

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
STROJARSKI FAKULTET U SLAVONSKOM BRODU

DIPLOMSKI RAD

sveučilišnog diplomskog studija

Darko Bobek

12008010

Slavonski Brod, 2011.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
STROJARSKI FAKULTET U SLAVONSKOM BRODU

DIPLOMSKI RAD

sveučilišnog diplomskog studija

Darko Bobek

12008010

Mentor završnog rada:

prof.dr.sc Franjo Matejiček

Slavonski Brod, 2011.

I. AUTOR

Ime i prezime: Darko Bobek

Mjesto i datum rođenja: Sisak, 24.06.1987.

Adresa: Kutinska Slatina, Stjepana Kefelje 113, Kutina

STROJARSKI FAKULTET U SLAVONSKOM BRODU

II. DIPLOMSKI RAD

Naslov: Analiza deformacija i naprezanja statički neodređenog konzolnog nosača

Naslov na engleskom jeziku: Analysis of stress and deformation of statically undefined cantilever

Ključne riječi: konzolni nosač, pomak, teorija elastičnosti, teorija plastičnosti, plastični zglob, Airyjeva funkcija

Ključne riječi na engleskom jeziku: cantilever, displacement, theory of elastic, theory of plastic, plastic hinge, Airy stress function

Broj stranica: 58, slika: 32, tablica: 3, priloga: -, bibliografskih izvora: 10

Ustanova i mjesto gdje je rad izrađen: STROJARSKI FAKULTET U SLAVONSKOM BRODU

Stečen akademski naslov: **Magistar/magistra inženjer/ka strojarstva**

Mentor rada: prof. dr. sc. Franjo Matejiček

Obranjeno na **Strojarskom fakultetu** u Slavonskom Brodu

dana _____

Oznaka i redni broj rada: _____

IZJAVA

Izjavljujem da sam diplomski rad izradio samostalno, koristeći se vlastitim znanjem, literaturom i dostupnim računalnim programima.

U radu mi je pomogao savjetima i uputama voditelj diplomskog rada prof.dr.sc Franjo Matejiček, te mu na tome iskreno zahvaljujem.

Također zahvaljujem i asistentu Josipu Sertiću dipl.ing.stroj. koji mi je savjetom pomogao u izradi ovoga rada.

Darko Bobek

SAŽETAK

Osnovni cilj ovog rada je proračunati i odrediti raspodjelu naprezanja konzolnog nosača.

Na samom početku će se opisati konzolni nosač zadan i definiran putem skice i zadanih podataka kao tehnički sustav. Izračunati će se reakcije veza, raspodjela naprezanja i deformacija u svim točkama nosača, skicirati i kotirati dijagrami unutrašnjih sila, naprezanja i deformacija, te odrediti elastična linija. Potom će se obraditi teorija elastičnosti i teorija plastičnosti pomoću kojih će se analitičkim postupkom proračunati nosač.

Prema teoriji elastičnosti izabrati će se Airyjeva funkcija koja će opisati raspodjelu naprezanja uzduž nosača po visini istog. Graničnim konstruiranjem će se odrediti granično i maksimalno kontinuirano opterećenje kod pojave plastičnog zgloba u konzoli.

U daljnjoj obradi rada će se konzolni nosač riješiti metodom konačnih elemenata pomoću računalnog programa *Ansys Workbench 12*. Nakon toga će se usporediti i analizirati rezultati dobiveni analitičkim postupkom i numeričkom metodom.

ABSTRACT

The main aim of this paper is calculating and determining stress distribution of cantilever.

At the very beginning, cantilever is defined and described by drawings and given data as a technical system. The reactions, stress distribution and deformation in every node of cantilever are calculated. Then diagrams of internal forces, stresses and deformations are sketched and dimensioned and the elastic line is defined. Also, the theory of elastic and the theory of plastic are described which is needed to calculate the analytical procedure of the cantilever.

According to the theory of elastic the Airy stress function is chosen which describes distribution of stress through the cantilever and alongside the height. The limit and maximal continuous loading are defined by limited designing at the appearance of the plastic hinge in the cantilever.

In further processing, the cantilever is solved with a computer program *Ansys Workbench 12* which uses the finite element method. After that the results, obtained by analytical procedures and numerical methods, are compared and analyzed.

Sadržaj

PREGLED VELIČINA, OZNAKA I JEDINICA	3
1 UVOD.....	5
2 KONZOLNI NOSAČ	6
2.1 Analitičko rješenje konzolnog nosača metodama čvrstoće.....	7
2.1.1 Određivanje diferencijalne jednačbe elastične linije.....	8
3 RAVNINSKA TEORIJA ELASTIČNOSTI	13
3.1 Temeljne jednačbe ravninske teorije jednačbe.....	13
3.2 Airyjeva funkcija naprezanja	15
3.3 Rubni uvjeti.....	16
3.4 Rješenje konzolnog nosača	18
3.4.1 Konzola opterećena jednoliko kontinuirano	19
3.4.2 Greda na dva oslonca opterećena jednoliko kontinuirano	22
3.4.3 Vrijednosti normalnog naprezanja σ_x prema teoriji elastičnosti	26
4 IZOPARAMETARSKI KONAČNI ELEMENT	28
4.1 Numeričko rješenje zadatka	30
4.1.1 Dijagrami raspodjele normalnog naprezanja σ_x po visini konzolnog nosača	32
5 ELASTOPLASTIČNA TIJELA	34
5.1 Podjela teorije plastičnosti	34
5.2 Dijagrami deformiranja	35
5.3 Analiza dijagrama rastezanja	39
5.4 Idealizacija dijagrama deformiranja.....	42
5.4.1 Linearno elastično-idealno plastično ponašanje materijala.....	43
5.4.2 Linearno elastično-očvršćavajuće ponašanje materijala	43
5.5 Zaključci o plastičnom deformiranju	44
5.6 Plastična analiza konstrukcija	45
5.6.1 Savijanje štapa čiji presjek ima dvije osi simetrije	46

6 GRANIČNO KONSTRUIRANJE.....	51
6.1 Granična analiza konstrukcija	51
6.2 Granična i maksimalna vrijednost kontinuiranog opterećenja	53
7 USPOREDBA I ANALIZA RJEŠENJA.....	56
8 ZAKLJUČAK.....	57
9 LITERATURA	58

PREGLED VELIČINA, OZNAKA I JEDINICA

A	- površina poprečnog presjeka, mm
b	- širina konzolnog nosača, mm
E	- Youngov modul elastičnosti, MPa
F_A, F_B	- sile reakcija konzolnog nosača, N
F_a	- sila reakcije konzole, N
F_b	- sila reakcije grednog nosača, N
h	- visina konzolnog nosača, mm
I, I_y, I_z	- moment inercije (tromosti), mm ⁴
k	- broj reakcija
k_f	- faktor povećanja nosivosti u plastičnom području
l	- duljina konzolnog nosača, m
l_k	- duljina konzole, m
l_g	- duljina grednog nosača, m
M_A	- moment reakcije, N·m
M_y, M_z	- momenti savijanja, N·m
$M_{y,T}$	- moment savijanja pri kojem dolazi do tečenja, N·m
$M_{y,pl}$	- moment savijanja u plastičnom području, N·m
$M_{y,gr}$	- granična vrijednost momenta savijanja, N·m
n	- broj prekobrojnih reakcija
N	- uzdužna sila nosača, N
$N_i(\xi, \eta)$	- funkcije oblika
q	- kontinuirano opterećenje konzolnog nosača, N/m
q_k	- kontinuirano opterećenje konzole, N/m
q_g	- kontinuirano opterećenje grednog nosača, N/m
q_T	- kontinuirano opterećenje konzolnog nosača pri kojem dolazi do tečenja, N/m
q_{gr}	- granično opterećenje konzolnog nosača, N/m
Q_z	- poprečna sila nosača, N
s	- broj jednadžbi koje se može postaviti
S	- faktor sigurnosti

S_y	- prvi moment površine, mm ³
u_i, v_i	- vrijednosti pomaka u čvorovima, mm
U	- potencijalna energija deformiranja, J
x, y, z	- osi pravokutnog koordinatnog sustava
x_i, y_i	- vrijednosti koordinata čvorova, mm
w, w_B	- progib konzolnog nosača, mm
$W_{y,T}$	- moment otpora pri kojem dolazi do tečenja konzolnog nosača, mm ³
$W_{y,pl}$	- plastični moment otpora konzolnog nosača, mm ³
α	- zakret konzolnog nosača, °
γ_{xy}	- kutna deformacija
$\varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon_y$	- duljinska deformacija
ξ, η	- krivocrtne koordinate
λ	- faktor opterećenja
ν	- Poissonov broj (faktor)
ρ	- polumjer zakrivljenosti deformiranja uzdužne osi
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- normalna naprezanja, MPa
σ_{dop}	- dopušteno naprezanje, MPa
σ_E	- granica elastičnosti, MPa
σ_P	- granica proporcionalnosti, MPa
σ_T	- granica tečenja, MPa
τ_{xy}	- posmično naprezanje, MPa
ϕ	- Airyjeva funkcija naprezanja

1 UVOD

Nosači su neizbježni elementi gotovo svake konstrukcije. Čestu primjenu imaju u visokogradnji, izgradnji mostova, dalekovoda, dizalica i sl.

Ovisno o međusobnom spoju nosači se dijele na rešetkaste konstrukcije i okvirne nosače. Rešetkama se nazivaju konstrukcije koje se sastoje od štapnih sustava (krute figure), kod kojih svaka dva susjedna trokuta imaju zajedničku stranicu (štap). Rešetka može biti ravninska ili prostorna. Štapovi kod rešetkastih nosača su ravni i na krajevima su spojeni u čvorovima (zglobovi bez trenja), tako da su štapovi opterećeni ili samo na vlak ili samo na tlak. Vanjske sile djeluju samo u čvorovima rešetke. Rešetkasti nosač je upotrebljiv kao nosač samo ako kao cjelina djeluje kao kruta ploča. Jedan od najvažnijih gradbenih elemenata u strojarstvu i građevinarstvu je svakako greda. Pod pojmom "greda" se podrazumijeva takav nosač koji ima jednu dimenziju veću u odnosu na ostale dvije. Uzdužna os grede može biti pravac ili je dio neke krivulje pa je zakrivljena. Uzdužna os nosača može biti sastavljena od ravnih segmenata koji mogu činiti okvir pa se takvi nosači nazivaju okvirni [1].

S obzirom na broj reakcija i broj jednadžbi koje možemo postaviti za uvjet statičke ravnoteže, nosači mogu biti statički određeni ili statički neodređeni. Statički određeni nosači se rješavaju samo pomoću uvjeta ravnoteže jer je kod njih moguće samo jedno ravnotežno stanje. Statički neodređeni nosači imaju više ravnotežnih stanja i više mogućih stanja pomaka, pa se za njihovo rješavanje osim uvjeta ravnoteže koristi i dodatni uvjeti deformiranja. Najveće deformacije u konstrukciji nastaju uslijed djelovanja momenata savijanja, a najmanje (zanemarivih vrijednosti) su od poprečne sile. Utjecaj uzdužne sile je zanemariv, osim kod štapova u kojima je uzdužna sila N dominantna i kod štapova malog poprečnog presjeka.

2 KONZOLNI NOSAČ

Konzolni (gredni) nosač je nosač koji se sastoji samo od samo jednog segmenta.

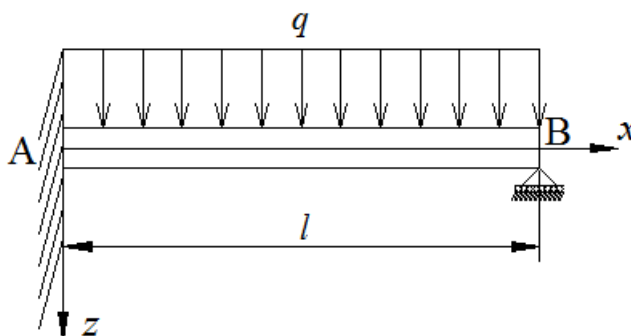
Nosač može biti statički određen i statički neodređen. Statička određenost, odnosno neodređenost se definira prema izrazu

$$n = k - s \quad (2.1)$$

Pri čemu je n broj prekobrojnih reakcija, k odgovara broju reakcija i s je broj jednažbi koji se može postaviti.

Za: $n > k - s$ okvirni nosač je statički neodređen,

$n = k - s$ okvirni nosač je statički određen.



Slika 2.1 Konzolni poduprti nosač

Zadane vrijednosti nosača su:

Opterećenje konzolnog nosača $q = 1 \text{ kN/m}$.

Duljina konzolnog nosača $l = 6 \text{ m}$.

Poprečni presjek konzolnog nosača $h = 6 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$.

Materijal nosača: Č0562, $E = 200000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $\sigma_T = 400 \text{ MPa}$, $\sigma_m = 550 \text{ MPa}$.

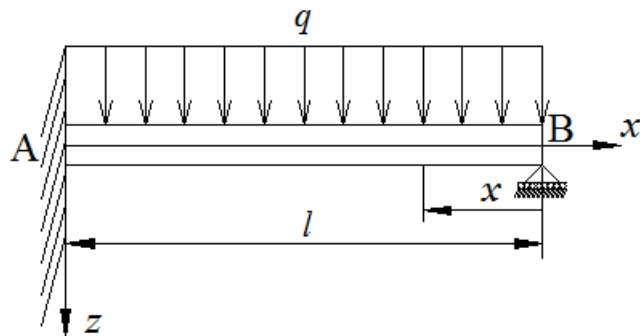
Drugi moment površine $I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ mm}^4$

Ponašanje materijala je elastično – idealno plastično.

Nosač gore na slici 2.1 se sastoji od samo jednog segmenta, na lijevom kraju je uklješten, a na desnom kraju je oslonjen na radijalni oslonac. U lijevom kraju je onemogućen bilo kakav pomak i zakret, dok se desni kraj nosača može horizontalno pomicati, a vertikalni pomak je onemogućen. Nosač je opterećen kontinuiranim rasutim teretom q .

