut" [170] problem u svakom vremenskom koraku. Tu konkretno problem stvara eliptičnost rubnih uvjeta. Drugi problem metoda umjetne stlačivosti, kod eksplicitnog marširanja kroz vrijeme, je što je vremenski korak  $\Delta t$  ograničen inverzom od  $c_0^2$ , pa je on veoma malen obzirom da se simulira nestlačivi tok ( $c_0 \rightarrow \infty$ ). Implicitne sheme su tu puno efikasnije [112] iako je pseudo-tlačne poremećaje visoke frekvencije, koje se pojavljuju unutar svakog vremenskog koraka, potrebno na neki način prigušiti ili filtrirati.

### A.3.3. Faktorizacija operatora i "fractional step" metode

Najpopularniji postupci numeričkog rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi metodom kontrolnih volumena temelje se na faktorizaciji operatora [62]. To podrazumijeva da se polazni sustav (A.3) faktorizira u niz jednostavnijih problema, kao što su konvekcija, difuzija, konvekcija-difuzija, Poissonova jednadžba i eksplicitna/implicitna korekcija. Za te manje probleme postoje efikasne metode rješavanja. Faktorizacija operatora svodi se na dva glavna koraka, u prvom se zanemari nestlačivost i izračuna se brzina koja ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta (faza **predikcije**), nakon čega se brzina "projicira" na solenoidno polje (faza **korekcije**).

Pod imenom **fractional step metode** (FSM) podrazumijeva se klasa faktorizacija Navier-Stokesovih jednadžbi [62]. Tipična FSM počinje sa rješavanjem konvekcijskog transporta, obično eksplicitno, pri čemu se može ali ne mora [102] uzet tlak iz prethodnog koraka. U ovom koraku se može koristiti bilo koja metoda za hiperboličke probleme [53]. Slijedeći korak je implicitno rješavanje viskoznog transporta, obično Crank-Nicolsonovom shemom [150, 62, 112]. Zadnji korak je rješavanje Poissonove jednadžbe za tlak i projekcija na solenoidno polje brzine.

FSM mogu se generalno zapisati pomoću slijedeća tri koraka [62]:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \mathbf{v}^o + C\Delta t, \\ \mathbf{v}^{**} &= \mathbf{v}^* + D\Delta t, \\ \mathbf{v}^n &= \mathbf{v}^{**} + P\Delta t,\end{aligned}$$

gdje su  $C$ ,  $D$  i  $P$  članovi od konvekcije, difuzije i tlaka. Član od tlaka  $P$  je gradijent veličine koja je riješenje Poissonove jednadžbe. Nakon trećeg koraka zadovoljena je jednadžba kontinuiteta. Također je moguća daljnja faktorizacija konvektivnog i difuzivnog člana na pojedine prostorne komponente, što se obično čini i u implicitnim implementacijama konvekcije, jer je matrica obično ista za sve komponente.

Glavna razlika [62] između korekcije tlaka u FSM i SIMPLE je što se kod FSM faktorizacija radi samo jednom, dok se u SIMPLE radi više puta u vremenskom koraku. Zato se FSM koristi za nestacionarne proračune, dok se SIMPLE koristi za stacionarne proračune kao i za nestacionarne proračune u kojima nije važan Lagrangeovski transport čestica.

Zbog toga se u SIMPLE [139] (engl. *Semi-Implicit Pressure Linked Equation*) metodi ne treba [62] nametati strogi kriterij konvergencije jednadžbe za tlak u Picardovim iteracijama. Zadovoljenje jednadžbe kontinuiteta i eksplicitna korekcija brzina potrebni su tek na kraju vremenskog koraka.

U PISO [96] (engl. *Pressure Implicit with Splitting of Operators*) algoritmu, brzine u stranicama ćelija, koje služe kao izvor Poissonovoj jednadžbi za tlak kroz operator divergencije, izračunate su pomoću polja tlaka iz prethodne iteracije. Zbog toga se jednadžba za tlak može rješavati više puta [62] do potpune konvergencije faktorizacije, za samo jednu linearizaciju konvekcije. Ove iteracije nije potrebno podrelaksirati. U SIMPLE metodi iteracije faktorizacije ne odvajaju se od Picardovih iteracija linearizacije konvekcije, ali je tada potrebno koristiti podrelaksaciju.

### A.3.4. Poissonova jednadžba za tlak

U ovoj se formulaciji jednadžba za tlak dobiva iz divergencije jednadžbe količine gibanja:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} \right] = 0.$$



Obzirom da za brzinu, i njenu derivaciju, vrijedi  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  i  $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ , jednadžba se pojednostavljuje na oblik neovisan o vremenu:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \nabla^2 \mathbf{v}],$$

što je Poissonova jednadžba za tlak. Ukoliko je fluid homogen,  $\rho = \text{konst}$ , jednadžba za tlak postaje:

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \nabla^2 \mathbf{v}].$$

Poissonova jednadžba za tlak prirodno opisuje eliptičan problem, pa je i najčešći izbor za povezivanje brzine i tlaka.

## A.4. Projektivne metode

U projektivnoj formulaciji solenoidnost se postiže tako da se nesolenoidno vektorsko polje  $\mathbf{v}^*$  u aditivnoj dekompoziciji rastavi na dvije ortogonalne komponente, solenoidnu  $\mathbf{v}$ , i bezvrtložnu koja se može zapisati kao gradijent potencijala  $\varphi$ :

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \nabla \varphi, \tag{A.4}$$

gdje je:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = 0,$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = 0,$$

a  $\varphi$  je rješenje Poissonove jednadžbe:

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \mathbf{v}^*, \quad \text{na } \Omega,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^*, \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Takav rastav, poznat kao Helmholtz-Hodge dekompozicija [42], je ortogonalna dekompozicija pa vrijedi [111]:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) \, dV = 0.$$

Brzina  $\mathbf{v}^*$ , ili njena vremenska derivacija  $\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t}$  koja se također može projicirati [150], dobivena iz jednadžbe količine gibanja projicira na solenoidno polje. Brzinu i njenu

prostornu derivaciju će se kolektivno označavati sa  $\mathbf{V}^*$ , a njihovu solenoidnu projekciju sa  $\mathbf{V}$ .

Poissonovu jednadžbu za tlak predložili su Harlow i Welch [87] na mreži MAC konfiguracije, i to je prva projektivna metoda [53]. Projekciju, kao numeričku metodu za računanje nestlačivog toka, predložio je Chorin [40, 41]. Daljnji razvoj projektivnih metoda je temeljen na radu Bella, Colellae i Glaza [25]. Može se pokazati [53] da mreže centrirane u ćelijama imaju najviše problema sa povezivanjem brzine i tlaka. Kod mreža centriranih u vrhovima ti problemi su manji ali postoje, dok se kod MAC konfiguracije ti problemi ne pojavljuju. Problem je što je MAC konfiguracija najmanje fleksibilna, i može se definirati najviše na blok-strukturiranim mrežama.

### Kontinuirana projekcija za tok homogene gustoće

Pregled projektivnih metoda temeljen je na onom iznesenom od Drikakisa i Ridera [53].

Korištenjem projekcije  $\mathcal{P}$  dobiva se:

$$\mathbf{V} = \mathcal{P}(\mathbf{V}^*). \quad (\text{A.5})$$

Bezvrtložno polje može se zapisati kao gradijent potencijala  $\varphi$ , pa vrijedi:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V} + \nabla\varphi. \quad (\text{A.6})$$

Uzimanjem divergencije jednadžbe (A.6) slijedi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \nabla\varphi \longrightarrow \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \mathbf{V}^*.$$

Kada je potencijal  $\varphi$  poznat, solenoidno vektorsko polje računa se iz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^* - \nabla\varphi.$$

Iz izloženoga se vidi da se operator projekcije može simbolički zapisati kao:

$$\mathcal{P} = \mathbf{I} - \nabla (\nabla \cdot \nabla)^{-1} \nabla \cdot .$$

Ako se zapiše  $\nabla\varphi = \mathcal{Q}(\mathbf{V}^*)$ , onda je  $\mathcal{Q} = \mathbf{I} - \mathcal{P}$ .

Projekcija je idempotentna [53], tj. vrijedi  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ , pa ponovno projiciranje ne mijenja rezultat. Može se pokazati da vrijedi  $\|\mathcal{P}(\mathbf{V}^*)\|_2 \leq \|\mathbf{V}^*\|_2$ , pa je onda lako

pokazati da je operator projekcije stabilan [41]. Djelovanje projekcije na gradijent je  $\mathcal{P}(\nabla\varphi) = 0$ .

Kada se operator projekcije primjeni na jednadžbu količine gibanja daje:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathcal{P}(-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}),$$

što je evolucijska jednadžba za količinu gibanja u kojoj je brzina solenoidna, ako je bila solenoidna u  $t = 0$ <sup>8</sup>. Gradijent tlaka zadovoljava jednadžbu

$$\nabla p = \mathcal{Q}(-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}).$$

Operator  $\mathcal{P}$  ima sliku u jezgri operatora  $\mathcal{Q}$ , i obrnuto.

### Kontinuirana projekcija za tok nehomogene gustoće

Postoje razni fizikalni problemi koje je prirodno modelirati kao nestlačive, ali da gustoća nije konstantna u prostoru. U tom slučaju, projekciju je potrebno modificirati na slijedeći način:

$$\rho \mathbf{V}^* = \rho \mathbf{V} + \nabla \varphi.$$

Eliptična jednadžba za mjeru tlaka je sada:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = \nabla \cdot \mathbf{V}^*, \quad (\text{A.7})$$

gdje je  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ , a jednadžba za korekciju brzine je:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^* - \sigma \nabla \varphi.$$

Sada je operator projekcije:

$$\mathcal{P}_\sigma = \mathbf{I} - \sigma \nabla (\nabla \cdot \sigma \nabla)^{-1} \nabla \cdot, \quad (\text{A.8})$$

a operator koji djelovanjem na brzinu daje gradijent tlaka je:

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathbf{I} - \mathcal{P}_\sigma. \quad (\text{A.9})$$

Ova projekcija generalizira projekciju konstantne gustoće.

---

<sup>8</sup> Pomoću jednadžbe za tlak, uz odgovarajuće rubne uvijete, može se dobiti solenoidno polje brzine u jednom vremenskom koraku.

## Egzaktna i približna projekcija

Projekcija se može upotrijebiti za računanje Poissonove jednadžbe za tlak, bez obzira da li se radi egzaktna ili približna (aproksimativna) projekcija. Raspored čvorova i odabir diskretnih operatora divergencije i gradijenta određuju da li je projekcija egzaktna ili približna. Iako se u početku nije tako zvao, MAC je [53] zapravo prvi egzaktni projektivni algoritam.

**Egzaktnom projekcijom** smatra se ona kod koje se divergencija računa na strojnu točnost, odnosno na kriterij konvergencije jednadžbe za tlak. **Približnom projekcijom** smatra se ona koja se ne računa egzaktno. Tako, kod približnih projekcija divergencija je diskretizirana dodatno nekom metodom, koja unosi svoju grešku odbacivanja (engl. *truncation*), pa se može reći da je približna projekcija diskretizacija egzaktne projekcije. Približne projekcije na mrežama centriranim u ćelijama prvi su počeli proučavati Lai i Colella [110, 111]. Formalniji izvod približnih projekcija dali su Almgren, Bell i Szymczak [6], gdje su koristili mrežu za tlak centriranu u vrhovima. U približnim projekcijama "plaća" se mala greška u diskretiziranoj divergenciji, ali se zato znatno povećava efikasnost u rješavanju eliptične jednadžbe [53].