2.1 Analitičko rješenje konzolnog nosača metodama čvrstoće

Potrebno je analitički, metodama čvrstoće, izračunati reakcije veza, elastičnu liniju te raspodjelu naprezanja i deformacija u svim točkama nosača. Skicirati i kotirati sve dijagrame unutrašnjih sila, naprezanja i deformacija.



Slika 2.2 Područje integracije konzolnog nosača

Prema izrazu (2.1)

$$n = k - s = 4 - 3 = 1, \text{ zadatak je jedanput statički neodređen.}$$

Za nosač prema slici 2.2 se mogu postaviti tri jednadžbe statičke ravnoteže budući se radi o ravninskom problemu, odnosno dvije jer je u smjeru osi x jednadžba neupotrebljiva, koje glase

$$\sum F_z = 0; -F_A + ql - F_B = 0 \tag{a}$$

$$\sum M_A = 0; M_A - ql \frac{l}{2} + F_B \cdot l = 0 \tag{b}$$

Budući je zadatak jedanput statički neodređen potrebno je uz osnovne jednadžbe statičke ravnoteže uzeti dodatnu jednadžbu. Dodatna jednadžba će se uzeti preko drugog Castiglianovog teorema. Pomak u vertikalnom smjeru u točki B je nula, jer je takav oslonac (radijalni). Prema tome drugi Castiglianov teorem će glasiti [8]

$$\frac{\partial U}{\partial F_B} = w_B = 0 \tag{c}$$

Unutrašnja energija zadanog nosača se računa prema izrazu

$$U = \frac{1}{2EI} \int M_y^2 dx \tag{d}$$

pri čemu je M_y moment savijanja uzduž nosača

$$M_y(x) = F_B \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad (e)$$

Ako se izraz (e) uvrsti u (d) pa sve u (c) slijedi

$$\frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_y(x) \frac{\partial M_y(x)}{\partial F_B} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(F_B \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial \left(F_B \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right)}{\partial F_B} dx$$

što nakon integriranja i sređivanja glasi

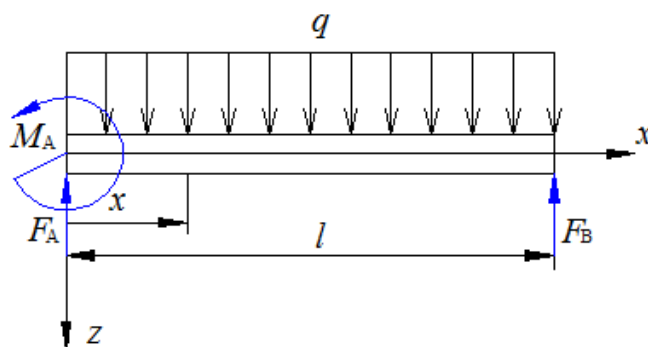
$$F_B = \frac{3}{8} ql = \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 6 = 2,25 \text{ kN}$$

Povratom u jednadžbu (a) i (b) slijedi

$$F_A = \frac{5}{8} ql = \frac{5}{8} \cdot 1 \cdot 6 = 3,75 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 6^2 = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2.1.1 Određivanje diferencijalne jednadžbe elastične linije



Slika 2.3 Područje integracije kod određivanja elastične linije

Diferencijalna jednačina elastične linije kod savijanja je dana izrazom [2]

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (2.3)$$

moment savijanja $M_y(x)$ nosača prema slici 2.3 je

$$M_y(x) = F_B(l-x) - q(l-x)\frac{(l-x)}{2}$$

Ako se malo sredi $M_y(x)$ je

$$M_y(x) = F_B \cdot l - F_B \cdot x - \frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} \quad (f)$$

Uvrštavanjem momenta savijanja, izraz (f), u jednačinu (2.3) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{EI} \left(F_B \cdot lx - F_B \frac{x^2}{2} - \frac{ql^2 x}{2} + \frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right) + C_1 \\ \alpha &= \frac{1}{EI} \left(F_B \cdot lx - F_B \frac{x^2}{2} - \frac{ql^2 x}{2} + \frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right) + C_1 \\ w &= -\frac{1}{EI} \left(F_B \frac{lx^2}{2} - F_B \frac{x^3}{6} - \frac{ql^2 x^2}{4} + \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Postavljanjem rubnih uvjeta

$$x=0, \alpha=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$x=0, w=0 \Rightarrow C_2=0$$

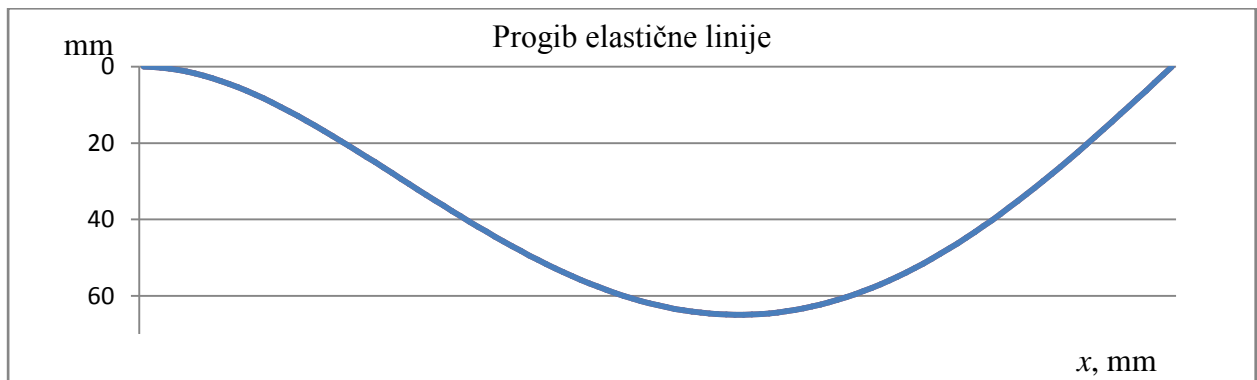
slijedi diferencijalna jednačina elastične linije

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{EI_y} \left(F_B \cdot lx - F_B \frac{x^2}{2} - \frac{ql^2 x}{2} + \frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right) \\ w &= -\frac{1}{EI_y} \left(F_B \frac{lx^2}{2} - F_B \frac{x^3}{6} - \frac{ql^2 x^2}{4} + \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right) \end{aligned}$$

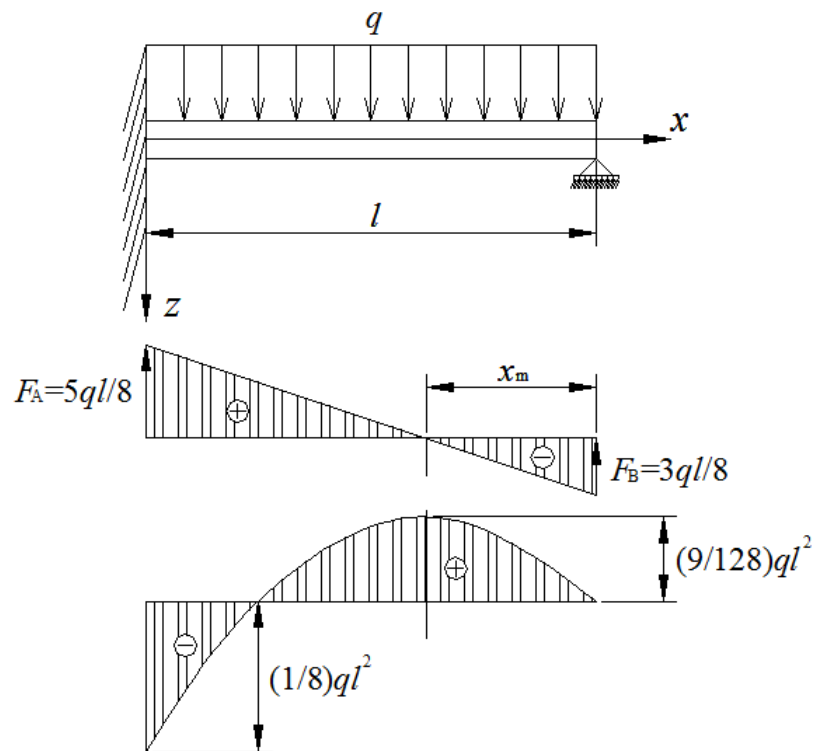
Progib na sredini ($x = 3000 \text{ mm}$) konzolnog nosača iznosi

$$w = 62,5 \text{ mm}$$

U tabličnom kalkulatoru *Microsoft office excel 2007* je izračunat progib po cijeloj duljini konzolnog nosača (od 0 do 6000 mm) uz korak od $x = 50 \text{ mm}$. Dijagram je prikazan na slici 2.4.



Slika 2.4 Progib elastične linije



Slika 2.5 Konzolni nosač (dijagrami unutrašnjih sila)

Duljina x_m iznosi

$$\frac{F_A}{l - x_m} = \frac{F_B}{x_m} \Rightarrow x_m = \frac{F_B \cdot l}{F_A + F_B} = \frac{2,25 \cdot 6}{3,75 + 2,25}$$

$$x_m = 2,25 \text{ m}$$

Momenti u karakterističnim točkama su

$$M_A = -45 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 0$$

$$M_{(x_m)} = F_B \cdot x_m - \frac{q \cdot x_m^2}{2} = 2,25 \cdot 2,25 - \frac{1 \cdot 2,25^2}{2} = 2,53125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Naprezanje, prema nauci o čvrstoći [2], je dano izrazom

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z, \quad (2.4)$$

moment savijanja M_y prema slici 2.1 je

$$M_y = -M_A + F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Naprezanje σ_x konzolnog nosača u uklještenju ($x=0$), u osloncu ($x=6000$), na polovici duljine nosača ($x=3000$ mm), te na mjestu najvećeg pozitivnog momenta ($x=3750$ mm) na pola visine h nosača, $z = -30$ mm (gornji dio nosača), iznosi

$$\sigma_{x(x=0)} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{-4500000}{540000} \cdot (-30) = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x(x=6000)} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{0}{540000} \cdot (-30) = 0$$

$$\sigma_{x(x=3000)} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{2250000}{540000} \cdot (-30) = -125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x(x=3750)} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{2531250}{540000} \cdot (-30) = -140,62 \text{ MPa}$$

pri čemu su momenti savijanja

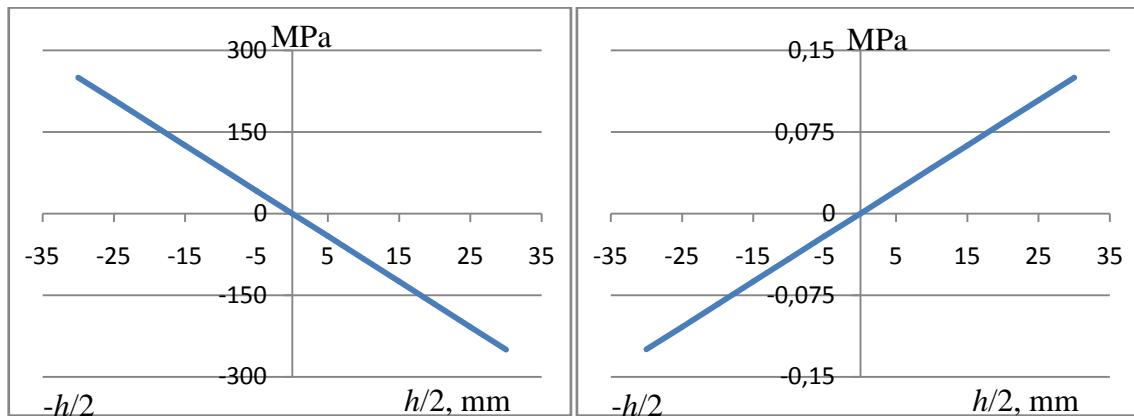
$$M_{y(x=0)} = -M_A + F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = -4,5 \cdot 10^6 + 3750 \cdot 0 - \frac{1 \cdot 0^2}{2} = -4500000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{y(x=6000)} = -4,5 \cdot 10^6 + 3750 \cdot 6000 - \frac{1 \cdot 6000^2}{2} = 0$$

$$M_{y(x=3000)} = -4,5 \cdot 10^6 + 3750 \cdot 3000 - \frac{1 \cdot 3000^2}{2} = 2250000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

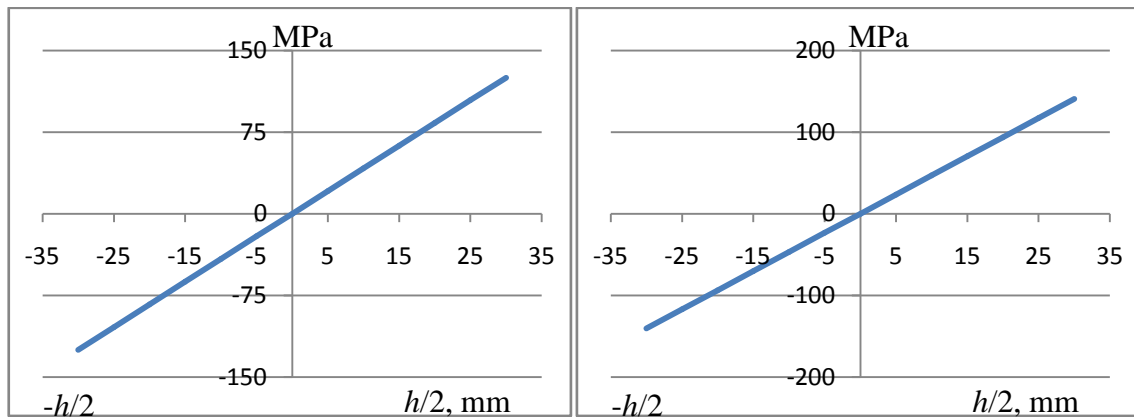
$$M_{y(x=3750)} = -4,5 \cdot 10^6 + 3750 \cdot 3750 - \frac{1 \cdot 3750^2}{2} = 2531250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Gore izračunate vrijednosti naprezanja su naprezanja na gornjem dijelu konzolnog nosača na različitim duljinama istog. Na isti način se mogu izračunati naprezanja na istim duljinama po cijeloj visini h konzolnog nosača $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$. Naprezanje po cijeloj visini h konzolnog nosača prema čvrstoći je prikazano na slici 2.6 u uklještenju i uz oslonac, odnosno na slici 2.7 na udaljenosti $x=3000$ mm i $x=3750$ mm od uklještenja.