## Metode približne projekcije

Da se istakne da se radi o približnoj projekciji, Rider [150] označava brzinu koja se projicira (ili njezinu derivaciju) sa  $\tilde{\mathbf{V}}$ , da se istakne da se radi o približnoj projekciji. Vrijedi  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} \approx 0$ . Projekcija  $\tilde{\mathcal{P}}$  je sada:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{V}^*). \quad (\text{A.10})$$

Ako se označi:

$$\mathbf{V}^* = \tilde{\mathbf{V}} + \nabla\varphi, \quad (\text{A.11})$$

uzimajući divergenciju gornje jednadžbe, slijedi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \nabla \cdot \nabla\varphi \longrightarrow \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \mathbf{V}^*.$$

Kada se izračuna  $\varphi$ , solenoidno polje  $\tilde{\mathbf{V}}$  računa se iz (A.11).

Za tok nehomogene gustoće vrijedi analogno:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\sigma = \mathbf{I} - \sigma \nabla(L_\rho)^{-1} \nabla \cdot, \quad (\text{A.12})$$

gdje je  $L_\rho$  diskretni Laplaceov operator sa varijabilnim koeficijentima, odnosno:

$$\tilde{Q}_\sigma = \mathbf{I} - \tilde{P}_\sigma, \quad (\text{A.13})$$

gdje je  $\sigma \nabla \varphi = \tilde{Q}_\sigma(\tilde{\mathbf{V}})$ .

Približne projekcije nisu egzaktno idempotentne,  $\tilde{P}_\sigma^2 \neq \tilde{P}_\sigma$ , ali za stabilnost mora vrijediti  $\|\tilde{P}_\sigma(\mathbf{V}^*)\|_2 \leq \|\mathbf{V}^*\|_2$

Važno je da operator divergencije i gradijenta bude isti kao i u egzaktnoj projekciji, jedini operator koji se mijenja je diskretni Laplacian [53] kojim se rješava tlak. U Rhie-Chow metodi jednadžba za tlak rješava na nepomaknutoj mreži, i sa Gausovim operatorima gradijenta i divergencije, ali "spregnuta" sa interpoliranom diskretizacijom jednadžbe količine gibanja (engl. *momentum interpolation method*).

### Uvjet rješivosti i rubni uvjeti

Obzirom na eliptičnost jednadžbe za tlak, važno je kako se implementiraju rubni uvjeti [80]. Operator divergencije je isti u Laplaceovom operatoru i desnoj strani Poissonove jednadžbe, te se u jednadžbi za tlak računa gradijent mjere tlaka na svakoj stranici. Taj gradijent će iskorigirati nesolenoidnost brzine. Zbog toga, na rubu na kojem se zadaje protok mora biti homogeni Neumannov rubni uvjet. Tako je i na zidu, iako je ta tema dosta kontroverzna jer to nije jedini rubni uvjet za tlak koji se može zadati kad se koristi približna projekcija, čak ni kada se računa tok u otvoru (engl. *cavity*) gdje je na cijelom rubu domene zadano da nema protoka,  $\mathbf{v} = 0$  ili  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

U kontinuiranom slučaju za varijablu  $\varphi$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= f \quad \text{na } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi &= b \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Time je potrebno nametnuti globalni kinematički uvjet na brzinu:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Rješivost** (engl. *solvability*) je zahtjev da vrijedi, za Poissonov problem s Neumannovim rubnim uvjetima:

$$\int_{\Omega} f \, dV = \int_{\partial\Omega} b \, dS,$$

što mora vrijediti i u diskretnom slučaju. Ovako nešto mora vrijediti za tlak, ali se ne može promatrati odvojeno od globalne konzervativnosti. Općenito [62], ako se zadaje brzina na rubu, ne smije se zadavati tlak jer gradijent tlaka tjera korekciju brzine na rubu na kojem se propisuje brzina (volumni/maseni protok). Kao posljedica, promijenio bi se protok na rubu na kojem ga želimo propisati.

Rješivost je zapravo zahtjev da teorem Gauss-Ostrogradskog bude osiguran i na diskretnoj razini i za cijelu proračunsku domenu (globalni kontrolni volumen).

Linearni operator koji djeluje na mjeru tlaka  $\varphi$  je Laplaceov operator, koji je kompozicija gradijenta i divergencije, pa za cijelu proračunsku domenu u metodi kontrolnih volumena treba vrijediti (obzirom da želimo osigurati da vrijedi diskretni teorem Gauss-Ostrogradskog za globalni kontrolni volumen):

$$L_\sigma\varphi = D\sigma\mathbf{G}\varphi = D_\Omega\sigma\mathbf{G}\varphi + D_{\partial\Omega}\sigma\mathbf{G}\varphi = D_\Omega\mathbf{V}^* + D_{\partial\Omega}\mathbf{V}^*. \quad (\text{A.14})$$

Rubni uvjeti za  $D_{\partial\Omega}\sigma\mathbf{G}\varphi$  mogu se uključiti korištenjem  $\sigma\mathbf{G}\varphi = \mathbf{V}^* - \mathbf{V}$ , što uvršteno u (A.14) daje:

$$D_\Omega\sigma\mathbf{G}\varphi + D_{\partial\Omega}\sigma(\mathbf{V}^* - \mathbf{V}) = D_\Omega\mathbf{V}^* + D_{\partial\Omega}\mathbf{V}^*,$$

odakle slijedi rješivost za globalni kontrolni volumen:

$$D_\Omega\sigma\mathbf{G}\varphi = D_\Omega\mathbf{V}^* + D_{\partial\Omega}\mathbf{V}.$$

Obzirom da su unutarnji volumni integrali diskretizirani preko stranica ćelija pomoću teorema Gauss-Ostrogradskog, gdje su maseni/volumni površinski protoci diskretizirani konzistentno u oba kontrolna volumena koji dijele svaku stranicu, sumirajući po svim stranicama ostanu samo one koje su na rubu. Za njih mora vrijediti:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dS = 0 \longrightarrow \sum_{\partial\Omega} D_{\partial\Omega}\mathbf{V} = 0.$$

Tada problem linearne algebre ima rješenje [150]. To je semidefinitan<sup>9</sup> problem linearne algebre što znači da ima konstantu u jezgri, što znači da  $\varphi$  nije jedinstven, ali  $\mathbf{G}\varphi$  je.

Fizikalni rubni uvjeti koji se koriste u simulacijama su obično slijedeći: zid, ulaz, izlaz, simetrija i periodički rubni uvjet. Kod zadavanja rubnih uvjeta važno je da oni zadovoljavaju rješivost.

Kod strujanja u šupljini (engl. *cavity*) povoljno je da rubni uvjet za tlak bude homogeni Neumannov, jer on zadovoljava uvjet rješivosti.

<sup>9</sup> Za matricu  $\mathbf{A}$  kaže se da je semidefinitna ako, za bilo koji vektor  $\mathbf{x}$ , vrijedi  $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ .

**Zid (nepromočiva stjenka)** Ovisno o tome da li se računa viskozni ili neviskozni tok, na zidu se zadaje rubni uvjet klizanja ili lijepljenja:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \text{na } \Gamma_{\text{zid}},$$

koji zajedno sa početnim uvjetima:

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0,$$

i jednačbama koje opisuju tu klasu problema, matematički definiraju problem koji se rješava. Umjesto  $\mathbf{v} = 0$ , na zidu s uvjetom lijepljenja, za jednačbu količine gibanja Perić [62] predlaže za metodu kontrolnih volumena rubni uvjet, koji se može pokazati da vrijedi na zidu za  $Re \gg 1$  [80], te nametati da je u difuzijskom članu jednačbe količine gibanja viskozno naprezanje na zidu u smjeru normale  $\tau_{nn} = 2\mu(\partial v_n / \partial n) = 0$ . Pri tome se koristi  $\mathbf{v} = 0$  u jednačbi kontinuiteta. Treba primijetiti da ako se difuzija računa implicitno, to stvara različite matrice za različite komponente brzine. Upotrebom postupka odgođene korekcije može se postići željeni efekt i zadržati istu matricu za sve komponente jednačbe količine gibanja [62]. Ista matrica za sve komponente brzine je poželjna ne samo s aspekta memorije nego i računalnog vremena, jer se koristi u postupku približne projekcije Rhie-Chow metodom.

Za tlak se najčešće zadaje homogeni Neumannov rubni uvjet na zidu, iako je ova tema dosta kontroverzna [150, 53, 80]. Kod približnih projekcija postoji nekoliko načina formuliranja rubnih uvjeta za Navier-Stokesove ili Eulerove jednačbe koji zadovoljavaju uvjet rješivosti. Standardni pristup problemu je homogeni Neumannov rubni uvjet za tlak:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0.$$

Gresho [80] je analizirao rubne uvijete za Poissonovu jednačbu za tlak, koja kad se projicira na rub stvara slijedeći nehomogeni uvjet:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{n} \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{v} - \partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g}).$$

Može se pokazati [80, 77, 81] da taj rubni uvjet postaje homogen kako  $Re \rightarrow \infty$ . Drikakis i Rider [53] su analizirali te uvijete iz konteksta efikasnosti algoritma preciznije, implementacije u kontekstu odnosa prema fizikalnom problemu kao i red približnih projekivnih metoda na strukturiranim mrežama sa pomaknutim rasporedom čvorova. U

toj knjizi su pokazali numeričkim eksperimentima na "vrtlogu u šupljini" da se upotrebom nehomogenog Neumannovog rubnog uvjeta povećava red točnosti kad  $Re \rightarrow 0$ , ali kod metoda nižeg reda se smanjuje u tom slučaju na višim Reinoldsovim brojevima.

U energetske se jednadžbi propisuje temperatura stjenke ili toplinski tok.

**Izlaz** Ukoliko kroz proračunsku domenu fluid protiče, za sve varijable osim tlaka koristi se homogeni Neumannov <sup>10</sup> rubni uvjet:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = 0, \quad \text{na } \Gamma_{\text{izlaz}}.$$

Za brzinu općenito mora vrijediti globalno:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = 0 \longrightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

da bi bila zadovoljena rješivost.

Tlak na izlazu se definira na jedan od dva načina. Ili se fiksira vrijednost, obično konstantna vrijednost na cijelom izlazu <sup>11</sup>, ili se zadaje homogeni Neumannov uvjet <sup>12</sup> ali tada se mora fiksirati tlak negdje u domeni.

**Ulaz** Na ulazu u domenu zadaje se brzina, i sve druge fizikalne veličine osim tlaka. Rubni uvjet na ulazu sličan je rubnom uvjetu zida, s tom razlikom što na njemu brzina nije 0. Za tlak se zadaje homogeni Neumannov rubni uvjet.

**Simetrija** Rubni uvjet simetrije prije se često koristio u problemima koji posjeduju određenu geometrijsku simetriju, kao način pojeftinjavanja proračuna stacionarnog toka. Obzirom da su moderna računala dovoljno brza, a rijetko koji problem je u svojoj prirodi stacionaran, simetrija se sve rjeđe koristi u tu svrhu. Naime simetrija nameće rješenju određenu pravilnost koja, za iole veće  $Re$ , najčešće ne postoji u realnom toku. Danas se simetrija gotovo redovno koristi na uzdužnim rubovima (u odnosu na strujanje) kod proračuna vanjske aerodinamike.

<sup>10</sup> Obično se stavi "upwind". U tom slučaju, iako ta jednostavna ekstrapolacija predstavlja Neumannov rubni uvjet za brzinu, prenoseći vrijednost iz ćelija uz izlazni rub propisuje se brzina i na ovom rubu. Zbog toga je potrebno korigirati globalni protok kao i u slučaju kada su svi rubni uvjeti za brzinu Dirichletovi.

<sup>11</sup> Pa će se na tom rubu stvoriti gradijent tlaka koji će forsirati globalnu konzervativnost.

<sup>12</sup> Zbog toga se brzina na rubu mora korigirati na globalnu konzervativnost [62], ako postoji protok kroz domenu, nakon svake Picardove linearizacije konvekcije. Važno je da kod računanja jednadžbe kontinuiteta prilikom rješavanja jednadžbe za tlak globalna konzervativnost bude zadovoljena.



### A.4.1. SIMPLE klasa metoda

Kod realnih problema često nas zanima stacionarno rješenje, ako takvo postoji, ili nas zanimaju puno veće vremenske skale nego što bi ih nametnula eksplicitna vremenska integracija. Tada se, pored tlaka, i konvekcijsko-difuzijski problem tretira implicitno. Implicitno rješavanje Eulerovog toka je znatno problematičnije od Navier–Stokesovog. U SIMPLE klasi metoda koristi se Piossonova jednadžba za tlak, te su to projektivne metode u kojima se jednadžba za tlak obično izvodi eksplicitno iz već diskretizirane jednadžbe količine gibanja. Tada se rješava ili jednadžba za tlak, ili korekciju tlaka.

Na MAC konfiguraciji SIMPLE (Semi Implicit method for Pressure Linked Equations) postupak su predložili Patankar i Spalding [139], iako je ime dobio u članku [37]. Upotrebom Rhie-Chow [149] postupka SIMPLE se počeo koristiti osamdesetih [141] na mrežama centriranim u ćelijama.

Prije opisa SIMPLE postupka potrebno je izvesti jednadžbu za tlak, ili korekciju tlaka, pomoću koje se osigurava solenoidnost.

#### Jednadžba za tlak i korekciju tlaka

Obzirom na linearnu vezu brzine i tlaka, moguće je koristiti ili jednadžbu za tlak ili korekciju tlaka. Iz jednadžbe količine gibanja računa se brzina koja zadovoljava jednadžbu kontinuiteta ukoliko je poznat tlak kojim se nameće solenoidnost. Ako taj tlak nije poznat, računa se gradijent iz nekog polja tlaka  $\mathbf{p}^*$ , koje se uzima iz prethodne iteracije ili prethodnog vremenskog trenutka. Sada se računa brzina koja ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta iz jednadžbe količine gibanja:

$$\mathbf{N} \mathbf{u}^* = \mathbf{f} - \mathbf{G} \mathbf{p}^*. \quad (\text{A.15})$$

Brzina koja zadovoljava jednadžbu kontinuiteta zapiše se pomoću korekcije brzine  $\mathbf{u}'$  na slijedeći način:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}'. \quad (\text{A.16})$$

Slično se zapiše polje tlaka:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* + \mathbf{p}', \quad (\text{A.17})$$

gdje je polje  $\mathbf{p}$  ono koje će nametnuti solenoidnost polja brzine. Uvrštavajući jednadžbe (A.16) i (A.17) u (A.15), uz  $\mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{G} \mathbf{p}$ , zbog linearnosti slijedi:

$$\mathbf{N} \mathbf{u}' = -\mathbf{G} \mathbf{p}', \quad (\text{A.18})$$

odakle, množeći s lijeva sa  $N^{-1}$  i uzimajući divergenciju slijedi:

$$DN^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}' = -D\mathbf{u}' = D(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = D\mathbf{u}^*,$$

jer je  $D\mathbf{u} = 0$ . Dijagonalno dominantna matrica  $N^{-1}$  se ne invertira nego se aproksimira sa dijagonalom  $\mathbf{a}_u^{-1}$ , pa je jednažba za korekciju tlaka:

$$D\mathbf{a}_u^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}' = D\mathbf{u}^*. \quad (\text{A.19})$$

Ovdje je važno primijetiti da korištena aproksimacija neće utjecati na konačno rješenje, već će samo malo usporiti konvergenciju. Tako će konačno rješenje biti  $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ , kada izvorski član u Poissonovoj jednažbi iščezne  $D\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ .

Za jednažbu za tlak uvesti će se oznaka  $\hat{\mathbf{u}}^*$  za brzinu koja se računa bez ikakvoga utjecaja gradijenta tlaka, pa uz jednažbu (A.15) za brzinu formalno vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= N^{-1}\mathbf{f} - N^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}^*, \\ \hat{\mathbf{u}}^* &= N^{-1}\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

pa nakon oduzimanja slijedi:

$$\mathbf{u}^* = \hat{\mathbf{u}}^* - N^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}^*. \quad (\text{A.21})$$

Brzina  $\hat{\mathbf{u}}^*$  ne zadovoljava jednažbu kontinuiteta, ali ne ovisi o tlaku, dok brzina  $\mathbf{u}^*$  ovisi o tlaku, i za nju vrijedi jednažba za korekciju tlaka (A.18). Uvrštavajući (A.17) u (A.18), uz (A.21), slijedi:

$$DN^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) = D\mathbf{u}^* = D(\hat{\mathbf{u}}^* - N^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}^*),$$

odakle slijedi jednažba za tlak:

$$DN^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} = D\hat{\mathbf{u}}^*,$$

pa se u osnovnoj metodi rješava aproksimacija:

$$D\mathbf{a}_u^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} = D\hat{\mathbf{u}}^*. \quad (\text{A.22})$$

Jednažba za korekciju tlaka ima isti tip rubnih uvjeta kao jednažba za tlak. Na rubu na kojem je propisan tlak, korekcija tlaka je  $p' = 0$ . Za Neumannov rubni uvjet jednažbe za tlak vrijedi slično, pa homogeni Neumannov za tlak ostaje homogeni Neumannov rubni uvjet za korekciju tlaka.

## SIMPLE algoritam

Osnovni SIMPLE algoritam, za homogeni tok  $\rho = \text{konst}$ , sastoji se od slijedećih koraka [138]:

1. Rješavanje jednadžbe količine gibanja za  $\mathbf{u}^*$ , držeći ostale veličine konstantnima:

$$\mathbf{N} \mathbf{u}^* = \mathbf{f} - \mathbf{G} \mathbf{p}^o,$$

gdje je  $\mathbf{N} \equiv \mathcal{N}(\mathbf{v}^o)$  linearizacija konvekcije oko brzine iz prethodnog koraka  $^o$ , koja sadrži i difuziju,  $\nabla \cdot (\mathbf{v}^o \mathbf{v}) - \nu \nabla^2 \mathbf{v}$ .

2. Formiranje jednadžbe za korekciju tlaka (ili jednadžbe za tlak), i njezino rješavanje držeći ostale veličine konstantnima:

$$\begin{aligned} p' : D \mathbf{a}_u^{-1} \mathbf{G} \mathbf{p}' &= D \mathbf{u}^*, \\ p : D \mathbf{a}_u^{-1} \mathbf{G} \mathbf{p} &= D \hat{\mathbf{u}}^*, \end{aligned}$$

gdje je  $\mathbf{a}_u$  dijagonalna operatora  $\mathbf{N}$  na MAC konfiguraciji mreža <sup>13</sup>.

3. Korekcija tlaka i brzine:

$$\begin{aligned} p' : \mathbf{u}^n &= \mathbf{u}^* - \mathbf{a}_u^{-1} \mathbf{G} \mathbf{p}', \\ p : \mathbf{u}^n &= \mathbf{u}^* - \mathbf{a}_u^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^o), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p' : \mathbf{p}^n &= \mathbf{p}^o + \alpha_p \mathbf{p}', \\ p : \mathbf{p}^n &= \mathbf{p}^o + \alpha_p (\mathbf{p} - \mathbf{p}^o). \end{aligned}$$

Podrelaksacija  $\alpha_p$  je potrebna da se osigura konvergencija. Podrelaksacija brzine se primjenjuje implicitno, što diže dijagonalnu dominantnost sustava.

4. Rješavanje ostalih transportnih jednadžbi, obično za turbulenciju, koncentracije tvari (engl. *species*), energetska jednadžbu.
5. Provjera kriterija konvergencije, i povratak na točku 1 ako je potrebno.

Ako se računa pomoću korekcije tlaka mogu se uvesti razna pojednostavljenja u proces, jer će u iskonvergiranim rješenjima ionako korekcija tlaka biti 0.

<sup>13</sup>Kod približnih projekcija,  $\mathbf{a}_u$  se obično interpolira u Rhie-Chow metodi. Jednadžba za tlak formira se kao u projektivnoj metodi, tako da se  $\mathbf{u}^*$  koristi za računanje divergencije na desnoj strani. U Rhie-Chow metodi, mora se prionterpolirati i djelovanje susjednih koeficijenata na susjedne brzine, kao i desna strana sustava. Ako je u izvoru i gradijent tlaka rješava se jednadžba za korekciju tlaka, u protivnom se rješava jednadžba za tlak.

### A.4.2. Povezivanje brzine i tlaka u metodi kontrolnih volumena sa primitivnim varijablama na mrežama centriranim u ćelijama

Kod osnovne <sup>14</sup> metode kontrolnih volumena koristi se linearna interpolacija za brzinu i tlak. Poznato je [138] da takav odabir na mreži ne-MAC konfiguracije može proizvesti "cik-cak" polja (engl. *checkerboard*, *zig-zag*) ako rješenje nije linearno <sup>15</sup>. Problem se javlja jer operator divergencije ne "prepoznaje" neke modove koji očigledno nisu solenoidni. Uzrok problema je što su ti modovi u jezgri operatora divergencije. Filtri se konstruiraju tako da prigušuju ili otklanjaju nesolenoidne modove na stabilan način [53]. Više o filtrima za otklanjanja cik-cak rješenja može se naći u [150, 53]

U kontekstu formulacija sa primitivnim varijablama, problem povezivanja brzine i tlaka u metodi kontrolnih volumena na mrežama centriranim u ćelijama rješava se u duhu Rhie-Chow [149] postupka. U ovom pristupu, koji se može interpretirati kao filtriranje [53], matrični se koeficijenti interpoliraju linearnom interpolacijom, iz dva volumena koji dijele stranicu, u točke u kojima je potrebna za računanje volumnog ili masenog protoka. Na taj način se interpolacijom efektivno dobiva određena mreža MAC konfiguracije, te je projekcija približna. Rhie-Chow metoda može MAC konfiguraciju aproksimirati na proizvoljnoj nestrukturiranoj mreži.

Na mrežama centriranim u ćelijama, greška između egzaktne i Rhie-Chow projekcije je takva [62, 53, 82] da ima difuzno svojstvo pa prigušuje oscilacije.

### A.4.3. Nova metoda

Zanimljiva nova metoda za računanje nestlačivog toka predložena je na Katedri za mehaniku fluida [106], Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, pod vodstvom prof. Zdravka Viraga. Tu se vrtložni dio polja brzine računa iz uvjeta nevtložnosti gradijenta tlaka izračunatog iz jednadžbe količine gibanja. Metodu je moguće formulirati na proizvoljnim mrežama. Umjesto brzine, u stranicama ćelija, koristi se površinski volumni/maseni protok kao nepoznanica.

Nova metoda sastoji se od dva glavna koraka [106]:

1. U početku se jednadžba kontinuiteta riješi na strojnu točnost, može i do neke

---

<sup>14</sup> Jedna Gaussova točka za volumne i površinske integrale.

<sup>15</sup> Problem se ne javlja ako je traženo rješenje tlaka linearno [149].

manje željene točnosti. Ako se riješi slabije, onda je i ostvarivi stupanj točnosti kasnijeg postupka manji odn., neće se nikada moći postići baš strojna točnost za padove tlaka po petljama

2. Nakon toga se korekcije izvode tako da jednadžba kontinuiteta uvijek ostaje zadovoljena <sup>16</sup>. Praktički to znači postupak dodavanja vrtložnog dijela polja brzine dok rotor numeričkog gradijenta tlaka ne postane jednak nuli. I to je onda konačno rješenje za korištenu mrežu i odabranu shemu diferencije. Kasnije, ako se želi prikazati polje tlaka, ono se dobiva integriranjem gradijenata, polazeći od jedne točke s poznatim tlakom.