Slika 2.6 Raspodjela naprezanja po visini h

a) u uklještenju, b) na udaljenosti $x = 1 \text{ mm}$ od oslonca



Slika 2.7 Raspodjela naprezanja po visini h na udaljenosti: a) $x = 3000 \text{ mm}$ (polovica konzolnog nosača) i b) $x = 3750 \text{ mm}$ (najveći pozitivni moment) od uklještenja

Tablica 2.1 vrijednosti naprezanja σ_x prema kojim su nacrtani dijagrami na slici 2.6 i 2.7

Visina h , mm	Naprezanje σ_x , MPa			
	U uklještenju	$x = 1 \text{ mm}$ od oslonca	$x = 3000 \text{ mm}$	$x = 3750 \text{ mm}$
-30	250	-0,12	-125	-140,62
-25	208,33	-0,10	-104,17	-117,19
-20	166,67	-0,083	-83,33	-93,75
-15	125	-0,062	-62,5	-70,31
-10	83,33	-0,042	-41,67	-46,87
-5	41,67	-0,021	-20,83	-23,44
0	0	0	0	0
5	-41,67	0,021	20,83	23,44
10	-83,33	0,042	41,67	46,87
15	-125	0,062	62,5	70,31
20	-166,67	0,083	83,33	93,75
25	-208,33	0,10	104,17	117,19
30	-250	0,12	125	140,62

3 RAVNINSKA TEORIJA ELASTIČNOSTI

3.1 Temeljne jednačbe ravninske teorije jednačbe

Opći problem određivanja raspodjele pomaka, deformacija i naprezanja u tijelu proizvoljna oblika koje je proizvoljno opterećeno i učvršćeno nije ni do danas riješen egzaktno. Postoji mnoga teorijski zanimljiva i u praksi korisna rješenja posebnih problema. Eksperimentalnim i numeričkim metodama moguće je naći približna rješenja velikog broja problema sa zadovoljavajućom točnošću [3].

Složenost problema analize naprezanja nastaje zbog toga što za određivanje šest komponenta naprezanja imamo na raspolaganju samo tri diferencijalne jednačbe ravnoteže. Uvođenjem tri uvjeta kompatibilnosti deformacije i šest jednačbi Hookeova zakona dolazimo do zatvorenog sustava od 12 jednačbi s 12 nepoznanica: 6 komponenta naprezanja i 6 komponenta deformacije. Tri od ovih 12 jednačbi su parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda, a tri su parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda. Osim toga potrebno je zadovoljiti i rubne uvjete. Ako su rubno uvjeti zadani preko naprezanja, ovaj sustav jednačbi zadovoljava. Međutim, ako su na površini tijela ili jednom njenom dijelu zadani pomaci, broj jednačbi povećava se na 15 jer se osim navedenih jednačbi moraju upotrijebiti još i Cauchyjeve jednačbe koje povezuju pomake i deformacije. U navedenom sustavu diferencijalnih jednačbi javlja se 15 zavisnih varijabli i tri nezavisne varijable (prostorne koordinate x, y, z). Ako se razmatraju dinamički problemi, javlja se i četvrta nezavisna varijabla vrijeme t [3].

Ovdje ćemo se ograničiti samo na razmatranje statički ravninskih problema kod kojih su volumenske sile zanemarivo male ili jednake nuli. Isto će se razmatrati samo problemi u kojima su rubni uvjeti zadani preko naprezanja. U tom slučaju preostaje samo šest nepoznanica: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y$, i γ_{xy} za čije određivanje na raspolaganju ima sljedeće tri skupine jednačbi [3]:

a) jednačbe ravnoteže

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (3.1)$$

b) uvjet kompatibilnosti deformacije

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.2)$$

c) Hookeov zakon

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Dakle, ovdje je zatvoren sustav od šest jednažbi nepoznanica. Čak i ovako postavljen problem bilo bi vrlo teško riješiti u općem obliku. Rješavanje ovog sustava jednažbi svest će se na rješavanje parcijalne diferencijalne jednažbe četvrtog reda [3].

To će se učiniti na sljedeći način: dvostrukim deriviranjem (3.3) dobiva se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial_x \partial_y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial_x \partial_y}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Ako se derivira prva jednažba (3.1) po iksu, a druga po ipsilonu, dobiti će se

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2},$$

što uvršteno u treću jednažbu izraza (3.4) daje

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right).\tag{3.5}$$

Ako se sada izraz (3.5) i prve dvije jednažbe izraza (3.4) uvrsti u uvjet kompatibilnosti (3.2), a zatim pokradi s E , slijedi

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right),$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0.$$

Taj izraz se može napisati u obliku

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y). \quad (3.6)$$

Izraz (3.6) sadrži u sebi uvjete ravnoteže kao i uvjet kompatibilnosti i često se naziva *uvjet kompatibilnosti izražen preko naprezanja*. Izraz (3.6) se može pomoću Hamiltonovog diferencijalnog operatora $\bar{\nabla}$ prikazati jednostavnije. Hamiltonov operator u pravokutnim koordinatama ima oblik [3]

$$\bar{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y},$$

pa je skalarni produkt operatora samim sobom dan formalno izrazom

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.7)$$

Pomoću (3.7) izraz (3.6) prelazi u

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.8)$$

3.2 Airyjeva funkcija naprezanja

Ako se naprezanje izvede iz funkcije $\phi = \phi(x, y)$, prema sljedećem izrazu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.9)$$

jednadžbe ravnoteže bit će automatski zadovoljene. Jedini uvjet koji se za sada postavlja na funkciju $\phi(x, y)$ jest da je u zadanom području neprekinuta i tri puta derivabilna po x i y . Ova se funkcija naziva *Airyjeva funkcija naprezanja* po britanskom astronautu *G.B. Airy* koji ju je prvi upotrijebio 1862. Naprezanja određena pomoću (3.9) ne moraju, a najčešće i nisu rješenja nekog realnog problema. Naime, iako iz nje izvedena naprezanja zadovoljavaju uvjete ravnoteže (3.1), ona ne moraju zadovoljiti i uvjet kompatibilnosti (3.2). Na temelju (3.9) imamo

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi, \quad (3.10)$$

što uvršteno u (3.8) daje

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0,$$

Odnosno

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0. \quad (3.11)$$

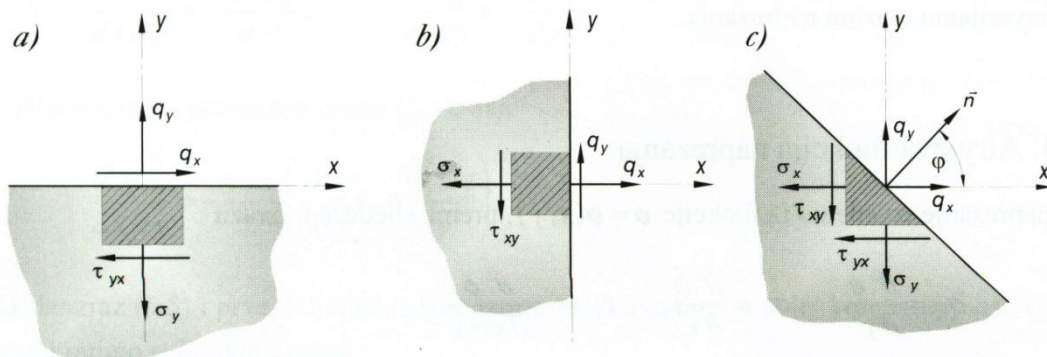
Diferencijalna jednadžba (3.11) naziva se *biharmonijska diferencijalna jednadžba*. Funkcije koje zadovoljavaju tu diferencijalnu jednadžbu nazivaju se *biharmonijske funkcije* [3].

3.3 Rubni uvjeti

Funkcija $\phi(x, y)$ mora zadovoljiti ne samo diferencijalnu jednadžbu (3.11) nego i rubne uvjete koji mogu biti zadani na tri načina [3]:

1. Na čitavom rubu zadano je opterećenje (naprezanje).
2. Na čitavom rubu zadani su pomaci.
3. Na jednom dijelu ruba zadani su pomaci, a na preostalom dijelu opterećenje.

Ovdje će se razmatrati samo prvi slučaj. Pravokutne koordinate koriste se pri analizi naprezanja u dijelovima koji su omeđeni ravnim rubovima. Koordinatni sustav treba birati, kad je moguće, tako da su koordinate osi paralelne rubovima [3].



Slika 3.1 Rubni uvjeti a) rub je paralelan s osi x, b) rub je paralelan s osi y, c) rub stoji koso prema koordinatnim osima [3]

Ako je rub paralelan s osi x (slika 3.1a) rubni uvjeti glase

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = q_y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = q_x. \quad (3.12)$$

Kad je rub paralelan s osi y (slika 3.1b), tada rubni uvjeti glase

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = q_x, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = q_y. \quad (3.13)$$

U slučaju kosog ruba, prema slici 3.1c, na temelju ravnoteže trokutastog elementa može se dobiti

$$\sigma_x dy + \tau_{xy} dx = q_x ds, \quad \sigma_y dx + \tau_{xy} dy = q_y ds.$$

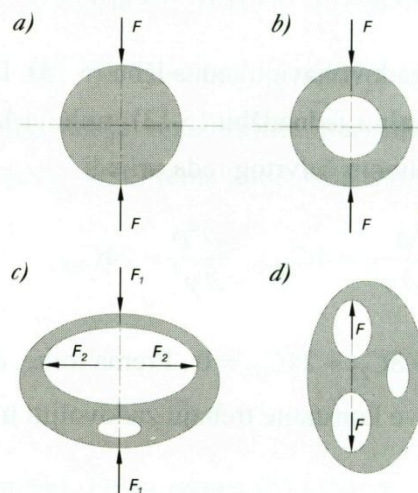
Ako se obje gornje jednadžbe podijele s ds i uzme u obzir da je $dx/ds = \sin \varphi$ i $dy/ds = \cos \varphi$, dobiva se

$$\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi = q_x, \quad \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi = q_y, \quad (3.14)$$

gdje je φ kut koji vanjska normala čini s osi x prema slici 3.1c. Pomoću (3.9) izraz (3.14) prelazi u

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \varphi &= q_x, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cos \varphi &= q_y. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Budući da konstante integracije elastičnosti ne ulaze niti u diferencijalnu jednadžbu (3.11), niti u rubne uvjete, raspodjela naprezanja ne ovisi o tim konstantama, odnosno o vrsti materijala. Ovo ima dalekosežno značenje u eksperimentalnoj analizi naprezanja, npr. u *fotoelasticimetriji* gdje je materijal modela različit od materijala originalne konstrukcije [3].



Slika 3.2 Jednostruko i višestruko povezani modeli a) b) c) Raspodjela napreznja ne ovisi o elastičnim konstantama

d) Raspodjela napreznja ovisi o elastičnim konstantama [3]

Dublja analiza, u koju se ovdje neće ulaziti, pokazala bi da ovo vrijedi samo za jednostruko suvislo povezana područja, tj. modele koji su omeđeni samo s jednom zatvorenom rubnom krivuljom, kao na slici 3.2a. Ako je područje višestruko suvislo, onda raspodjela napreznja ne ovisi o elastičnim konstantama ako je vanjsko opterećenje u ravnoteži po svakom zatvorenom rubu, kao na slici 3.2a, b i c. Međutim, ako sile po svakoj zatvorenoj konturi nisu u ravnoteži, kao na slici 3.2d, raspodjela napreznja ovisi o Poissonovom koeficijentu.

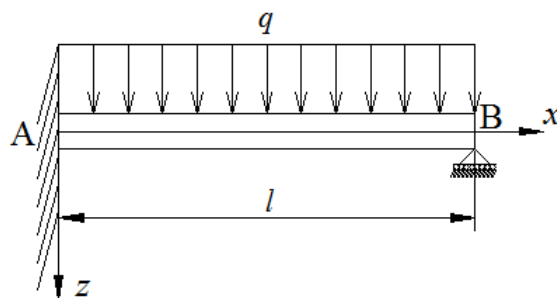
3.4 Rješenje konzolnog nosača

Konzolni nosač, kao na slici 3.3, će se riješiti pomoću teorije elastičnosti. Potrebno je pretpostaviti Airyjevu funkciju napreznja oblika $\phi = \phi(x, z)$ koja će zadovoljiti biharmonijsku diferencijalnu jednadžbu (3.9). Iznalaženje ove funkcije je mukotrpan posao, te neće biti ovdje proveden. Konzolni nosač je dovoljno dugačak, što znači da lijevi dio ne utječe na desni u smislu raspodjele napreznja uz uklještenje, odnosno oslonca. Tu vrijedi St. Venantov princip ili princip lokalnosti djelovanja samouravnoteženog opterećenja koji glasi:

Ako na malom dijelu tijela djeluju međusobno uravnotežene sile, one izazivaju samo lokalna napreznja u neposrednoj blizini djelovanja sila i vrlo brzo opadaju s udaljenošću od mjesta opterećenja [3].

Stoga će se konzolni nosač razmatrati kao dva zasebna zadatka. U prvom slučaju će se razmatrati konzola, a u drugom greda na dva oslonca. Da bi se odredila raspodjela naprezanja konzolnog nosača uz uklještenje potrebno je odabrati konzolu koja će imati iste reakcije veze kao konzolni nosač. Zatim je potrebno isto tako napraviti da se odabere nosač na dva oslonca takve duljine da ima istu reakciju veze kao konzolni nosač.

Napomena: teorija elastičnosti gore opisana se odnosi na x, y koordinatni sustav. Dok se u zadatku koristi x, z koordinatni sustav. Prema tome negativna $-y$ os odgovara pozitivnoj z osi.