---

<sup>16</sup> Korekcije mijenjaju protoke kroz stranice kontrolnih volumena na način koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta, jer se korigira samo vrtložna komponenta.

## B Povezivanje brzine i tlaka u metodi konačnih elemenata

U metodi konačnih elemenata se zna puno više o kompatibilnosti diskretnih funkcijskih prostora brzine i tlaka nego u metodi kontrolnih volumena ili konačnih diferencija. Zbog toga što se tlak ne javlja u jednadžbi kontinuiteta, model nestlačivog strujanja zahtjeva poseban postupak. Konačni elementi ne mogu se odabrati proizvoljno, već moraju zadovoljiti LBB uvjet kako bi diskretizacija bila stabilna [30, 65]. LBB uvjet (Olga Aleksandrovna Ladiženskaja, Ivo Babuška, Franco Brezzi) govori o kompatibilnosti funkcijskih prostora brzine i tlaka. Taj uvjet se obično u diskretnim prostorima svede na odabir interpolacije za brzinu jednog reda više od interpolacije za tlak.

U Metodi konačnih elemenata postoje dva pristupa problemu:

- Mješoviti konačni elementi (engl. *mixed finite elements*), koji zadovoljavaju diskretni LBB uvjet.
- Stabilizirani konačni elementi (engl. *stabilised finite elements*), koji ne zadovoljavaju LBB uvjet.

### B.1. Mješoviti konačni elementi

Kod mješovitih konačnih elemenata upotrebljavaju se različite bazne funkcije (funkcija oblika) za različita polja <sup>1</sup>. U metodi konačnih elemenata svako fizikalno polje izražava se kao linearna kombinacija skupa odabranih baznih funkcija [195]. Te bazne funkcije su definirane na mreži, odnosno na određenom tipu elementa mreže.

---

<sup>1</sup> Polje u smisli klasične teorije polja.

Bazne funkcije na svakom elementu su obično polinomi nižeg reda. LBB<sup>2</sup> uvjet osigurava [30, 73, 81, 83] regularnost sustava (A.3), uz pretpostavku da je linearizacija operatora  $\mathcal{N}$  regularna.

Zbog jednostavnosti, promatraju se Stokesove jednadžbe (A.2). Upotrebom Galerkinove metode dobiva se diskretna formulacija u kojoj se traži rješenje oblika:

$$\mathbf{v} \approx \hat{\mathbf{v}} = \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^n v_i^r \mathbf{N}_i^r, \quad (\text{B.1})$$

$$p \approx \hat{p} = \sum_{i=1}^m p_i L_i, \quad (\text{B.2})$$

gdje su  $\mathbf{N}_i^r = N_i \mathbf{e}_r$ ,  $N_i$  i  $L_i$  skalarne bazne funkcije, a  $\mathbf{e}_r$  je jedinični vektor u smjeru  $r$ . Sa  $d$  je označen broj prostornih dimenzija. Broj nepoznanica za brzinu je  $dn$ , a za tlak  $m$ . Integracijom baznih funkcija za komponente brzine  $N_i$  i za tlak  $L_i$ , dobiva se linearni sustav za koeficijente  $v_i^r$  i  $p_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{N}_{ij} v_j^r + \sum_{j=1}^m G_{ij}^r p_j &= f_i^r, \quad i = 1, \dots, dn, \quad r = 1, \dots, d, \\ \sum_{r=1}^d \sum_{j=1}^n G_{ji}^r v_j^r &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ij} &= \int_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dV, \\ G_{ij}^r &= \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial L_i}{\partial x_r} N_j \, dV = -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_r} L_j \, dV + \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} N_i L_j n_r \, dS, \\ f_i^r &= \int_{\Omega} g^r \mathbf{N}_i^r \, dV. \end{aligned}$$

Diskretni oblik jednadžbi sada se može zapisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{G}^3 \end{bmatrix}.$$

Ovdje je  $\bar{N}$  matrica sa elementima  $\bar{N}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}^r$  ima elemente  $G_{ij}^r$ , a:

$$\mathbf{u} = (v_1^1, \dots, v_n^1, v_1^2, \dots, v_n^2, v_1^3, \dots, v_n^3)^T, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)^T.$$

<sup>2</sup> U nekoj literaturi o metodi konačnih elemenata taj se uvjet naziva samo Babuška–Brezzi uvjet.

Matrica  $\mathbf{N}$  je dimenzije  $dn \times dn$ , dok je  $\mathbf{G}$  dimenzije  $m \times dn$ . U gornjoj diskretizaciji je  $d = 3$ . Jednadžba kontinuiteta je pri tome pomnožena sa  $-1/\rho$ , pa se dobije "simetričan" sustav.

Diskretni oblik jednadžbi (A.2) je:

$$\mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.4})$$

Ekvivalentne matrice  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{G}$  dobivaju se također i u drugim diskretizacijama [112], kao na primjer metodom kontrolnih volumena. Postavlja se pitanje koji su uvjeti potrebni za  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{G}$  da bi  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{p}$  bili jednoznačno određeni. Prva pretpostavka je da je  $\mathbf{N}$  regularna<sup>3</sup>. Tada, množenjem (B.3) s lijeva sa inverzom  $\mathbf{N}^{-1}$  dobiva se  $\mathbf{u}$ , koji uvrštavanjem u (B.4) daje linearni sustav za  $\mathbf{p}$ :

$$-\mathbf{G}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{G}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{f}.$$

Uz izračunati tlak, brzina slijedi iz:

$$\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{G}\mathbf{p}.$$

Da bi  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{p}$  bili jedinstveni, *Schurov komplement*  $\mathbf{G}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}$  ne smije biti singularan. Za regularan  $\mathbf{N}$ , nužan i dovoljan uvjet je da  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  bude regularno, odnosno da  $\text{Ker}(\mathbf{G}^T) = 0$ , tj. da je  $\mathbf{G}^T$  ranga  $m$ , što je ekvivalentno uvjetu [73]:

$$\sup_{\hat{\mathbf{v}}} \int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} > 0,$$

za sve diskretne tlakove  $\hat{p} \neq 0$ , gdje je supremum po diskretnim brzinama oblika (B.1). Ovo osigurava rješivost, ali za konvergenciju metode potrebna je i stabilnost. U promatranom kontekstu stabilnost podrazumijeva da  $\mathbf{G}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}$  ne postane singularan profinjavanjem intervala mreže  $h$ . Stabilnost je također dovoljna za optimalnu točnost<sup>4</sup>. Optimalnu točnost osigurava [112] LBB uvjet:

$$\inf_{\hat{p}} \sup_{\hat{\mathbf{v}}} \frac{\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_1 \|\hat{p}\|_0} \geq \gamma > 0, \quad (\text{B.5})$$

<sup>3</sup> Stabilizacija konvekcije obično ima za posljedicu da  $\mathbf{N}$  bude pozitivno definitna, osiguravajući tako regularnost operatora.

<sup>4</sup> Neke metode nisu toliko nestabilne da dovedu do oscilacija, ali ne ostvare očekivani red točnosti [178].



gdje je  $\gamma$  neovisan o veličini intervala  $h$ , a infimum je uzet po svim  $\hat{p} \neq 0$  oblika (B.2). Kada je LBB uvjet zadovoljen, mogu se procijeniti greške diskretnih Navier-Stokesovih jednadžbi [73]:

$$\|\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_1 + \|\hat{p} - p\|_0 \leq C (h^k \|\mathbf{v}\|_{k+1} + h^{l+1} \|p\|_{l+1}), \quad (\text{B.6})$$

gdje je pretpostavljeno je da su točna rješenja  $\mathbf{v}$  i  $p$  iz  $[H^{k+1}(\Omega)]^d$  i  $H^{l+1}(\Omega)$ . Konstanta  $C$  ne ovisi o veličini intervala mreže  $h$ . Stupanj polinoma baznih funkcija za brzinu je  $k$ , a za tlak je  $l$ . Može se pokazati [73] da je  $k = l + 1$  optimalan izbor tj., da brzinu treba uzeti polinom jedan red viši od tlaka.

Neki elementi koji zadovoljavaju LBB uvjet su Taylor–Hood [171] element (Q2-Q1), koji ima kvadratnu interpolaciju za brzinu i linearnu za tlak, gdje su obje interpolacije kontinuirane na rubu elementa. Zatim, Crouzeix–Raviart [48] familija elemenata također zadovoljavaju LBB uvjet, od kojih najpopularniji Q2-P1 ima diskontinuirani tlak po rubu elementa.

Konačni elementi koji ne zadovoljavaju LBB uvjet, ili osciliraju, ili ne konvergiraju u točno rješenje [112], ili ne konvergiraju onim redom koji se očekuje od elementa [178]. Iscrpan pregled mješovitih konačnih elemenata za nekompresibilan tok dan je u [81]. Mješoviti konačni elementi stvaraju velike probleme prilikom implementacije [167].

## B.2. Stabilizirani konačni elementi

Kada se koriste interpolacije istog reda elementi obično ne zadovoljavaju LBB uvjet te se moraju na neki način stabilizirati, što se postiže [52] korištenjem jednadžbe kontinuiteta. Takva aproksimacija pojednostavljuje implementaciju, ali obično rezultira manje točnim rješenjem za tlak [167].

Riješenje diskretnog problema može se formalno zapisati u nediskretiziranom obliku [167]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Sustav jednadžbi (B.7) je indefinitan<sup>5</sup> i nesimetričan ako postoji konvekcija. Za matricu stabilizacije  $\mathbf{E}$  vrijedi  $\mathbf{E} = 0$  ako elementi zadovoljavaju LBB uvjet. Odabirom metode stabilizacije, postaje definirana matrica  $\mathbf{E}$ . Svojtvene vrijednosti od  $\mathbf{N}$  imaju pozitivan

<sup>5</sup> Za matricu se kaže da je indefinitna ako ima i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti.

realni dio, a svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{E}$  su ili 0, ili imaju negativan realni dio [167], što predstavlja problem za većinu linearnih iterativnih rješavača. Jedino u slučaju stabilizacije "penalty" formulacijom <sup>6</sup>  $\mathbf{E}$  će imati pozitivne svojstvene vrijednosti. Metode stabilizacije su analogne onima obrađenim u poglavlju A.3..

---

<sup>6</sup> Penalty formulacija objašnjena je u poglavlju A.3.1.



# C | Numerička integracija

U ovom radu se volumni i površinski integrali računaju na simpleksima, odnosno na poliedrima i poligonima koji se rastavljaju na simplekse.

## C.1. Kvadraturene formule na trokutima

Da se numerički izračuna integral polinoma  $p(\mathbf{x})$  na trokutu  $\tau$  površine  $|\tau|$ , postoje egzaktne kvadraturene formule:

$$\int_{\tau} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \omega_j p(\boldsymbol{\xi}_j) |\tau|,$$

gdje su  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  težinski koeficijenti za koje vrijedi  $\sum_{j=1}^k \omega_j = 1$ , a  $\boldsymbol{\xi}_j$  pripadajuće Gaussove točke iz unutrašnjosti trokuta <sup>1</sup>  $\tau$ , pa je prosječna vrijednost polinoma na trokutu:

$$\mathbf{a}(\tau)p = \bar{p}_{\tau} = \sum_{j=1}^k \omega_j p(\boldsymbol{\xi}_j).$$

U nastavku se nalazi popis kvadraturenih formula, gdje  $q$  označava najveći stupanj polinoma za koji je formula egzaktna. Neka su  $\boldsymbol{\eta}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  vrhovi trokuta  $\tau$ , tada su koordinate  $\boldsymbol{\xi}_j$  Gaussovih točaka u trokutu dane sa  $\boldsymbol{\xi}_j = \alpha_j \boldsymbol{\eta}_1 + \beta_j \boldsymbol{\eta}_2 + \gamma_j \boldsymbol{\eta}_3$ , gdje su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  takozvane koordinate trokuta. Zbog simetrije kvadraturenih formula na trokutu <sup>2</sup>, sve se Gaussove točke pojavljuju u grupama od jedne, tri ili šest. Tako, ako Gaussova

<sup>1</sup> Postoje kvadraturene formule koje uzimaju i točke  $\boldsymbol{\xi}_j$  sa ruba trokuta, ali u ovom radu se koriste samo one u kojima su Gaussove točke iz unutrašnjosti.

<sup>2</sup> Postoje Gaussove formule na trokutu koje nisu simetrične.

točka ima koordinatu  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , ta točka se pojavljuje sama u težištu trokuta. Ako su dvije koordinate jednake, npr.  $(a, b, b)$ , onda se pojavljuju još dvije točke u istoj **orbiti** sa koordinatama  $(b, a, b)$  i  $(b, b, a)$ . Ako su sve tri koordinate različite, npr.  $(a, b, c)$ , onda postoji još pet točaka u toj orbiti sa slijedećim koordinatama  $(a, c, b)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(b, c, a)$ ,  $(c, a, b)$  i  $(c, b, a)$ . Težinski koeficijenti za točke u istoj orbiti su jednaki.

U tablici ?? su simetrične formule, gdje je navedena samo jedna Gaussova točka po grupi, i  $m$  naznačuje da li Gaussova točka pripada grupi sa jednom, tri ili šest točaka. Autor ovog rada nije našao simetričnu formulu za  $q = 3$  sa minimalnim brojem točaka u kojoj su svi koeficijenti pozitivni, pa je u tablici ?? navedena pozitivna formula za  $q = 3$ , koja naravno nije simetrična. Detaljan popis integracionih formula nalazi se na [45, 44, 46], a postoji i elektronička "Encyclopaedia of Cubature Formulas" na [43].

# D Osnovni koncepti normiranih prostora

U ovom poglavlju biti će izneseni neki koncepti matematičke analize, koji se koriste u analizi Navier-Stokesovih jednažbi, kao što su Fourierov red, Hilbertov i prostor Soboljeva, i pojmovi kao što su potpunost te konvergencija. Pregled prikazanih koncepta temeljen je na onom koji se može naći u [123], i služi za uvođenje pojmova koji se koriste u ostatku doktorata. Namjenjen je inženjerima, te zbog toga nije dovoljno formalan da zadovolji matematičare. Kompletanija i formalnija izlaganja mogu se naći u matematičkim udžbenicima [108, 10].

## D.1. Fourierovi redovi

Kada se dozvoljava samo *uniformna konvergencija*, samo se periodične funkcije mogu reprezentirati Fourierovim redom, no tada ne bi bilo moderne teorije parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Ovdje se razmatraju Fourierovi redovi funkcija koje nisu periodične.

Formalno, za funkciju  $v(x)$ , definiranu na intervalu  $x \in [0, L]$ , Fourierov red je oblika:

$$v(x) = \sum_k^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (\text{D.1})$$

gdje je  $\{\varphi_k\}$  potpun skup *baznih funkcija*, i:

$$a_k = \langle v, \varphi_k \rangle \equiv \int_0^L v(x) \varphi_k(x) dx. \quad (\text{D.2})$$

Pretpostavljeno je da su  $v$  i  $\varphi_k$  u odgovarajućim funkcijskim prostorima <sup>1</sup>. U konačno dimenzionalnom slučaju, uvijek se može konstruirati baza za koju se zna da je baza. U beskonačno dimenzionalnom slučaju za to je potreban koncept prebrojivosti. Ako je *prebrojiv* skup baznih funkcija **prebrojiv**, za neki funkcijski prostor (obzirom na neku normu), onda se svaka funkcija  $v$  iz tog prostora može reprezentirati u toj bazi. Prebrojivost je važna u kontekstu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, jer je važno da odabrana reprezentacija rješenja uključuje potpun skup baznih funkcija. U protivnom se može dogoditi da numeričko rješenje ne bude točno, ili ga se uopće ne može dobiti.

## D.2. Hilbertovi prostori

U ovom poglavlju biti će uveden koncept funkcijskih prostora općenito, i posebno Hilbertovih prostora. Definirati će se kanonski Hilbertov prostor  $L^2$ , i staviti u kontekst Fourierovih redova.

Najprije je potrebno spomenuti još neke koncepte iz linearne algebre. Vektorski prostori su linearni, pa je linearna kombinacija dva vektora  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{w}$  iz vektorskog prostora  $\mathcal{V}$ :

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Tada se kaže da je  $\mathcal{V}$  **zatvoren** na linearnu kombinaciju njegovih elemenata.

Ako se  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{w}$  zamjene funkcijama  $v$  i  $g$ , koje imaju Fourierovu reprezentaciju oblika (D.1), zatvorenost i dalje vrijedi (uz par tehničkih detalja [123]).

Kao što je već naznačeno sada u prvi plan dolazi konvergencija, obzirom da se radi o beskonačnoj bazi, pa ju je ovdje potrebno preciznije definirati. Neka se na trenutak ne radi o nizu funkcija, već o nizu realnih brojeva  $\{a_n\}$ , reklo bi se da  $a_n$  konvergira prema  $a$ , i pisalo  $a_n \rightarrow a$ , kada  $\forall \epsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da  $|a - a_n| < \epsilon, \forall n > n_0$ . Važno je moći promatrati ponašanje nizova u smislu Cauchya:  $\forall \epsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da

<sup>1</sup> Analogija u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru, koordinate vektora

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \quad (\text{D.3})$$

su

$$u_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle,$$

gdje  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označava skalarno množenje. Bazna funkcija je analogna *baznom vektoru*, a takvu analogiju ne treba uzimati doslovno jer za  $d < \infty$  konvergencija nije upitna.

$|a_m - a_n| < \epsilon, \forall m, n > n_0$ . Željeli bismo da to povlači  $a_n \rightarrow a$ . Ovo svojstvo ne vrijedi uvijek, no velika je klasa nizova za koje vrijedi, a za svaki prostor u kojem konvergencija u smislu Cauchyja implicira konvergenciju (u "običnom" smislu) kaže se da je **potpun**.

Prirodna generalizacija konvergencije niza na funkcije, je da se apsolutna vrijednost  $|\cdot|$  zamjeni normom  $\|\cdot\|$ . Bez obzira kako se norma računa, bilo bi za očekivati da  $\|v - v_n\| < \epsilon$  implicira da u "nekom" smislu  $v_n \rightarrow v$ . Sve navedeno je dovoljno za konstrukciju funkcijskog prostora. Takvi prostori se nazivaju **Banachovi prostori**, no ne posjeduju dovoljno strukture za analizu Navier-Stokesovih jednadžbi.

Obzirom da postoji puno normi, za očekivati je da će izbor norme imati ključnu ulogu u identificiranju i klasificiranju nekog funkcijskog prostora. Da bi  $\|v - v_n\| < \epsilon$  imalo smisla, potrebno je da  $\|v - v_n\|$  postoji, tj. da je  $\|v - v_n\| < \infty$ . U konačno dimenzionalnom Euklidskom prostoru norma je euklidska udaljenost, tj. Euklidska norma:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

koju se naziva duljina od  $\mathbf{u}$ , a "2" u indeksu služi da ju se razlikuje od drugih  $p$  normi, definiranih na analogan način. Vidi se da je Euklidska norma (odnosno njen kvadrat) upravo skalarno množenje vektora sa samim sobom:

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

U Euklidskom prostoru je tijesna veza između norme i skalarnog produkta, a isto vrijedi za beskonačno dimenzionalne prostore koji se nazivaju **Hilbertovim prostorima**. Na Hilbertov prostor se može gledati kao na Banachov prostor s "više strukture", koja je posljedica "geometrije" koju je donijeo skalarni produkt. U konačno dimenzionalnom prostoru se pomoću skalarnog množenja mogu definirati kutovi, što vrijedi i u beskonačno dimenzionalnim prostorima čija je norma inducirana skalarnim produktom.

Postoji puno Hilbertovih prostora, no prvo se definira "kanonski" Hilbertov prostor označen s  $L^2$ . Taj prostor je član  $L^p$  klase prostora, među kojima je jedino  $L^2$  Hilbertov. Ostali su Banachovi prostori. Norma  $L^p$  definira se sa:

$$\|v\|_{L^p} \equiv \left( \int_{\Omega} |v|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{D.4})$$

gdje je  $\Omega$  ograničena ili neograničena domena,  $|\cdot|$  u općem slučaju kompleksni modul (apsolutna vrijednost ako je  $v$  realna), a  $\mu$  je "mjera" na  $\Omega$ .



Integral u (D.4) je *Lebesgueov integral*, koji je generalizacija *Riemannovog integrala*, zato i notacija  $L^p$ . Obzirom na do sada izrečeno,  $v$  je u  $L^p(\Omega)$  funkcijskom prostoru ako i samo ako  $\|v\|_{L^p} < \infty$ . Konkretno,  $v \in L^2(\Omega)$  kada je  $\|v\|_{L^2} < \infty$ , gdje je:

$$\|v\|_{L^2} \equiv \left( \int_{\Omega} |v|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D.5})$$

Obzirom da se u ovom radu koriste samo realne funkcije  $v$ , može se izbaciti  $|\cdot|$  notacija kada se radi o  $L^2$  prostoru, ili bilo kojem drugom parnom  $L^p$  prostoru. Nadalje, zamijeniti će se Lebesgueova mjera  $\mu$  sa intervalima u  $\Omega$ , i koristiti uobičajena  $dx$  notacija, iako je integral formalno Lebesgueovog tipa.

Lako se dokazuje *Cauchy-Schwarzova nejednakost*, koja vrijedi u svakom Hilbertovom prostoru, a koja je u  $L^2(\Omega)$ :

$$\langle v, g \rangle \leq \|v\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad \forall v, g \in L^2(\Omega). \quad (\text{D.6})$$

Gornja nejednakost iskazuje da je skalarni produkt dvije funkcije u  $L^2$  ograničen produktom njihovih  $L^2$  normi, koje su konačne. Ovo važno svojstvo se često koristi u ocjenama koje se koriste u dokazivanju postojanja rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, i vrijedi samo u Hilbertovim prostorima. Jednako je važna generalizacija na druge  $L^p$  prostore, koja se naziva *Hölderova nejednakost*, ali se teže dokazuje iz tehničkih razloga od kojih je jedan da više ne stoji zatvorenost na množenje [108].