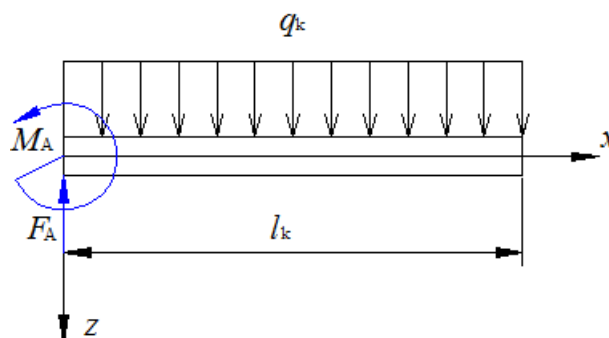


Slika 3.3 Konzolni nosač

3.4.1 Konzola opterećena jednoliko kontinuirano

Slika 3.4 prikazuje konzolu duljine l i visine h koja je opterećena jednoliko kontinuiranim opterećenjem q_k . Funkcija naprezanja iz koje se može odrediti rješenje ovog problema ima oblik

$$\phi = \frac{q_k}{h^3} \left(-x^2 z^3 + 2lxz^3 - l^2 z^3 - \frac{1}{10} h^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{4} h^3 x^2 + \frac{3}{4} h^2 x^2 z - \frac{3}{2} lh^2 xz \right). \quad (3.16)$$



Slika 3.4 Konzola opterećena jednoliko kontinuirano

Od ranije su poznate reakcije veze uz uklještenje A

$$F_A = 3,75 \text{ kN}, \quad M_A = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Ova konzola mora imati iste reakcije veze kao i konzolni nosač. Stoga je potrebno da reakcije veze F_A i M_A konzole budu istog iznosa kao i kod konzolnog nosača. Također, potrebno je da kontinuirano opterećenje konzole q_k ostane jednako kao i kod konzolnog nosača.

Iz poznatih reakcija veze će se izračunati duljina konzole l_k .

Statički uvjet ravnoteže konzole glasi

$$\sum M_A = 0; M_A - \frac{q_k l_k^2}{2} = 0. \quad (a)$$

$$l_k = \sqrt{\frac{2M_A}{q_k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5}{1}} = 3 \text{ m}$$

Konzola duljine $l_k = 3 \text{ m}$ zadovoljava momentni uvjet jednadžbe statičke ravnoteže, ne i uvjet ravnoteže poprečnih sila. Bitno je da moment savijanja konzole odgovara momentu savijanja konzolnog nosača.

Derivacije funkcije (3.16) su

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} = -\frac{12q_k z}{h^3}, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \frac{24q_k z}{h^3}.$$

Kada se derivacije uvrste u biharmonijsku jednadžbu (3.11), dobiva se identitet, što znači da funkcija (3.16) jest biharmonijska. Naprezanja izvedena iz ove funkcije glase

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{6q_k}{h^3} \left[(x - l_k)^2 - \frac{2}{3} z^2 + \frac{1}{10} h^2 \right] z, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2q_k}{h^3} \left(-z^3 + \frac{3}{4} h^2 z - \frac{1}{4} h^3 \right), \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \frac{6q_k}{h^3} \left(\frac{1}{4} h^2 - z^2 \right) (l_k - x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Na gornjem i donjem rubu $\left(z = \pm \frac{h}{2} \right)$ naprezanja trebaju zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\sigma_z \left(x, -\frac{h}{2} \right) = -q_k, \quad \sigma_z \left(x, \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (b)$$

$$\tau_{xz} \left(x, \frac{h}{2} \right) = \tau_{xz} \left(x, -\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (c)$$

Lako se možemo uvjeriti da ova naprezanja zadovoljavaju rubne uvjete na rubovima $z = \pm h/2$, odnosno ublažene rubne uvjete na rubu $x = 0$. Na lijevom kraju nosača rubni uvjeti su:

$$\sigma_x(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(0, z) = 0. \quad (d)$$

Ni jedan od ova dva uvjeta ne može biti ispunjen. Naime, ako u (3.17) se uvrsti $x = 0$, dobiti će se

$$\sigma_x(0, z) = -\frac{6q_k}{h^3} \left[-l_k^2 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{10}h^2 \right] z, \quad (e)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = \frac{6q_k}{h^3} \left(\frac{1}{4}h^2 - z^2 \right) l_k.$$

Kad se ne može strogo udovoljiti rubnim uvjetima, kao u ovom slučaju, nastoji se udovoljiti *ublaženim rubnim uvjetima*. Ublaženi rubni uvjeti su oni kod kojih se ne zahtijeva potpuno podudaranje zadanih i izračunatih rubnih opterećenja. Umjesto toga se zahtijeva da zadano opterećenje ima jednaku rezultirajuću silu ($N = 0$) i jednaki rezultirajući moment ($M_y = -M_A$), kao i naprezanja izračunata pomoću funkcije naprezanja. Prema tome, u ovom slučaju moraju biti ispunjeni uvjeti [3]

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = 0, \quad (f)$$

$$M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = 0.$$

Kad se uvrsti (e) u (f) i provede integracija, dobiva se

$$N = \frac{6q_k l_k^2}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z dz + \frac{4q_k}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^3 dz - \frac{3q_k}{5h} \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

$$M_y = \frac{6q_k l_k^2}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz + \frac{4q_k}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz - \frac{3q_k}{5h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -M_A,$$

Prema tome, ispunjeni su ublaženi rubni uvjeti na kraju $x = 0$. Na sličan način se može pokazati da su ispunjeni ublaženi rubni uvjeti i na desnom kraju, $x = l$.

Ublaženi rubni uvjet za poprečnu silu Q_z se ne provjerava jer poprečne sile konzole nisu u ravnoteži pa taj uvjet ne može biti ispunjen. Iako su dani izrazi za normalna naprezanja σ_x, σ_y

i posmično naprezanje τ_{xz} , samo normalno naprezanje u smjeru osi x će se analizirati i uspoređivati s istim naprezanjem dobivenim pomoću čvrstoće.

3.4.2 Greda na dva oslonca opterećena jednoliko kontinuirano

Ovdje će se provjeriti zadovoljava li preložena funkcija naprezanja jednadžbu $\nabla^4 \phi = 0$, odnosno zadovoljavaju li naprezanja izvedena iz te funkcije rubne uvjete.

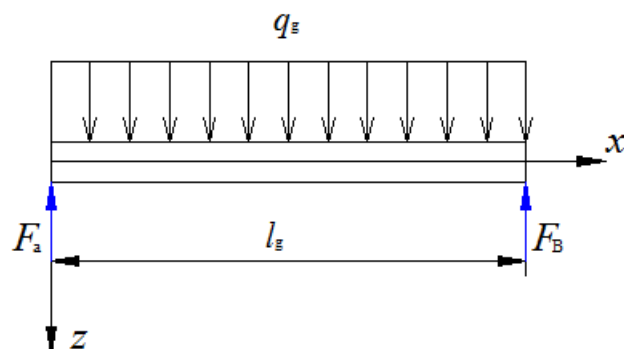
Greda na dva oslonca raspona l i visine h opterećena je jednoliko kontinuirano prema slici 3.5.

Za ovaj slučaj odabire se Airyjeva funkcija naprezanja u obliku [3]

$$\phi = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{1}{4} h^3 x^2 - \frac{3}{4} h^2 l x z - \frac{1}{10} h^2 z^3 + \frac{3}{4} h^2 x^2 z + l x z^3 - x^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right). \quad (3.18)$$

Od ranije je poznata reakcija veze uz oslonac B

$$F_B = 2,25 \text{ kN}$$



Slika 3.5 Greda na dva oslonca opterećena jednoliko kontinuirano

Budući da nas zanima samo raspodjela naprezanja uz oslonac B, potrebno je da reakcija veze F_B i kontinuirano opterećenje budu istog iznosa kao i kod konzolnog nosača. Prema tome, kontinuirano opterećenje q konzolnog nosača je istog iznosa kao kontinuirano opterećenje grede na dva oslonca q_g .

Iz poznate reakcije veze će se izračunati duljina grede l_g .

Statički uvjet ravnoteže grede glasi

$$\sum M_A = 0; F_B l_g - \frac{q_g l_g^2}{2} = 0$$

$$l_g = \frac{2F_B}{q_g} \quad (a)$$

$$l_g = \frac{2F_B}{q_g} = \frac{2F_B}{q} = \frac{2 \cdot 22,5}{10} = 4,5 \text{ m}$$

Derivacije funkcije (3.17) su

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} = -\frac{12q_g z}{h^3}, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \frac{24q_g z}{h^3}.$$

Kada se derivacije uvrste u biharmonijsku jednadžbu (3.11), dobiva se identitet, što znači da funkcija (3.18) jest biharmonijska. Naprezanja izvedena iz ove funkcije glase

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{3}{5} h^2 + 6l_g x - 6x^2 + 4z^2 \right) z,$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{1}{2} h^3 + \frac{3}{2} h^2 z - 2z^3 \right), \quad (3.19)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = -\frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{3}{4} h^2 l_g + \frac{3}{2} h^2 x + 3l_g z^2 - 6xz^2 \right) = -\frac{6q_g}{h^3} \left(\frac{l_g}{2} - x \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right).$$

Na gornjem i donjem rubu $\left(z = \pm \frac{h}{2} \right)$ naprezanja trebaju zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\sigma_z \left(x, -\frac{h}{2} \right) = -q_g, \quad \sigma_z \left(x, \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (b)$$

$$\tau_{xz} \left(x, \frac{h}{2} \right) = \tau_{xz} \left(x, -\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (c)$$

Lako se može uvjeriti da su ovi uvjeti zaista zadovoljeni. Na lijevom kraju nosača rubni uvjeti su:

$$\sigma_x(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(0, z) = 0. \quad (d)$$

Ni jedan od ova dva uvjeta ne može biti ispunjen. Naime, ako u (3.19) se uvrsti $x = 0$, dobiti će se

$$\sigma_x(0, z) = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{3}{5} h^2 + 4z^2 \right) z,$$

$$\tau_{xz}(0, z) = -\frac{3q_g l_g}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (e)$$

Kad se ne može strogo udovoljiti rubnim uvjetima, kao u ovom slučaju, nastoji se udovoljiti *ublaženim rubnim uvjetima*. Ublaženi rubni uvjeti su oni kod kojih se ne zahtijeva potpuno podudaranje zadanih i izračunatih rubnih opterećenja. Umjesto toga se zahtijeva da zadano opterećenje ima jednaku rezultirajuću silu $\left(N=0, Q_z = \frac{q_g l_g}{2}\right)$ i jednaki rezultirajući moment $(M_y = 0)$, kao i naprezanja izračunata pomoću funkcije naprezanja. Prema tome, u ovom slučaju moraju biti ispunjeni uvjeti [3]

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = 0, & Q_z &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{1}{2} q_g l_g, \\ M_y &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = 0. \end{aligned} \quad (f)$$

Kad se uvrsti (e) u (f) i provede integracija, dobiva se

$$\begin{aligned} N &= -\frac{3q_g}{5h} \int_{-h/2}^{h/2} z dz + \frac{4q_g}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^3 dz = 0, \\ M_y &= \frac{3q_g}{5h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{4q_g}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz = 0, \\ Q_z &= \frac{3q_g l_g}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dz = -\frac{1}{2} q_g l_g. \end{aligned}$$

Prema tome, ispunjeni su ublaženi rubni uvjeti na kraju $x=0$. Na sličan način se može pokazati da su ispunjeni ublaženi rubni uvjeti i na desnom kraju, tj. da je za $x=l_g$

$$N = 0, \quad M_y = 0, \quad Q_z = \frac{q_g l_g}{2}.$$

Nauka o čvrstoći I [2] daje sljedeće rješenje

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z, \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y} z. \quad (3.20)$$

Budući da je $M_y = \frac{(q_g l_g x - q_g x^2)}{2}$, $Q_z = -\frac{q_g l_g}{2} + q_g x$, $b=1$, $I_y = \frac{h^3}{12}$ i $S_y = \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)/2$,

može se (3.20) napisati u obliku

$$\sigma_x = \frac{q_g}{h^3} (6l_g x - 6x^2) z, \quad \tau_{xz} = \frac{6q_g}{h^3} \left(\frac{l_g}{2} - x \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (3.21)$$

Prema tome, nauka o čvrstoći i teorija elastičnosti daju potpuno isto rješenje za posmično naprezanje τ_{xy} . Prema nauci o čvrstoći normalno naprezanje σ_x raspodijeljeno je po zakonu pravca, a prema rješenju teorije elastičnosti po zakonu parabole trećeg reda koja se ovija oko pravca koji predstavlja rješenje nauke o čvrstoći. Za velike omjere l_g/h parabola i pravac se neznatno razlikuju. Ako se naprezanje koje daje nauka o čvrstoći označi s σ_x^N , ono koje daje teorija elastičnosti s σ_x^T . Njihova razlika će se dobiti ako se prva jednadžba (3.21) oduzme od prve jednadžbe (3.19), tj.

$$\Delta\sigma_x = \sigma_x^T - \sigma_x^N = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{3}{5}h^2 + 4z^2 \right) z. \quad (3.22)$$

Ta je razlika najveća za $z = \pm \frac{h}{2}$ i iznosi

$$\Delta\sigma_{x,\max} = \frac{q_g}{5}. \quad (3.23)$$

Neka se usporedi ta pogreška s najvećim naprezanjem u gredi koje daje nauka o čvrstoći. To

naprezanje nastaje u sredini grede, tj. za $x = \frac{l_g}{2}$ i $z = \pm \frac{h}{2}$ i iznosi

$$\sigma_{x,\max}^N = \frac{3}{4} q_g \left(\frac{l_g}{h} \right)^2,$$

pa je

$$\frac{\Delta\sigma_{x,\max}}{\sigma_{x,\max}^N} = \frac{4}{15} \left(\frac{h}{l_g} \right)^2 < 0,05. \quad (3.24)$$

Da bi ta razlika bila manja od 5% mora biti ispunjen uvjet $h < 0,433l_g$, odnosno

$$h \leq \sqrt{\frac{3}{6}} l_g = 0,4325l_g, \quad (3.25)$$

što je gotovo uvijek ispunjeno.

3.4.3 Vrijednosti normalnog naprezanja σ_x prema teoriji elastičnosti

Vrijednosti normalnog naprezanja σ_x konzolnog nosača prema teoriji elastičnosti na udaljenosti 3 mm od uklještenja i oslonca, te na polovici duljine nosača su izračunate dolje. Ove vrijednosti se odnose na gornji rub konzolnog nosača visine h , $z = -30$ mm.

Izrazi (3.17) i (3.19) dobiveni prema teoriji elastičnosti iz Airyjevih funkcija naprezanja se odnose na nosače jedinične širine b . Stoga se kontinuirano opterećenje q konzolnog nosača mora podijeliti sa širinom $b = 30$ mm kako bi naprezanje izračunato teorijom elastičnosti odgovaralo naprezanju koje je izračunato prema čvrstoći. Prema tome je kontinuirano opterećenje $q = q_k = q_g = 1/30 = 0,0333$ kN/m. Duljina konzole $l_k = 3000$ mm, a duljina grede na dva oslonca $l_g = 4500$ mm.

Naprezanje uz uklještenje ($x = 3$ mm), prema (3.17), iznosi

$$\sigma_x = -\frac{6q_k}{h^3} \left[(x - l_k)^2 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{10}h^2 \right] z,$$

$$\sigma_x = -\frac{6 \cdot 0,0333}{60^3} \left[(3 - 3000)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-30)^2 + \frac{1}{10} \cdot 60^2 \right] \cdot (-30)$$

$$\sigma_x = 249,494 \text{ MPa}$$

Naprezanje uz oslonac ($x = 3$ mm) i na polovici duljine konzolnog nosača ($x = 3000$ mm), prema (3.19), iznosi

$$\sigma_x = \frac{q_g}{h^3} \left(-\frac{3}{5}h^2 + 6l_g x - 6x^2 + 4z^2 \right) z,$$

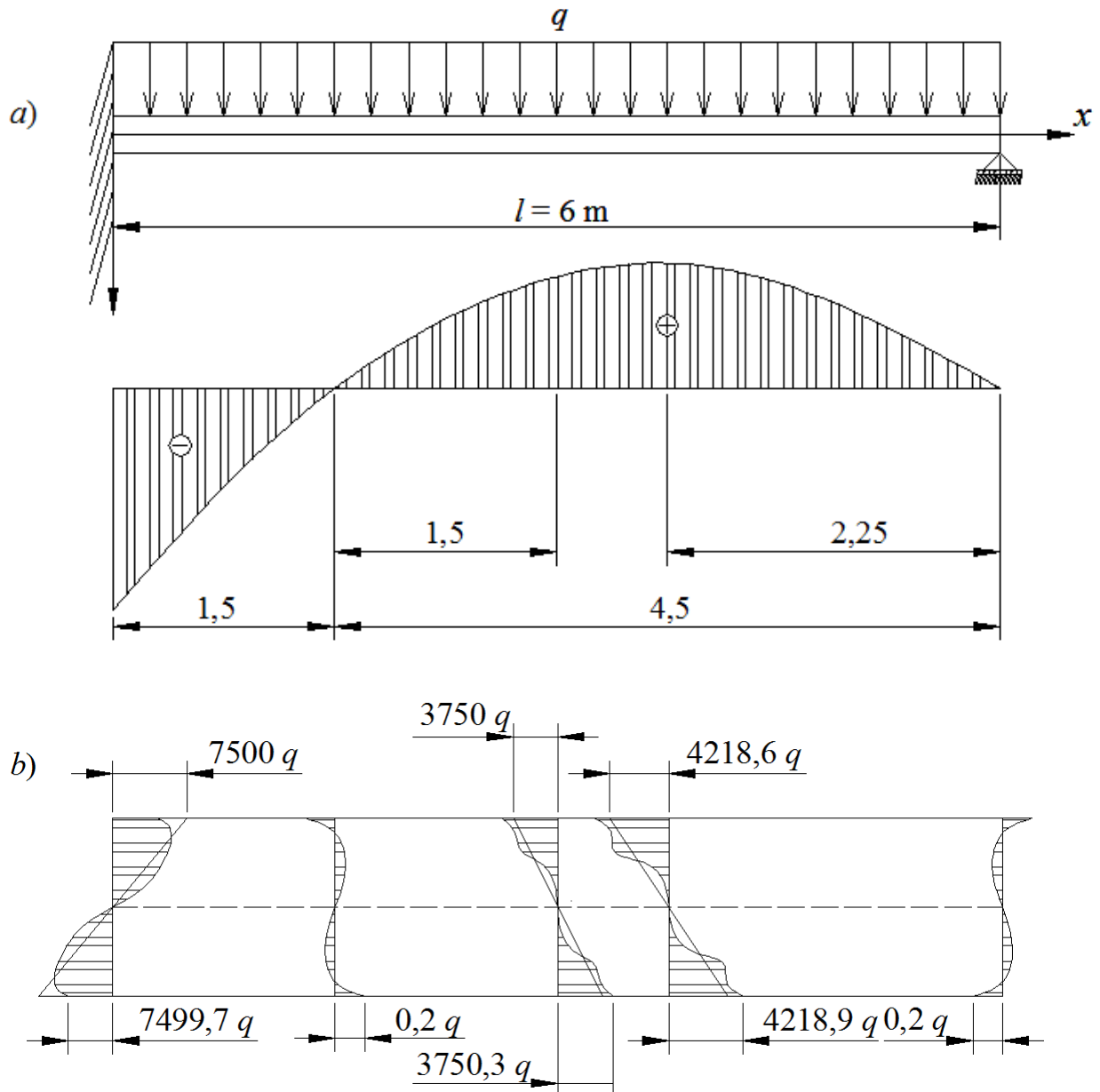
$$\sigma_x = \frac{0,0333}{60^3} \left(-\frac{3}{5} \cdot 60^2 + 6 \cdot 4500 \cdot 3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot (-30)^2 \right) \cdot (-30)$$

$$\sigma_x = -0,381 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{0,0333}{60^3} \left(-\frac{3}{5} \cdot 60^2 + 6 \cdot 4500 \cdot 3000 - 6 \cdot 3000^2 + 4 \cdot (-30)^2 \right) \cdot (-30)$$

$$\sigma_x = -125 \text{ MPa}$$

Naprezanja konzolnog nosača su izračunata tako da je isti podijeljen na dva segmenta. Izraz (3.17) opisuje raspodjelu naprezanja u uklještenju te na udaljenosti cca 50 mm od uklještenja. Na većoj udaljenosti funkcija ne opisuje dobro raspodjelu naprezanja. Izraz (3.19) opisuje raspodjelu naprezanja na udaljenosti 1500 mm od uklještenja pa do kraja konzolnog nosača (oslonac B). Što znači da je segment konzolnog nosača od 50 do 1500 mm "nepokriven" teorijom elastičnosti.



Slika 3.6 Konzolni nosač opterećen jednoliko kontinuirano

a) zadani konzolni nosač i dijagram momenata savijanja

b) raspodjela naprezanja po dužini nosača

Na slici 3.6 je prikazana raspodjela normalnog naprezanja σ_x na određenim mjestima konzolnog nosača i to na:

- na sredini konzolnog nosača
- na udaljenosti $x = 1500 \text{ mm}$ od uklještenja (gdje je moment savijanja $M_y = 0$)
- na udaljenosti $x = 3750 \text{ mm}$ od uklještenja (gdje je najveći pozitivan moment)

Vidljivo je da su prema teoriji elastičnosti naprezanja raspoređena po zakonu kubne parabole.

4 IZOPARAMETARSKI KONAČNI ELEMENT

Izoparametarski konačni elementi su elementi pomoću kojih se može dobro opisati zakrivljena površina. To su elementi sa zakrivljenim stranicama koji omogućuju znatno bolje modeliranje složenih geometrijskih oblika.

Elemente osnovnih geometrijskih oblika moguće je preslikati, iz lokalnog koordinatnog sustava, u različite nepravilne geometrijske oblike s ravnim ili zakrivljenim stranicama u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Osnovni elementi najčešće su opisani u lokalnim prirodnim koordinatama koje se nakon preslikavanja u općem slučaju iskrivljuju, tj. više nisu međusobno okomite ili prelaze u krivocrtne koordinate. Pritom je geometrija elementa u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu opisana pomoću interpolacijskih funkcija u prirodnim koordinatama, koje su jednake funkcijama preslikavanja. Ako je polje pomaka u elementu opisano pomoću istih interpolacijskih funkcija kao i geometrija elementa, takve elemente nazivamo izoparametarskim konačnim elementima. Kad su funkcije oblika koje opisuju geometriju elementa višeg reda od funkcija koje opisuju polje pomaka, elementi su superparametarski. Kad je geometrija opisana interpolacijskim funkcijama nižeg reda nego što je opisano polje pomaka, elementi se nazivaju subparametarski. U analizi konstrukcija se najčešće primjenjuju izoparametarski konačni elementi [10].

Općeniti izraz za aproksimaciju polja pomaka u dvije dimenzije, za element općeg oblika, s ukupno r čvorova, je

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta)u_1 + N_2(\xi, \eta)u_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)u_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)u_i \\ v(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta)v_1 + N_2(\xi, \eta)v_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)v_r = \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta)v_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje su ξ, η krivocrtne koordinate, $N_i(\xi, \eta)$ funkcije oblika, a u_i i v_i vrijednosti pomaka u čvorovima.

Veza između pravokutnih i krivocrtnih koordinata se uspostavlja preko izraza

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= M_1(\xi, \eta)x_1 + M_2(\xi, \eta)x_2 + \dots + M_r(\xi, \eta)x_r = \sum_{i=1}^r M_i(\xi, \eta)x_i \\ y(\xi, \eta) &= M_1(\xi, \eta)y_1 + M_2(\xi, \eta)y_2 + \dots + M_r(\xi, \eta)y_r = \sum_{i=1}^r M_i(\xi, \eta)y_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdje su ponovno ξ, η krivocrtne koordinate, $M_i(\xi, \eta)$ funkcije oblika, a x_i i y_i vrijednosti koordinata čvorova.

Za slučaj kad je $N_i(\xi, \eta) = M_i(\xi, \eta)$ imamo tkz. Izoparametarske elemente, tj. interpolacijske funkcije za polje pomaka i za geometriju su iste. Takav pristup osigurava prednost izoparametarskim elementima kod modeliranja zakrivljenih geometrija: nije potrebno progušćenje mreže uz zakrivljeni rub. Izoparametarski elementi zadovoljavaju osnovne kriterije konvergencije:

- pomaci krutog tijela se mogu ostvariti:
 - translacija (svi čvorovi su se pomaknuli za neku konstantu "c", tada pomak bilo gdje unutar elementa mora biti jednak toj konstanti): $u = \sum N_i u_i = \sum N_i c = c \sum N_i$. Ta je uvjet zadovoljen ako vrijedi $\sum N_i = 1$ što je za izoparametarske elemente ispunjeno jer su im funkcije oblika simetrične pa se kod zbrajanja poništavaju.
 - rotacija (za slučaj rotacije oko ishodišta koordinatnih osi za kut Θ pomak u točki (x, y) se može dobiti ako se koordinate točke pomnože s kutom rotacije Θ), tj.: $u = \Theta y$ i $v = \Theta x$. Budući da se čvorni pomaci tada mogu izraziti kao $u_i = \Theta y_i$, odnosno $v_i = \Theta x_i$, za komponentu pomaku u imamo

$$u = \sum N_i u_i = \sum N_i \Theta y_i = \Theta \sum N_i y_i = \Theta y$$
, što je zadovoljeno ako vrijedi $y = \sum N_i y_i$, odnosno $x = \sum N_i x_i$ za komponentu pomaka v .

- konstantna deformacija se može ostvariti:
 Polje konstantne deformacije zadano preko funkcije $f = A_1 + A_2 x + A_3 y$ se može ostvariti unutar izoparametarskih elemenata jer u svakom čvoru i tada imamo $f = A_1 + A_2 x_i + A_3 y_i$. Uvrstimo li taj izraz u izraz za polje deformacija unutar elementa, dobivamo

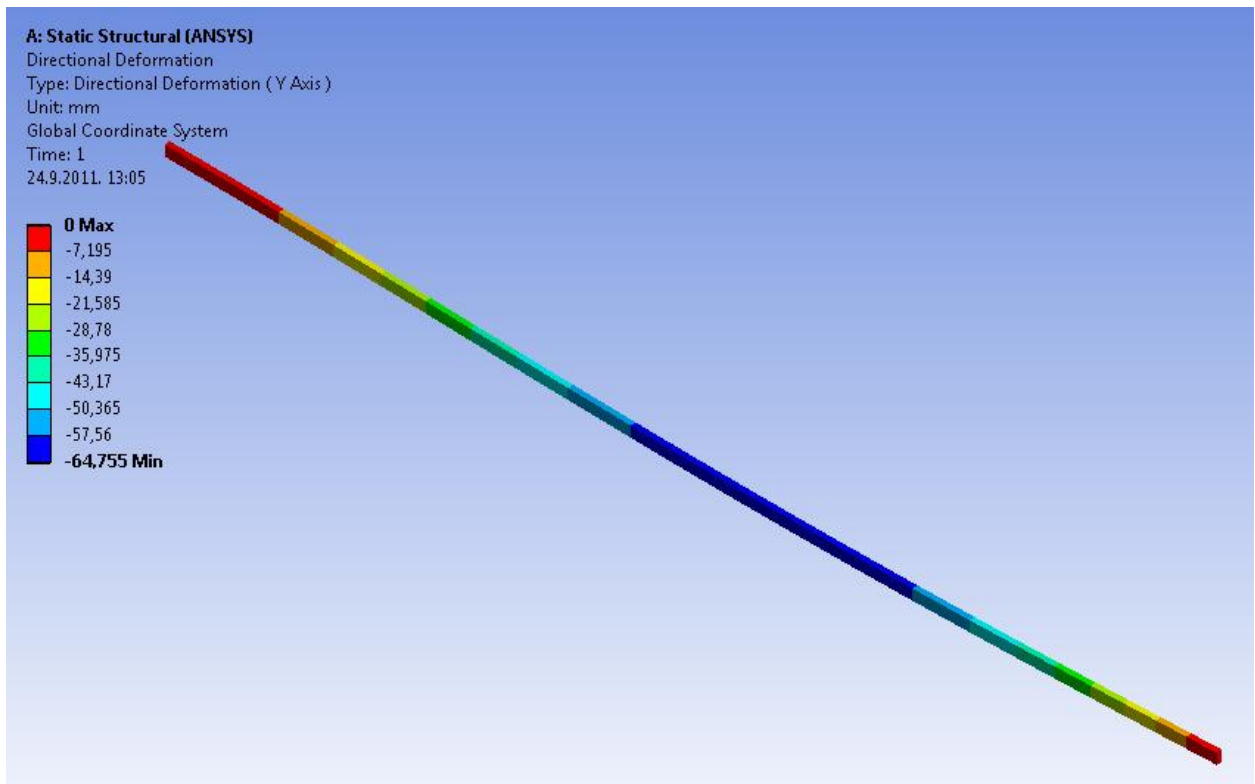
$$f = \sum N_i f_i = A_1 \sum N_i + A_2 \sum N_i x_i + A_3 \sum N_i y_i \quad (4.3)$$

Što odgovara polju konstantne deformacije ako vrijedi

$\sum N_i = 1, \sum N_i x_i = x, \sum N_i y_i = y$ (a to je zadovoljeno kod izoparametarskih elemenata).