Sada se moguće vratiti na pitanje koje klase funkcija se mogu reprezentirati Fourierovim redom. Odgovor je da se sve funkcije u  $L^2$ , ili bilo kojem drugom Hilbertovom prostoru, mogu napisati u obliku jednadžbe (D.1). Formalni dokaz za to može se pronaći u udžbenicima iz matematičke analize, ali tu činjenicu moguće je argumentirati i heuristički. Prvo se je potrebno prisjetiti da se Fourierovi koeficijenti formalno računaju iz jednadžbe (D.2):

$$a_k = \langle v, \varphi_k \rangle \equiv \int_{\Omega} v(x) \varphi_k(x) dx,$$

za sve prebrojivo beskonačne skupove indeksa, gdje je  $\Omega = [0, L]$ . Uspoređujući jednadžbu (D.2) s Cauchy-Schwarzovom nejednakosti (D.6), vidi se da je osigurana ograničenost, a time i postojanje  $a_k$ , ako su  $\varphi_k$  i  $v$  u  $L^2(\Omega)$ . Treba primijetiti dvije stvari. Prvo, da je  $\{\varphi_k\}$  obično u "ljepšem" prostoru od  $L^2$ . Druga je da prethodna opservacija nije dovoljna za Fourierovu reprezentaciju (D.1) funkcija iz  $L^2$ . Konkretno, postojanje

skalarnog množenja, kojima se računaju koeficijenti  $a_k$ , ne osigurava da ti koeficijenti išćezavaju dovoljno brzo s povećavanjem  $k$  da impliciraju konvergenciju Fourierovog reda. Da bi to moglo ipak biti tako daje naslutiti *Riemann-Lebesgueova lema* koja iskazuje, uz blage pretpostavke na  $v$  i  $\varphi_k$ , da  $a_k \rightarrow 0$  za  $k \rightarrow \infty$ . Najjači rezultat u tom smislu je *Rieszov teorem o reprezentaciji*, koji se može iskoristiti i za dokazivanje postojanja Fourierovih koeficijenata, i za konvergencije takvog reda kada  $v \in L^2(\Omega)$ . No već i *Parsevalova jednakost*, u slučaju kada je  $\{\varphi_k\}$  ortonormirana baza, daje:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_k^{\infty} |a_k|^2.$$

Tako, za  $v \in L^2(\Omega) \Rightarrow \sum_k^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ , pa Fourierov red konvergira u  $L^2$  normi [108].

Može se primijetiti da periodičnost od  $v$  nigdje nije uzeto kao pretpostavka, ali ništa ne implicira uniformnu konvergenciju. Zbog prirode  $L^p$  prostora,  $L^2$  ne implicira čak ni konvergenciju u svakoj točki od  $\Omega$ . To je posljedica upotrebe Lebesgueove mjere u Lebesgueovom integralu, gdje se koristi svojstvo da je integral na skupu mjere 0 jednak nuli. Zato se mogu ignorirati skupovi mjere nula prilikom integracije, na čemu se temelje slabe formulacije. To uvodi koncept "skoro svugdje", koji se koristi u  $L^p$  prostorima, kada se govori npr. o konvergenciji Fourierovog reda skoro svugdje, i označava sa s.s. Konkretno to znači da neko navedeno svojstvo vrijedi u cijeloj domeni osim na skupovima mjere 0.

Za funkcije iz  $L^2$  obično se kaže da imaju konačnu energiju, po analogiji s mjerom kinetičke energije polja brzine  $U^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ , bez obzira da li određena funkcija ima fizikalnu interpretaciju ili ne. Tako se jednadžba (D.5) može interpretirati "energijom" polja  $v$ , koja je očito konačna ako je  $v \in L^2$ .

U 2D prostor:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u(x)|^2 dV < +\infty \right\}$$

je Hilbertov u skalarnom produktu

$$(u, v)_0 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dV,$$

a norma u  $L^2(\Omega)$  je dana s  $\|u\|_0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_0}$ .

Prostor:

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \exists C > 0, |u(x)| \leq C, \forall x \in \Omega\}$$

je Banachov u normi

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C : |u(x)| \leq C \text{ svugdje, osim eventualno na skupu mjere nula}\}.$$

Za  $u$  neprekidne funkcije ta je norma

$$\|u\|_\infty(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

### D.3. Prostori Soboljeva

U ovom poglavlju biti će definirani prostori Soboljeva, koji su nešto "gladi" Hilbertovi prostori od kanonskog.

U analizi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, posebno nelinearnih kao što su Navier-Stokesove jednadžbe, često je potrebno procijeniti iznos derivacija rješenja i ograničiti te derivacije. Da se to omogući potrebno je definirati daljnje funkcijske prostore u kojima su i norme derivacija. Jednu klasu takvih prostora čine *prostori Soboljeva*, koji se mogu definirati pomoću bilo kojeg  $L^p$  prostora, no ovdje će biti navedeni samo za  $L^2$ .

Prije toga potrebno je uvesti uobičajenu notaciju. Neka je  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T$  vektor od  $d$  prirodnih brojeva, tzv. *multi-indeks*, te se definira  $|\alpha| \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ . Parcijalni diferencijalni operator,  $\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d$ , se označi s  $D^\alpha$ . Sada se može definirati **norma Soboljeva**, pridružena  $L^2$  sa:

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} \equiv \left( \langle v, v \rangle_{H^m(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdje je:

$$\langle v, g \rangle_{H^m(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha v D^\alpha g \, dx.$$

Sam prostor Soboljeva je definiran sa

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}. \quad (\text{D.7})$$

Ponovo u 2D prostoru:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d \right\}$$

je Hilbertov uz skalarni produkt

$$(u, v)_1 = (u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dV + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dV,$$

a pripadna norma je  $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_1}$ . Polunorma je definirana s:

$$|u|_1 = |u|_{H^1(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dV \right)^{1/2}.$$

Ako se definira prostor

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

onda je  $H_0^1(\Omega)$  kao potprostor od  $H^1(\Omega)$ , uz naslijeđeni skalarni produkt, također Hilbertov prostor.

Prostor

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, \dots, d \right\}$$

je uz skalarni produkt

$$\begin{aligned} (u, v)_2 = (u, v)_{H^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u(x) v(x) dV + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dV \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) dV \end{aligned}$$

također Hilbertov. Pripadna norma je  $\|u\|_2 = \|u\|_{H^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_2}$ , a polunorma je definirana sa:

$$|u|_2 = |u|_{H^2(\Omega)} = \left( \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dV \right)^{1/2}.$$

Definira se za  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  i polunorma

$$|u|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq 3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\infty}.$$



# Literatura

- [1] R. Abgrall. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation. *Journal of Computational Physics*, 114:45–58, 1994.
- [2] T. Aboiyar, E.H. Georgoulis, and A. Iske. High order weno finite volume schemes using polyharmonic spline reconstruction. In *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Approximation Theory*, pages 113–126, Cluj-Napoca, Romania, 2006.
- [3] T. Aboiyar, E.H. Georgoulis, and A. Iske. Adaptive adler methods using kernel-based polyharmonic spline weno reconstruction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(6):3251–3277, 2010.
- [4] I. Aganović. *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*. Element, Zagreb, 2003.
- [5] R. Ahrem, A. Beckert, and H. Wendland. Recovering rotations in aeroelasticity. *Journal of Fluid and Structures*, 23:874–884, 2007.
- [6] A. S. Almgren, J. B. Bell, and W. G. Szymczak. A numerical method for the incompressible navier–stokes equations based on an approximate projection. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 17:358–369, 1996.
- [7] M. Van Altena. High-order finite-volume discretisations for solving a modified advection-diffusion problem on unstructured triangular meshes. Master’s thesis, University of British Columbia, 1999.

- [8] M. Van Altena and C. Ollivier-Gooch. Finite-volume methods for solving laplace equation on unstructured triangular meshes. In *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics*, page 10, Canada, 1999.
- [9] M. Van Altena and C. Ollivier-Gooch. A high-order accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection-diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 181:729–752, 2002.
- [10] N. Antičić and M. Vrdoljak. *Mjera i integral*. PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2001.
- [11] A. Arakawa and V. R. Lamb. Computational design of the basic dynamical processes of ucla general circulation model. *Methods of Computational Physics*, 17:173–265, 1977.
- [12] R. Askey. Radial characteristic function. Technical report, University of Wisconsin, Madison, 1973. MRC Report 1262.
- [13] K. Aziz and J. D. Hellums. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. *Physics of Fluids*, 10(2):314–324, 1967.
- [14] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40:727–758, 1997.
- [15] A. J. Baker. *Finite element computational fluid mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1983.
- [16] K. Ball. Eigenvalues of euclidan distance matrix. *J. Approx. Theory*, 68:74–82, 1992.
- [17] T. Barth. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the euler and navier–stokes quations. *AGARD Report R-787*, 1992.
- [18] T. Barth and P. O. Frederichson. Higher order solution of the euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. *AIAA paper 90-0013*, 1990.
- [19] T. Barth and M. Ohlberger. *Finite Volume Methods: Foundation and Analysis*, volume 1 of *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2004.

- [20] Timothy Barth and Mario Ohlberger. Finite volume methods: Foundation and analysis. In *ENCYCLOPEDIA OF COMPUTATIONAL MECHANICS, VOLUME 1, FUNDAMENTALS*, pages 439–474. John Wiley and Sons Ltd, 2004.
- [21] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of compressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 131:267, 1997.
- [22] R. Beatson and M. K. Langton. Integral interpolation. In A. Iske and J. Levesley, editors, *Algorithms for Approximation V*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2006.
- [23] A. Beckert and H. Wendland. Multivariate interpolation for fluid-structure-interpolation problems using radial basis functions. *Aerosp. Sci. Technol.*, 5(2):125–134, 2001.
- [24] J. Behrens and A. Iske. Grid-free adaptive semi-lagrangian advection using radial basis functions. *Comput. Math. Appl.*, 43:319–327, 2002.
- [25] J. B. Bell, P. Colella, and H. M. Glaz. A second-order projection method of the incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 85:257–283, 1989.
- [26] A. De Boer, M. Vanderschoot, and H. Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers Structures*, 85:784–795, 2007.
- [27] L. Bonaventura, A. Iske, and E. Miglio. Kernel-based vector field reconstruction in computational fluid dynamic models. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 00:1–16, 2000.
- [28] F. Bos. *Numerical simulation of flapping foil and wind aerodynamics: Mesh deformation using radial basis functions*. PhD thesis, Technical University Delft, 2009.
- [29] D. Braess. *Nonlinear approximation theory*. Springer, Berlin, 1986.
- [30] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [31] M. D. Buhmann. Convergence of univariate quasi-interpolation using multiquadrics. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8:365–383, 1988.



- [32] M. D. Buhmann. Multivariate cardinal interpolation with radial basis functions. *Constructive Approximation*, 8:225–255, 1990.
- [33] M. D. Buhmann. A new class of radial basis functions with compact support. *Math. Comp.*, 70:307–318, 2000.
- [34] M. D. Buhmann. *Radial basis functions, Theory and implementation*. Cambridge University Press, 2003.
- [35] M. Burns. *Automated Fabrication Improving Productivity in Manufacturing*. Prentice Hall, 1993.
- [36] L. S. Caretto, R. M. Curr, and D. B. Spalding. Two numerical methods for three-dimensional boundary layers. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1:39–, 1972.
- [37] L. S. Caretto, A. D. Gosman, S. V. Patankar, and D. B. Spalding. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Lecture Notes in Physics*, 19:60–68, 1973.
- [38] R.E. Carlson and T.A. Foley. Interpolation of track data with radial basis methods. *Comp. Math. Appl.*, 19:163–208, 1990.
- [39] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2:12–26, 1967.
- [40] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier–stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- [41] A. J. Chorin. On the convergence of discrete approximations to navier–stokes equations. *Mathematics of Computation*, 23:341–353, 1969.
- [42] A. J. Chorin and G. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, 1993.
- [43] R. Cools. Encyclopaedia of cubature formulas. [nines.cs.kuleuven.be/ecf](http://nines.cs.kuleuven.be/ecf).
- [44] R. Cools. Monomial cubature rules since “stroud”: a compilation – part 2. *J. Comput. Appl. Math.*, 112:21–27, 1999.