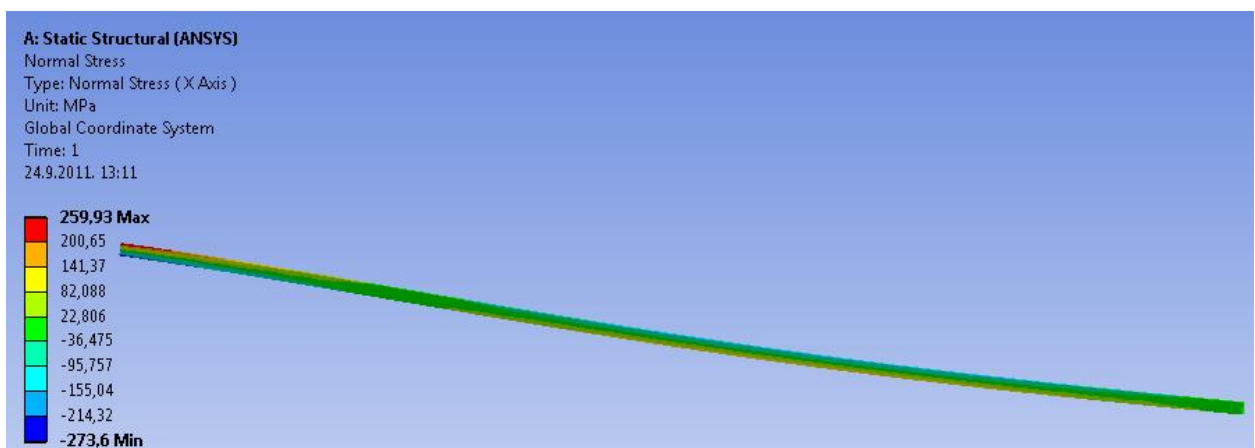
Ovaj uvjet je zapravo preformuliran uvjet pomaka krutog tijela.

4.1 Numeričko rješenje zadatka



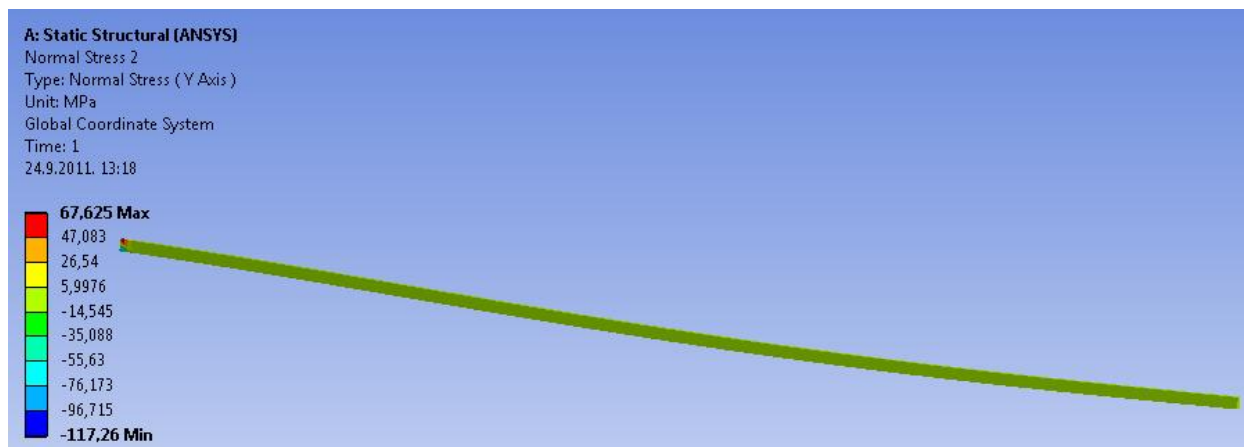
Slika 4.1 Vertikalni pomaci, mm

Na slici 4.1 prikazani su pomaci, tj. progib nosača. Pomaci su negativni jer je pozitivna os definirana vertikalno gore.



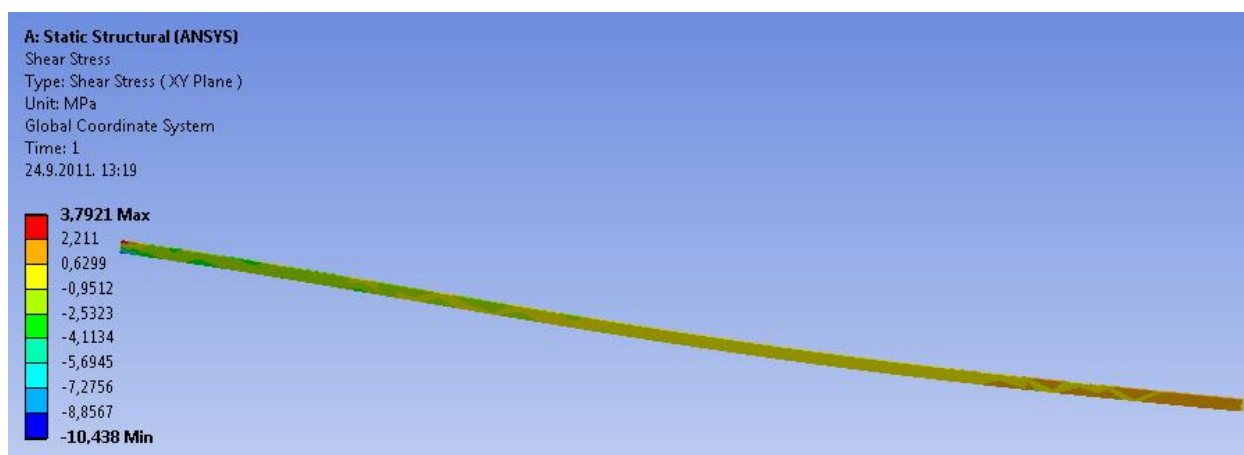
Slika 4.2 Normalno naprezanje u smjeru osi x

Na slici 4.2 prikazano je normalno naprezanje σ_x . U lijevom kraju nosač je ukliješten, dok je na desnom kraju radijalni oslonac.



Slika 4.3 Normalno naprezanje u smjeru osi y

Na slici 4.3 prikazano je normalno naprezanje σ_y .



Slika 4.4 Posmično naprezanje τ_{xy}

Na slici 4.4 prikazano je posmično naprezanje τ_{xy} .

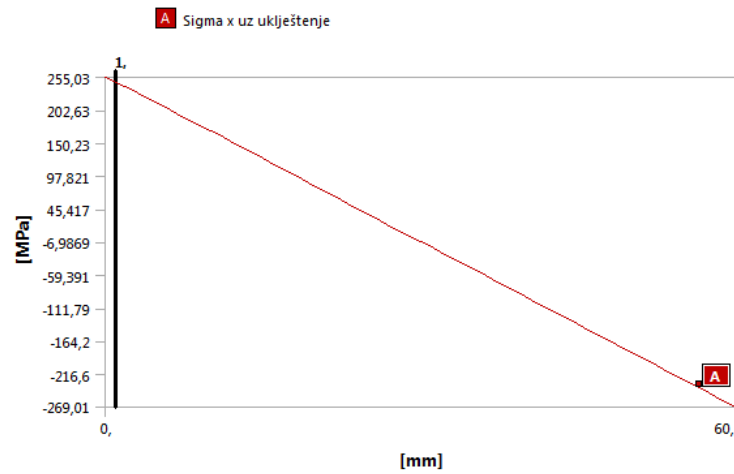
Numerički proračun je izvršen pomoću metode konačnih elemenata u *Ansys Workbench 12*.

Model je umrežen s 10800 elemenata i 60673 čvorova.

Napomena: koordinatni sustav koji je korišten pri numeričkom proračunu nije identičan koordinatnom sustavu koji se koristio pri analitičkom proračunu. Zamijenjene su y i z osi tako da negativna os y odgovara pozitivnoj osi z. Također, kontinuirano opterećenje $q = 1 \text{ kN/m}$ je pretvoreno u tlak tako da je podijeljeno sa širinom $b = 30 \text{ mm}$, te je kao tlak $p = 1/30 = 0,0333 \text{ MPa}$ zadan na konzolni nosač.

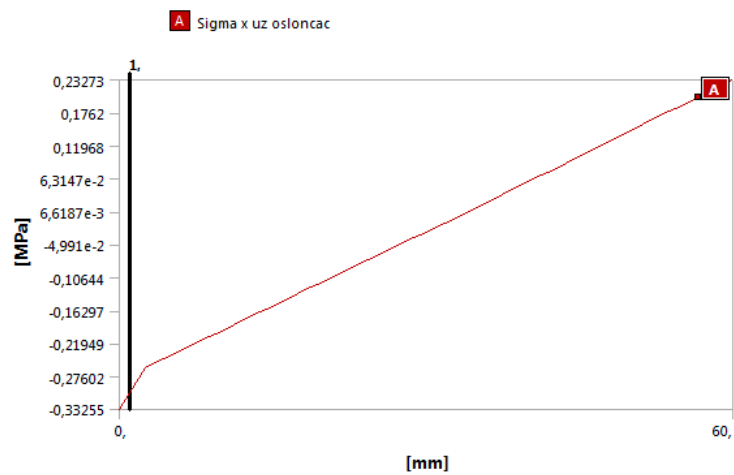
4.1.1 Dijagrami raspodjele normalnog naprezanja σ_x po visini konzolnog nosača

Dijagram raspodjele normalnog naprezanja σ_x na udaljenosti $x = 3$ mm od uklještenja



Slika 4.5 Raspodjela naprezanja po visini nosača h uz uklještenje

Dijagram raspodjele normalnog naprezanja σ_x na udaljenosti $x = 3$ mm od oslonca



Slika 4.6 Raspodjela naprezanja po visini nosača h uz oslonac

Dijagram raspodjele normalnog naprezanja σ_x na polovici konzolnog nosača ($x = 3000$ mm)



Slika 4.7 Raspodjela naprezanja po visini nosača h na polovici konzolnog nosača

Tablica 4.1 Vrijednosti naprezanja σ_x po visini h nosača na određenim duljinama nosača

UZ UKLJEŠTENJE		UZ OSLOMAC		NA POLOVICI NOSAČA	
Visina, mm	σ_x , MPa	Visina, mm	σ_x , MPa	Visina, mm	σ_x , MPa
0	255,03	0	-0,33255	0	-124,55
1,25	245,36	1,25	-0,29703	1,25	-119,36
2,5	235,68	2,5	-0,26152	2,5	-114,17
3,75	224,7	3,75	-0,2505	3,75	-108,98
5	213,71	5	-0,23989	5	-103,79
6,25	202,71	6,25	-0,22928	6,25	-98,6
7,5	191,72	7,5	-0,21866	7,5	-93,409
8,75	180,72	8,75	-0,20805	8,75	-88,218
10	169,72	10	-0,19743	10	-83,028
11,25	158,73	11,25	-0,18682	11,25	-77,837
12,5	147,73	12,5	-0,17621	12,5	-72,646
13,75	136,74	13,75	-0,16559	13,75	-67,456
15	125,74	15	-0,15498	15	-62,265
16,25	114,74	16,25	-0,14436	16,25	-57,074
17,5	103,75	17,5	-0,13375	17,5	-51,884
18,75	92,753	18,75	-0,12314	18,75	-46,693
20	81,757	20	-0,11252	20	-41,502
21,25	70,761	21,25	-0,10191	21,25	-36,312
22,5	59,765	22,5	-9,1295e-002	22,5	-31,121
23,75	48,769	23,75	-8,0681e-002	23,75	-25,93
25	37,773	25	-7,0067e-002	25	-20,739
26,25	26,778	26,25	-5,9453e-002	26,25	-15,549
27,5	15,782	27,5	-4,8839e-002	27,5	-10,358
28,75	4,7857	28,75	-3,8225e-002	28,75	-5,1674
30	-6,2102	30	-2,7611e-002	30	2,3255e-002
31,25	-17,039	31,25	-1,7706e-002	31,25	5,2142
32,5	-27,868	32,5	-7,8006e-003	32,5	10,405
33,75	-38,827	33,75	3,1169e-003	33,75	15,596
35	-49,788	35	1,4051e-002	35	20,787
36,25	-60,748	36,25	2,4985e-002	36,25	25,978
37,5	-71,709	37,5	3,5919e-002	37,5	31,169
38,75	-82,67	38,75	4,6853e-002	38,75	36,36
40	-93,631	40	5,7787e-002	40	41,551
41,25	-104,59	41,25	6,8721e-002	41,25	46,742
42,5	-115,55	42,5	7,9655e-002	42,5	51,933
43,75	-126,51	43,75	9,0589e-002	43,75	57,124
45	-137,48	45	0,10152	45	62,315
46,25	-148,44	46,25	0,11246	46,25	67,506
47,5	-159,4	47,5	0,12339	47,5	72,697
48,75	-170,36	48,75	0,13433	48,75	77,888
50	-181,32	50	0,14526	50	83,079
51,25	-192,28	51,25	0,15619	51,25	88,27
52,5	-203,24	52,5	0,16713	52,5	93,461
53,75	-214,2	53,75	0,17806	53,75	98,652
55	-225,16	55	0,189	55	103,84
56,25	-236,12	56,25	0,19993	56,25	109,03
57,5	-247,08	57,5	0,21086	57,5	114,22
58,75	-258,05	58,75	0,2218	58,75	119,42
60	-269,01	60	0,23273	60	124,61