- [45] R. Cools. An encyclopaedia of cubature formulas. *J. Complexity*, 19:445–453, 2003.
- [46] R. Cools and P. Rabinowitz. Monomial cubature rules since “stroud”: a compilation. *J. Comput. Appl. Math.*, 48:309–326, 1993.
- [47] R. Courant. *Calculus of variations and supplementary notes and exercise*. New York University, New York, 1956.
- [48] M. Crouzeix and P. A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equation. *Rairo Analyse Numerique*, 7:33–76, 1973.
- [49] M. Delanaye and J. A. Essers. Quadratic-reconstruction finite volume scheme for compressible flows on unstructured adaptive grids. *AIAA J.*, 35(4):631–639, 1997.
- [50] I. Demirdžić and S. Muzaferija. *Introduction to computational fluid dynamics*. Lecture notes for the course. Mechanical Engineering Faculty, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 1997.
- [51] H. A. Van der Vorst. Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Scientific Computing*, 13(2):631–644, 1992.
- [52] C. R. Dohrmann and P. B. Bochev. A stabilized finite element method for the stokes problem based on polynomial pressure projections. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 46(2):183–201, 2004.
- [53] D. Drikakis and W. Rider. *High-Resolution methods for incompressible and low-speed flows*. Springer-Verlag Berlin / Heidelberg, 2005.
- [54] Dimitris Drikakis and William Rider. *High-Resolution Methods for Incompressible and Low-Speed Flows*. Springer, 2005.
- [55] J. Duchon. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *Rev. Française Automat. Informat. Rech. Opér. Anal. Numer.*, 10:5–12, 1976.

- [56] J. Duchon. Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les  $d^m$ -splines. *Rev. Française Automat. Informat. Rech. Opér. Anal. Numer.*, 12:325–334, 1978.
- [57] J. Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in sobolev spaces. In W. Schempp and K. Zeller, editors, *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, pages 85–100, 1979.
- [58] L. J. Durlofsky and B. Enquist. Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 98:64–73, 1992.
- [59] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comput. Math.*, 9:69–95, 1998.
- [60] G. Fasshauer. Rbf collocation methods and pseudospectral methods. Preprint.
- [61] G. E. Fasshauer. *Meshfree approximation methods in MATLAB*. World Scientific, 2007.
- [62] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2001.
- [63] C. A. J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics: Volume I*. Springer-Verlag, 1988.
- [64] C. A. J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics: Volume II*. Springer-Verlag, 1988.
- [65] M. Fortin. Old and new finite elements for incompressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1(4):347–364, 1981.
- [66] C. Franke and R. Schaback. Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis function. *Adv. Comput. Math*, 4:381–399, 1998.
- [67] C. Franke and R. Schaback. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, 93:73–82, 1998.
- [68] R. Franke. Locally determined smooth interpolation at irregularly spaced points in several dimensions. *JIMA*, 19:471–482, 1977.

- [69] R. Franke and G. Nielsen. Smooth interpolation of large sets of scattered data. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15(11):1691–1704, 1980.
- [70] O. Friedrich. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 144:194–212, 1998.
- [71] P. Geuzaine, M. Delanaye, and J. A. Essers. Computation of high reynolds number flows with an implicit quadratic reconstruction scheme on unstructured grids. In *Proceedings of the 13th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 610–619, 1997.
- [72] P. Giesl and H. Wendland. Approximating the basin of attraction of time-periodic odes by meshless collocation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, 25:1249–1274, 2009.
- [73] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier–Stokes equations*. Springer, 1986.
- [74] F. Girosi. On some extensions of radial basis functions and their applications in artificial intelligence. *Comp. Math. Appl.*, 24:61–80, 1992.
- [75] M.A. Golberg and C.S. Chen. The method of fundamental solutions for potential, helmholtz and diffusion problems. In *Boundary Integral Methods-Numerical and Mathematical Aspects*, pages 103–176. Comput. Mech. Publ., Southampton, 1998.
- [76] M. Golomb and F. Weinberger. Optimal approximation and error bounds. In R. E. Langer, editor, *On numerical approximation*, pages 117–190. University of Wisconsin Press, 1959.
- [77] P. M. Gresho. Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulation issues. *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 23:413–453, 1991.
- [78] P. M. Gresho. Some current cfd issues relevant to the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87:201–252, 1991.

- [79] P. M. Gresho. Some interesting issues in incompressible fluid dynamics, both in continuum and in numerical simulations. *Advances in Applied Mechanics*, 28:45–140, 1992.
- [80] P. M. Gresho and R. L. Sani. On pressure boundary conditions for the incompressible navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7:1111–1145, 1987.
- [81] P. M. Gresho and R. L. Sani. *Incompressible flow and the finite element methods*. Springer, 1998.
- [82] C. Y. Gu. *Computation of flows with large body forces*. Pineridge Press, Swansea, 1991.
- [83] M. D. Gunzburger and R. A. Nicolaides. *Incompressible computational fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1993.
- [84] R. L. Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, 176:1905–1915, 1971.
- [85] R. L. Hardy. Research results in the application of multiquadric equations to surveying and mapping problems. *Survey. Mapp.*, 35:321–332, 1975.
- [86] R. L. Hardy. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method. *Comp. Math. Appl.*, 24:27–34, 1992.
- [87] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces. *Physics of Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [88] M. R. Hestens and E. L. Steifel. Method of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research*, 29:409–436, 1952.
- [89] G. J. Hirasaki. *A General formulation of the boundary condition on the vector potential in three-dimensional hydrodynamics*. PhD thesis, Rice University, Houston, Texas, 1967.
- [90] Y. C. Hon and R. Schaback. On unsymmetric collocation by radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, 119:177–186, 2001.

- [91] W. Hundsdorfer and J.G. Verwer. *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Springer, 2010.
- [92] D. P. Hunt. *Meshfree radial basis function methods for advection-dominated diffusion problems*. PhD thesis, University of Leicester, 2005.
- [93] A. Iske. Reconstruction of functions from generalized hermite-birkhoff data. In C. K. Chui and L. L. Schumaker, editors, *Approximation theory VIII*, pages 257–264. World scientific publishing, 1995.
- [94] A. Iske. *Multiresolution methods in scattered data modelling*. Springer, 2004.
- [95] A. Iske and T. Sonar. On the structure of function spaces of optimal recovery of point functions for eno schemes by radial basis functions. *Num. Math.*, 74:177–201, 1996.
- [96] R. I. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62:40–65, 1986.
- [97] D. A. H. Jacobs. Preconditioned conjugate gradient methods for solving systems of algebraic equations. *Central Electricity Research Laboratories*, 1980.
- [98] H. Jasak. *Error analysis and estimation for finite volume method with applications to fluid flow*. PhD thesis, Imperial College, University of London, London, 1996.
- [99] H. Jasak and Ž. Tuković. Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method. *Transactions of FAMENA*, 30(2):1–18, 2007.
- [100] F. Juretić. *Error analysis in finite volume CFD*. PhD thesis, Imperial College, London, 2004.
- [101] E.J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - i. surface approximations and partial derivative estimates. *Comput. Math. Appl.*, 19:127–145, 1990.
- [102] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59(2):308–323, 1985.

- [103] C. Kiris and D. Kwak. Numerical solution of incompressible navier–stokes equations using a fractional-step approach. *Computers & Fluids*, 30:829–851, 2001.
- [104] N. Kojekine, I. Hagiwara, and V. Savchenko. Software tools using csrbfs for processing scattered data. *Computers & Graphics*, 27(2):311–319, 2003.
- [105] P. K. Koshla and S. G. Rubin. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers and Fluids*, 2:207–209, 1974.
- [106] S. Krizmanić. *Novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka*. PhD thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatska, 2011.
- [107] P. Krysl and T. Belytschko. An efficient linear-precision partition of unity basis for unstructured meshless methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16(4):239–255, 2000.
- [108] S. Kurepa. *Funkcionalna analiza*. Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [109] A. Leonard L. A. Barba and C. B. Allen. Advances in viscous vortex methods - meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 47:387–421, 2005.
- [110] M. Lai, J. B. Bell, and P. Colella. A projection method for combustion in the zero mach number limit. In J. L. Thomas, editor, *Proceedings of the AIAA Eleventh Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 776–783. AIAA Paper 93-3369, 1993.
- [111] M. F. Lai. *A projection method for reacting flow in zero mach number limit*. PhD thesis, Berkeley, University of California, 1993.
- [112] H. P. Langtangen, K.A. Mardal, and R. Winther. Numerical methods for incompressible viscous flow. *Advances in Water Resources*, 25:1125–1146, 2002.
- [113] E. Larsson and B. Fornberg. A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic pdes. *Comput. Math. Appl.*, 46:891–902, 2003.
- [114] C. Li and C. Vuik. Eigenvalue analysis of the simple preconditioning for incompressible flow. *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 11(5-6):511–523, 2004.

- [115] J. Li and C. S. Chen. Some observations on unsymmetric radial basis function collocation methods for convection-diffusion problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57:1085–1094, 2003.
- [116] L. Ling and M. R. Trummer. Multiquadric collocation method with integral formulation for boundary layer problems. *Comput. Math. Appl.*, 48:927–941, 2004.
- [117] R. A. Lorentz. Collocation discretisations of the transport equation with radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, 145:97–116, 2003.
- [118] I. Macêdo, J. P. Gois, and L. Velho. Hermite interpolation of implicit surfaces with radial basis functions, 2009.
- [119] R. S. Marchal, J. C. Heinrich, and O. Zienkiewicz. Natural convection in a square enclosure by a finite element penalty function using primitive fluid variables. *Numerical Heat Transfer*, 1:315–330, 1978.
- [120] K. V. Mardia, J. T. Kent, C. R. Goodall, and J. A. Little. Kriging and splines with derivative informatio. *Biometrika*, 83:207–221, 1996.
- [121] A. D. Maude. Interpolation - mainly for graph plotters. *Comput. J.*, 16:64–65, 1973.
- [122] V. Maz'ya and G. Schmidt. On approximate approximations using gaussian kernels. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 16:13–26, 1996.
- [123] J. M. McDonough. Lectures in computational fluid mechanics of incompressible flow: Mathematics, algorithms and implementations. Iniversity of Kentucky, 2007.
- [124] A. Meister and J. Struckmeier. *Hyperbolic partial differerntial equations: Theory, numerics and applications*. Springer, 2002.
- [125] C. L. Merkle and M. Athavale. Time accurate unsteady incompressible flow algorithms based on artificial compressibility. *AIAA Paper 87-1137*, 1987.
- [126] C. A. Michelli and T. J. Rivlin. A survey of optimal recovery. In C. A. Michelli and T. J. Rivlin, editors, *Optimal estimation in approximation theory*, pages 1–54. Plenum, 1977.



- [127] T. J. Moroney. *An Investigation of a Finite Volume Method Incorporating Radial Basis Functions for Simulating Nonlinear Transport*. PhD thesis, Queensland University of Technology, 2006.
- [128] B. S. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, and K. R. Subramanian. Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions. In *Proceedings of Shape Modeling International*, 2001.
- [129] N. Namura, K. Shimoyama, S. Jeong, and S. Obayashi. Kriging/rbf-hybrid response surface method for highly nonlinear functions. In *2011 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 2534–2541, New Orleans, LA, USA, 2011.
- [130] F. J. Narcowich and J. D. Ward. Norm estimates for the inverses of a general class of scattered-data radial-function interpolation matrices. *J. Approx. Theory*, 69:84–109, 1991.
- [131] F. J. Narcowich and J. D. Ward. Norms of inverses and condition numbers for matrices associated with scattered data. *J. Approx. Theory*, 64:69–94, 1991.
- [132] F. J. Narcowich and J. D. Ward. Generalised hermite interpolation via matrix-valued conditionally positive definite functions. *Math. Comput.*, 63:668–661, 1994.
- [133] F. J. Narcowich and J. D. Ward. On condition numbers associated with radial-function interpolation. *J. Math. Anal. Appl.*, 186:457–485, 1994.
- [134] F. J. Narcowich and J. D. Ward. Scattered-data interpolation on  $\mathbb{R}^n$ : Error estimates for radial basis and band-limited functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 36:284–300, 2004.
- [135] C. Ollivier-Gooch. High-order eno schemes for unstructured meshes based on least-squares reconstruction. *AIAA Paper 97-0540*, 1997.
- [136] C. Ollivier-Gooch. Quasi-eno schemes for unstructured meshes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 133:6–17, 1997.