* Vrijednosti si preuzete (iščitane) iz Ansys Workbench 12 u Report Preview

5 ELASTOPLASTIČNA TIJELA

Plastično i elastično deformiranje tijela jesu *skleronomne pojave*: to znači da odziv materijala na opterećenje ne ovisi o vremenu t , odnosno o brzini deformiranja. Ako takva ovisnost i postoji, zanemarivo je mala. Plastično ponašanje materijala vrlo je složeno. Usprkos burnom razvoju teorije plastičnosti u posljednjim desetljećima i mnogim predloženim teorijama, nisu do danas postavljene *opće konstitutivne jednadžbe* koje bi dovoljno dobro opisale sve pojave koje nastaju pri plastičnom deformiranju materijala. Zbog njihove opsežnosti i složenosti, nije moguće u jednom poglavlju iznijeti niti samo glavne crte svih teorija plastičnosti pa ćemo se ovdje ograničiti na izlaganje samo plastičnosti metalnih materijala. Uostalom, plastičnost metala ima i najširu primjenu u tehnici, posebno u strojarstvu, brodogradnji i graditeljstvu [4].

5.1 Podjela teorije plastičnosti

Teorije plastičnosti mogu se svrstati u dvije skupine: matematičke i fizikalne. Matematičke teorije razmatraju problem na makrorazini. Nazivaju se još i fenomenološke. Zadatak matematičke teorije plastičnosti jest da eksperimentalne podatke o plastičnom ponašanju materijala formulira u oblik općih matematičkih jednadžbi i formula. Prema tome, te se teorije zasnivaju na pretpostavkama i hipotezama koje se postavljaju na temelju rezultata koji su dobiveni u eksperimentima plastičnog deformiranja materijala. Prema tome, za postavljanje matematičke teorije plastičnosti nisu potrebna saznanja i uvidi u stvarno ponašanje materijala na mokrrozini, tj. ponašanje na razini kristalne rešetke ili pojedinog kristala.

Nasuprot tome, fizikalne teorije plastičnosti proučavaju plastično deformiranje na mikrorazini, tj. na razini kristalne rešetke. One daju odgovor na pitanje zašto nastaje i kako nastaje plastično deformiranje pojedinih kristala. Uzimaju u obzir oblik rešetke, njezine nepravilnosti, dislokacije, uključivo i druge pojave. Ta se saznanja zatim koriste da bi se predvidjelo ponašanje polikristalinih metala.

Prema teoriji plastičnosti u tehnici zbiva se makroskopska razina bilo da se radi o proračunu nosivih metalnih i drugih konstrukcija metodama teorije plastičnosti ili o obradi deformiranjem metala i drugih materijala. Prema tome, svaka se primijenjena teorija plastičnosti zasniva na matematičkim teorijama. Međutim, dobar uvid u fizikalna zbivanja na mikrorazini omogućuje spoznaju pravog značenja i ograničenosti primjene pojedinih matematičkih teorija plastičnosti [4].

5.2 Dijagrami deformiranja

Pretežni dio podataka o mehaničkim, elastičnim i plastičnim svojstvima materijala određuje se u *pokusima rastezanja*. Epruveta od ispitivanog materijala optereti se na krajevima silama F na rastezanje u posebnim ispitnim strojevima koji se nazivaju *kidalice*. Pri tome se bilježi ovisnost sile F o produljenju epruvete Δl . Dobiveni dijagram naziva se *općenito dijagram deformiranja*, a u ovom slučaju *dijagram rastezanja*. Ako se sila F podijeli s početnom ploštinom poprečnog presjeka epruvete A_0 , dobiti će se *tehničko* ili *konvencionalno naprezanje* σ_0 . Jednako tako dijeljenjem produljenja Δl s početnom duljinom mjernog dijela epruvete l_0 dobiva se *prosječna deformacija* ε , tj.

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0}, \quad \sigma = \frac{F}{A}, \quad (5.1)$$

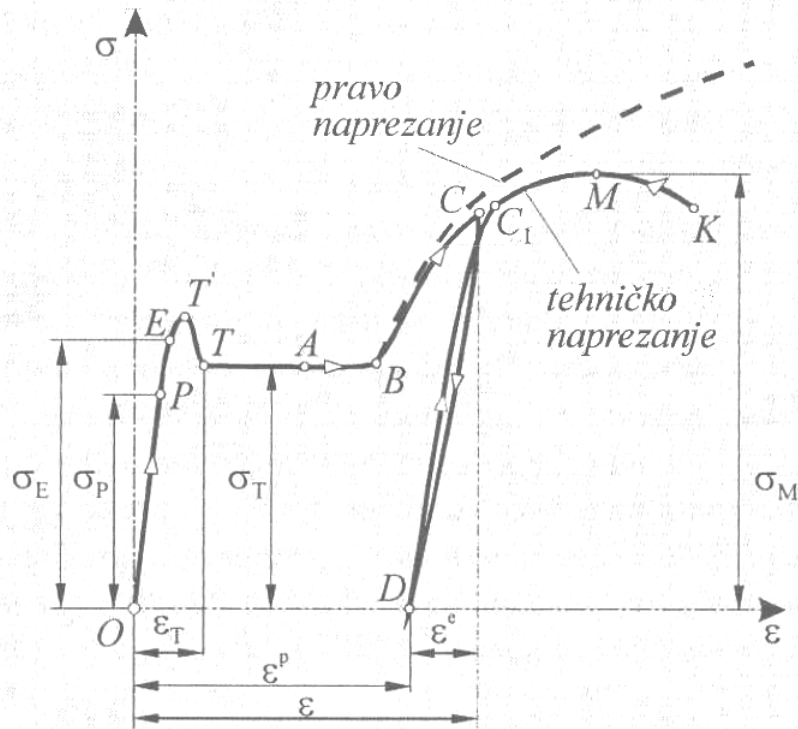
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5.2)$$

Prema tome, dijagram rastezanja u nekomu mjerilu jest i ovisnost tehničkog naprezanja σ_0 o deformaciji ε pa se dijagram deformiranja naziva još i $\sigma - \varepsilon$ *dijagram*. *Pravo naprezanje* σ dobije se dijeljenjem sile F s trenutnom ploštinom presjeka A . Budući daje zbog Poissonove kontrakcije A uvijek manji od A_0 , to je pri rastezanju pravo naprezanje uvijek veće od tehničkog naprezanja σ_0 .

Na slici 5.1 prikazan je dijagram rastezanja mekoga niskougličnog čelika. Punom crtom prikazana je ovisnost tehničkog naprezanja σ_0 , a crtkano ovisnost pravog naprezanja σ o deformaciji ε . Na dijagramu se uočavaju tri karakteristične točke P, E i T koje se nazivaju *granica proporcionalnosti* σ_P , *granica elastičnosti* σ_E i gornja granica tečenja σ_T . Poradi njihove važnosti u teoriji i primjeni, navesti će se njihove definicije [4]:

- Granica proporcionalnosti σ_P jest najviše naprezanje za koje je deformacija proporcionalna naprezanju. Ako je $\sigma \leq \sigma_P$, vrijedi Hookeov zakon.
- Granica elastičnosti σ_E jest najviše naprezanje do kojeg se materijal ponaša elastično. Ako je $\sigma \leq \sigma_E$, nakon rasterećenja mjerni dio epruvete potpuno se vraća u prvobitni oblik i veličinu.

- Granica tečenja σ_T jest najniže naprezanje pri kojemu dijagram rastezanja postigne maksimum, odnosno najniže naprezanje pri kojemu raste deformacija bez porasta naprezanja. Razlikuju se gornja granica tečenja i donja granica tečenja.

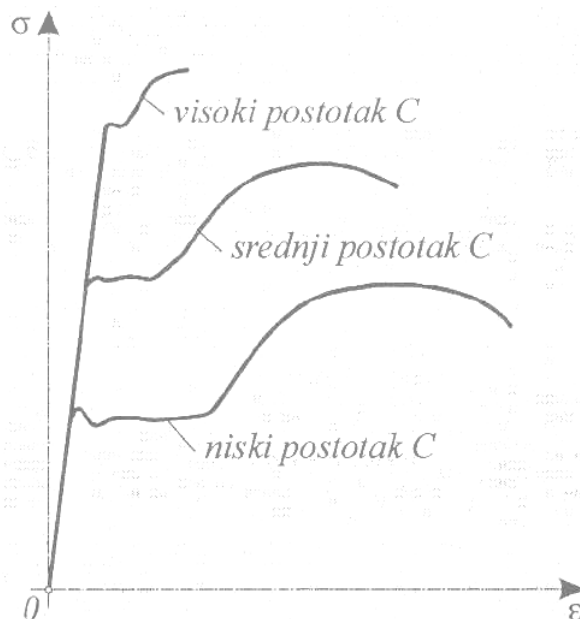


Slika 5.1 Dijagram rastezanja nisko ugljičnog čelika [4]

Nakon točke T epruveta se rasteže pri približno stalnoj sili F , što znači i pri konstantnom naprezanju σ_0 . Nakon točke B naprezanje ponovno raste zbog očvršćenja materijala plastičnim deformiranjem. U točki M naprezanje σ_0 postiže svoj maksimum. Nakon točke M materijal se ponaša nestabilno, tj. pri porastu deformacije opada sila F , a time i σ_0 . Te se veličine smanjuju zbog pojave lokalno suženja epruvete koje se naziva vrat ili grlo epruvete. Naprezanje σ_M koje odgovara točki M naziva se vlačna čvrstoća. Napokon u točki K nastaje lom epruvete. Iako se tehničko naprezanje smanjuje nakon točke M , pravo naprezanje i dalje raste jer se brže smanjuje ploština poprečnog presjeka A nego sila F . Porast pravog naprezanja pokazan je crtano na slici 5.1.

Horizontalni dio dijagrama T, A, B naziva se plastični plato. Pri rastezanju epruvete od točke T do točke B plastične deformacije nisu jednoliko raspodijeljene. Pojedina se uska područja plastificiraju, tj. iz elastičnog prelaze u plastično stanje. Ta uska područja, odnosno tanki slojevi plastificiranog materijala, nazvana su Lüdersove linije (Lueders lines). One su nagnute približno

pod 45° prema osi epruvete. Pomicanjem od točke T prema B raste postotak plastificiranog materijala. U točki A koja se nalazi na sredini platoa plastificirano je približno 50% materijala. Razlika između pravog naprezanja σ i tehničkog naprezanja σ_0 postupno raste. Razlika između σ i σ_0 raste naglo nakon pojave vrata kako je i prikazano na slici 5.1. S porastom sadržaja ugljika i drugih legirajućih elemenata raste čvrstoća čelika, smanjuje se njegova duktilnost i plastični plato kako je prikazano na slici 5.2 [4].



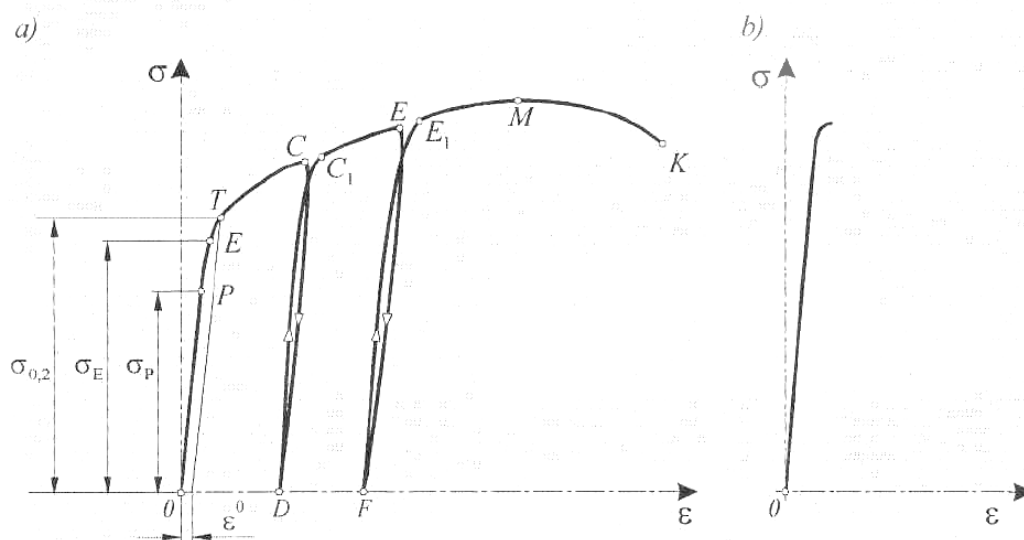
Slika 5.2 Približan prikaz promjene rastezanja čelika s porastom sadržaja ugljika C [4]

Donja granica tečenja σ_T ostaje uvijek približno konstantna, dok gornja granica tečenja σ_T ovisi o uvjetima u kojima se pokus rastezanja provodi. Osobito na σ_T utječu centričnost opterećenja, stanje površine epruvete, pojava koncentracije naprezanja i slično. Ako se epruveta u točki C rastereti kako je prikazano na slici 5.1 crtom CD , materijal će se ponašati elastično i gotovo linearno. Pri ponovnom opterećenju dijagram slijedi crtu DC_1 . Daljnji tok dijagrama C_1MK zbiva se kao da rasterećenja nije ni bilo. Na slici 5.1. vidi se da se ukupna deformacija ε daje rastaviti na trajnu ili *plastičnu deformaciju* ε^p i *elastičnu deformaciju* ε^e , tj. vrijedi

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (5.3)$$

Iako se dijagrami rastezanja metala međusobno znatno razlikuju, i po obliku i po veličini, svi se oni mogu svrstati u tri skupine. Jedan oblik dijagrama već je prikazan na slici 5.1. Ostali *duktilni materijali*, u koje spadaju, primjerice, bakar i njegove slitine te aluminij i njegove slitine, imaju

dijagram prema slici 5.3a. Dijagram rastezanja *krhkog materijala* prikazan je na slici 5.3b. Duktilni materijali prije loma doživljavaju veliku plastičnu deformaciju pa je za lom takvog materijala potrebno utrošiti znatan dio energije. Krhki se materijali lome bez prethodne plastične deformacije ili uz vrlo malu prethodnu plastičnu deformaciju [4].