- [137] Y. Othake, A. Balyaev, M. Alexa, G. Turk, and H. P. Seidel. Multi-level partition of unity implicits. In *ACM SIGGRAPH 2003*, 2003.
- [138] S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science, 1980.
- [139] S. V. Patankar and D. B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787–, 1972.
- [140] S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [141] M. Perić. *A Finite Volume method for the prediction of three-dimensional flow in complex ducts*. PhD dissertation, Imperial College, University of London, 1986.
- [142] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational methods for fluid Flow*. Springer, New York, 1983.
- [143] R. Pollandt. Solving nonlinear equations of mechanics with the boundary element method and radial basis functions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40:61–73, 1997.
- [144] M. J. D. Powell. The theory of radial basis functions in 1990. In W. A. Light, editor, *Advances in numerical analysis II: wavelets, subdivision and radial basis functions*, pages 105–210. Clarendon Press, 1992.
- [145] H. Power and V. Barraco. A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 43:551–583, 2002.
- [146] C. Praveen and R. Duvigneau. Radial basis function and kriging metamodels for aerodynamic optimisation. Technical Report 6151, INRA, 2007.
- [147] F. J. Narcowich R. Lorentz and J. D. Ward. Collocation discretization of the transport equation with radial basis functions. *Appl. Math. Comp.*, 145:97–116, 2003.

- [148] J. D. Ramshaw and G. L. Mesina. A hybrid penalty-pseudocompressibility method for steady-state incompressible flow calculations. *Computers and Fluids*, 20(2):165–175, 1991.
- [149] C. M. Rhie and W. L. Chow. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21:1525–1532, 1983.
- [150] W. J. Rider. Approximate projection methods for incompressible flow: implementation, variants and robustness. Technical report, LANL unclassified report LA-UR-94-2000, Los Alamos National Laboratory, 1995.
- [151] P. J. Roache. *Computational fluid dynamics*. Hermosa, Albuquerque, New Mexico, 1988.
- [152] S. E. Rogers and D. Kwak. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible navier–stokes equations. *AIAA Journal*, 28(2):253–262, 1990.
- [153] S. E. Rogers and D. Kwak. Steady and unsteady solutions of the incompressible navier–stokes equations. *AIAA Journal*, 29(4):603–610, 1991.
- [154] J. Rudholm and A. Wojciechowsky. A method for simulation based optimization using radial basis functions. Master’s thesis, Chalmers University of Technology and Göteborg University, Göteborg Sweden, 2007.
- [155] Y. Saad and M. Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal for Sci. and Stat. Computing*, 7:856–869, 1986.
- [156] V. V. Savshenko, A. Pasko, O. G. Okunev, and T. L. Kunii. Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours. *Computer Graphics Forum*, 14(4):181–188, 1995.
- [157] R. Schaback. Error estimates and condition numbers of radial basis function interpolation. *Adv. Comput. Math.*, 3:251–264, 1995.
- [158] R. Schaback. On the efficiency of interpolation by radial basis function. In A. LeMéhauté, C. Rabut, , and L. L. Schumaker, editors, *Surface Fitting and Multiresolution Method*, pages 309–318. Vanderbilt University Press, 1997.

- [159] R. Schaback. Reconstruction of multivariate functions from scattered data. Unpublished text, 1997.
- [160] R. Schaback. Stability of radial basis function interpolants. In C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. Stöckler, editors, *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, pages 433–440. Vanderbilt University Press, 2002.
- [161] R. Schaback. Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods. Preprint Göttingen, 2005.
- [162] R. Schaback. Kernel-based meshless methods. Unpublished text, 2007.
- [163] R. Schaback. Kernel-based meshless methods. Unpublished text, 2011.
- [164] R. Schaback. Reconstruction of multivariate functions from scattered data. Unpublished text, 2011.
- [165] R. Schaback and H. Wendland. Kernel techniques: From machine learning to meshless methods. *Acta Numerica*, pages 1–97, 2006.
- [166] D. Schröder and H. Wendland. A high-order, analytically divergence-free discretisation method for darcy’s problem. *Mathematics of Computation*, 80:263–277, 2011.
- [167] A. Segal, M. ur Rehman, and C. Vuik. Preconditioners for incompressible navier-stokes solvers. *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, 3(3):245–275, 2010.
- [168] W. Y. Soh and J. W. Goodrich. Unsteady solution of incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 79:113–134, 1988.
- [169] T. Sonar. Optimal recovery using thin plate splines in finite volume methods for numerical solution of hyperbolic conservation laws. *IMA J. Num. Anal.*, 16:549–581, 1996.
- [170] J. L. Steger and P. Kutler. *AIAA Journal*, 15:581, 1977.
- [171] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of navier-stokes equations using finite element techniques. *Computers and Fluids*, 1:73–100, 1973.

- [172] R. Temam. Une methode d'approximation de la solution des equations de navier-stokes. *Bull. Soc. Math. France*, pages 115–152, 1968.
- [173] Z. Terze, D. Matijašević, and M. Vrdoljak. Numerical fluid-structure interaction of multibody dynamical systems in incompressible flow. In Z. Terze and C. Lacor, editors, *Proceedings of the International Symposium on Coupled Methods in Numerical Dynamics*, pages 203–217, Zagreb, 2009. Fakultet strojarstva i brodogradnje.
- [174] I. Tobor, P. Reuter, and C. Schlick. Efficient reconstruction of large scattered geometric datasets using the partition of unity and radial basis functions. Technical Report 130103, LaBRI, Bordeaux, 2003.
- [175] G. Turk and J. O'Brien. Shape transformation using variational implicit functions. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 99*, pages 335–342, 1999.
- [176] Š. Ungar. *Matematička analiza 3*. Zagreb, 1994.
- [177] S. P. Vanka. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *J. Comp. Physics*, 65:138–158, 1986.
- [178] C. Vuik, A. Saghir, and G. P. Boerstoel. The krylov accelerated simple(r) method for flow problems in industrial furnaces. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 33(7):1027–1040, 2000.
- [179] Ž. Tuković. *Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika*. Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2005.
- [180] Y. Wang, Y. Jia, C. Hu, and M. Turk. Face recognition based on kernel radial basis function networks. In *Asian Conference on Computer Vision*, pages 174–179. Korea, 2004.
- [181] H. Wendland. *Konstruktion und untersuchung radialer basisfunktionen mit kompakten träger*. PhD thesis, University of Göttingen, 1994.
- [182] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported rbfs of minimal degree. *Adv. Comput. Math.*, 4:389–395, 1995.

- [183] H. Wendland. Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree. *J. Approx. Theory*, 93:258–272, 1997.
- [184] H. Wendland. Meshless galerkin methods using radial basis functions. *Math. Comp.*, 68:1521–1531, 1999.
- [185] H. Wendland. Fast evaluation of radial basis functions: Methods based on partition of unity. In C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. Stöckler, editors, *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, pages 473–483. Vanderbilt University Press, 2002.
- [186] H. Wendland. Surface reconstruction from unorganized points. Preprint Göttingen, 2002.
- [187] H. Wendland. On the convergence of a general class of finite volume methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(3):987–1002, 2005.
- [188] H. Wendland. *Scattered data interpolation*. Cambridge University Press, 2005.
- [189] P. Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, 1999.
- [190] P. Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics*. Springer, Heidelberg, 2001.
- [191] Z. Wu. Hermite-birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions. *Approx. Theory Appl.*, 8(2):1–10, 1992.
- [192] Z. Wu. Multivariate compactly supported positive definite radial functions. *Adv. Comput. Math.*, 4:283–292, 1995.
- [193] O. Zienkiewicz. Constrained variational principles and penalty function methods in finite element analysis. In G. Watson, editor, *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations*, volume 363 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 207–214. Springer Berlin / Heidelberg, 1974.
- [194] O. Zienkiewicz and P. N. Godbole. Viscous incompressible flow with special reference to non-newtonian (plastic) fluids. In R. H. Gallager, editor, *Finite Elements in Fluids*, volume 1, pages 25–55. Wiley, London, 1975.

- [195] O. C. Zienkiewicz and K. Morgan. *Finite elements and approximation*. Wiley, 1983.
- [196] D. Zingg, S. DeRango, M. Nemeć, and T. Pulliam. Comparison of several spatial discretisations for the navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 160:683, 2000.
- [197] B. Šarler. A radial basis function collocation approach in computational fluid dynamics. *Computer Methods in Engineering and Science*, 7:185–193, 2005.
- [198] B. Šarler and G. Kuhn. Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems, part 1. formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21(1):53–63, 1998.

# Životopis

Dubravko Matijašević je rođen 30. kolovoza 1976. godine u Zagrebu. Osnovno obrazovanje završio je u Zagrebu, a srednje u Tehničkoj školi Ruđer Bošković također u Zagrebu gdje je stekao zvanje prirodoslovno-matematičkog tehničara.

Školske godine 1994/95. upisao je Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Redoviti studij zrakoplovstva završio je u proljeće 2004. godine. Diplomski rad pod nazivom "Proračun aerodinamičkih karakteristika aeroprofila s podijeljenim zakrilcem" obranio je sa odličnim uspjehom, a opći uspjeh studija je vrlo dobar.

Na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu radi od 2004. godine, na Zavodu za zrakoplovstvo, kao znanstveni novak na Katedri za dinamiku letjelica.

Školske godine 2004/05. upisao je poslijediplomski studij strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, procesno-energetski smjer.

U svojstvu istraživača sudjelovao je na sljedećim znanstveno-istraživačkim projektima:

- Računalni algoritmi za dinamičku simulaciju slijetanja zrakoplova (0120-033).
- Numeričke simulacijske procedure dinamike slijetanja elastičnog zrakoplova (120-1201829-1664).

Bavi se numeričkim modeliranjem prijenosa topline i mase, i aeroelastičnih pojava kod različite zrakoplovne opreme. Sudjeluje u izvođenju nastave na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. Objavio je šest znanstvenih radova. Govori i piše engleski jezik.



# Biography

Dubravko Matijašević was born on 30th August 1976. in Zagreb. He finished elementary education in Zagreb, and a high school Ruđer Bošković, also in Zagreb, where he gained the title Technician in natural sciences and mathematics.

In the school year 1994/95. he enrolls study on the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. Regular study he completed in spring 2004. year. Graduation thesis entitled "Calculation of the aerodynamic characteristics of an airfoil with split flap", he finished with excellent success, and the general success of the study was Very good.

Since 2004. year he is as a research assistant on The Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, the Department of Aeronautical Engineering, University of Zagreb.

In year 2004/05. he enrolls postgraduate studies at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture.

As research assistant he has been involved in the following research projects:

- Computer algorithms for dynamic simulation of landing aircraft (0120-033)
- Numerical simulation procedures for elastic airplane landing dynamics (120-1201829-1664)

His research interests deals with the numerical modeling of heat and mass transfer, as well as aeroelastic phenomena of various aviation equipment. He participate in teaching processes, on Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture . In past time he has published six scientific papers. He writes and speaks fluently in English.