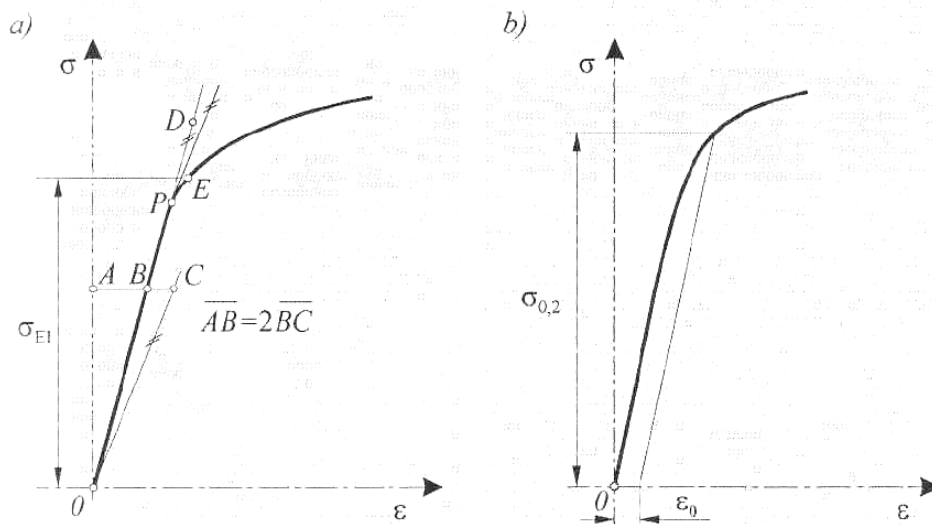


Slika 5.3 Dijagrami rastezanja:

a) duktilnog materijala b) krhkog materijala [4]

Vidljivo je još da su histerezne petlje rasterećenja i opterećenja vrlo uske i gotovo linearne pa se krivulje CDC_1 na slici 5.1 te CDC_1 i EFE_1 na slici 5.3a zamjenjuju u primjeni pravcima CD , odnosno EF . Ako materijal ima izraženu granicu tečenja, kao što je to slučaj s mekim čelikom prema slici 5.1, ona se može eksperimentalno lako odrediti. No, u slučaju dijagrama rastezanja duktilnog materijala prema slici 5.3, tu je granicu teško eksperimentalno jednoznačno utvrditi. U oba slučaja teško se određuju granica proporcionalnosti i granica elastičnosti. Zbog toga se dogovorno uvode pojmovi *prividne (Johnsonove) granice elastičnosti* i *konvencionalne granice tečenja*. Njihove definicije u skladu sa slikom 5.4. glase [4]:

- Prividna (Johnsonova) granica elastičnosti σ_{EJ} jest naprezanje pri kojemu je nagib tangente na dijagram $\sigma = \sigma(\epsilon)$ za 50% manji od nagiba tangente u ishodištu.
- Konvencionalna granica tečenja $\sigma_{0,2}$ jest ono naprezanje koje izaziva trajnu plastičnu deformaciju $\epsilon_0 = 0,002$ (0,2%). U uporabi su i druge vrijednosti ϵ_0 . Primjerice, $\epsilon_0 = 0,0001$. U tom se slučaju konvencionalna granica tečenja označava s $\sigma_{0,01}$.



Slika 5.4 Dogovorna granica elastičnosti i granica tečenja

a) prividna Johnsonova granica elastičnosti, b) konvencionalna granica tečenja [4]

5.3 Analiza dijagrama rastezanja

Većina kidalica bilježi ovisnost konvencionalnog naprezanja σ_0 o deformaciji ε . S teorijskog stajališta povoljnije je imati dijagram ovisnosti pravog naprezanja σ o deformaciji ε ili, još bolje, o prirodnoj ili logaritamskoj deformaciji ε^N . Prirasti obiju deformacija iznose [4]

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l_0}, \quad d\varepsilon^N = \frac{dl}{l}. \quad (5.4)$$

Integracijom gornjih izraza dobiva se

$$\varepsilon = \frac{1}{l_0} \int_{l_0}^l dl, \quad \varepsilon^N = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}, \quad (5.5)$$

Odnosno

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad \varepsilon^N = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (5.6)$$

Da bi se mogao dijagram $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ pretvoriti u dijagram $\sigma = \sigma(\varepsilon^N)$, mora se uspostaviti odnos između σ i σ_0 te između ε i ε^N . Na temelju činjenice da se pri plastičnom deformiranju ne mijenja obujam, može se pisati

$$V = A_0 l_0 = Al,$$

odnosno

$$\frac{A_0}{A} = \frac{l}{l_0}. \quad (5.7)$$

Sada je

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \frac{A_0}{A},$$

što uz pomoć (5.1) i (5.7) prelazi u

$$\sigma = \sigma_0 \frac{l}{l_0}.$$

Budući da je $l = l_0(1 + \varepsilon)$, onda je

$$\sigma = \sigma_0(1 + \varepsilon). \quad (5.8)$$

S druge strane je

$$\varepsilon^N = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon). \quad (5.9)$$

Sad se može prići pretvorbi dijagrama $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ u dijagram $\sigma = \sigma(\varepsilon^N)$. To će se učiniti za jedan hipotetski duktilni materijal. Općenito se ovisnost naprezanja σ o deformaciji ε^N može zadati u obliku

$$\sigma = C(\varepsilon^N)^n \quad (5.10)$$

Uz pretpostavku da se radi o materijalu za koji vrijedi dijagram

$$\sigma = 6000(\varepsilon^N)^{0,2}, \quad \varepsilon > 0,01. \quad (5.11)$$

Ta je ovisnost prikazana na slici 5.5 gornjom krivuljom pomoću (5.8) i (5.9) ta je krivulja pretvorena u krivulju ovisnosti $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$.

Da bi se točnije odredio položaj M na dijagramu $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$, razmotriti će se uvjete rasta sile F , a time i konvencionalnog naprezanja σ_0 . Sila F dana je izrazom

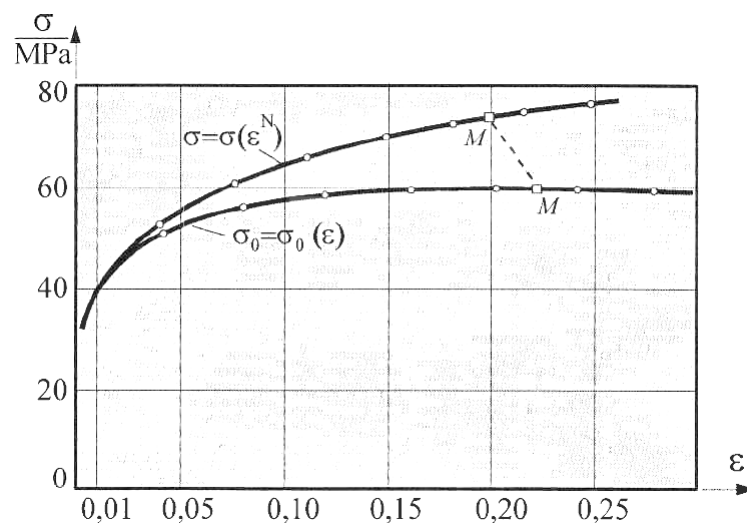
$$F = \sigma A,$$

I ona raste zbog očvršćenja materijala, a opada zbog smanjenja ploštine poprečnog presjeka. Kad je $dF = 0$, bit će $F = F_{\max}$ odnosno $\sigma_0 = \sigma_M$. Prema tome vrijednost ε^N za koju je $\sigma_0 = \sigma_M$ može se dobiti iz uvjeta

$$dF = \sigma dA + Ad\sigma = 0,$$

Odnosno iz uvjeta

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A}. \quad (5.12)$$



Slika 5.5 Usporedba ovisnosti pravog naprezanja o prirodnoj deformaciji i konvencionalnog naprezanja o deformaciji za $\sigma = 6000(\varepsilon^N)^{0,2}$ i $\varepsilon > 0,01$ [4]

S druge strane pri plastičnom deformiranju nema porasta obujma V . Budući da je $V = A \cdot l$, bit će

$$dV = Adl + ldA = 0,$$

ili prema (5.4)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dl}{l} = -d\varepsilon^N. \quad (5.13)$$

Nakon uvrštavanja (5.13) u (5.12) slijedi

$$d\sigma = \sigma d\varepsilon^N. \quad (5.14)$$

Prema (5.10) je

$$d\sigma = Cn(\varepsilon^N)^{n-1} d\varepsilon^N.$$

Ako se gornji izraz zajedno s (5.10) uvrsti u (5.14), dobiti će se

$$\varepsilon^N = n, \tag{5.15}$$

tj. vrijednost deformacije za koju je $\sigma_0 = \sigma_M$. U slučaju materijala za koji vrijedi (5.11) bit će $\varepsilon^N = 0,2$ odnosno $\varepsilon = 0,2214$.

5.4 Idealizacija dijagrama deformiranja

Stvarni dijagrami deformiranja metala previše su složeni da bi bili prikladni za analitičku obradu. Da bismo olakšali analizu plastičnog deformiranja metala, stvarni se dijagrami zamjenjuju njihovom idealizacijom. Pri tome idealizirani dijagrami zadržavaju bitne značajke stvarnih dijagrama, dok su nebitne pojedinosti dijagrama ispuštene. Na sreću, teorija plastičnosti, odnosno mehanika plastičnih tijela primjenjuje se u dva bitno različita područja:

- proračun nosivih konstrukcija, tlačnih posuda, cjevovoda itd.
- obrada metala deformiranjem.

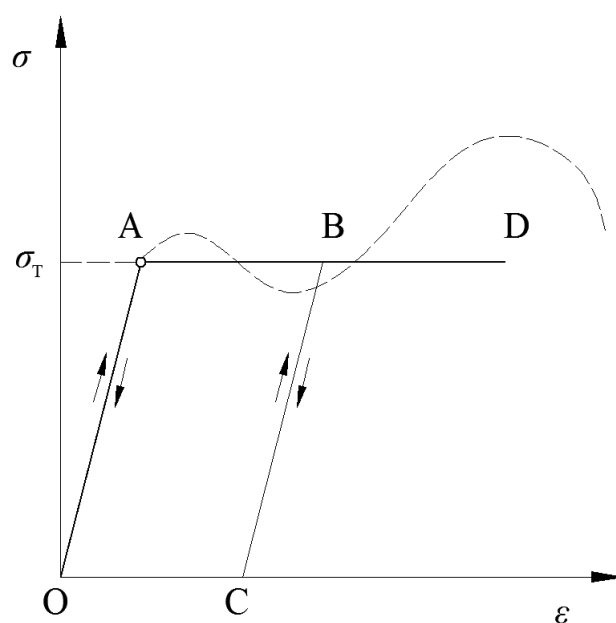
U prvom slučaju plastične deformacije su male, reda veličine elastičnih deformacija. Pri tome je dovoljno uzeti u obzir samo početni dio dijagrama deformiranja. U drugom su slučaju plastične deformacije vrlo velike. Često su dva ili tri reda veličine veće od elastičnih. U tom se slučaju mogu zanemariti elastične deformacije [4].

Stoga se za proračun konstrukcija najčešće koriste dva modela za opisivanje stvarnog dijagrama rastezanja, odnosno ponašanja materijala:

- linearno elastični – idealno plastični materijalni model i
- linearno elastični – očvršćavajući materijalni model.

5.4.1 Linearno elastično-idealno plastično ponašanje materijala

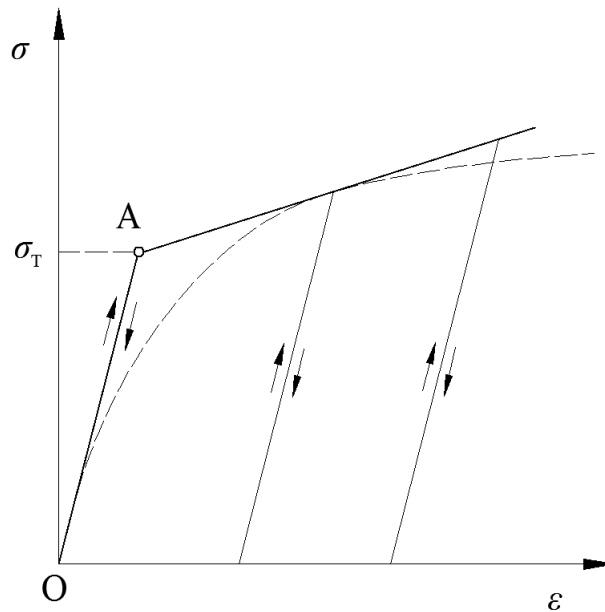
Slika 5.6 prikazuje dijagram ponašanja linearno elastičnog – idealno plastičnog materijala. Dio OA dijagrama $\sigma - \varepsilon$ predstavlja elastično ponašanje materijala, a dio dijagrama $\sigma - \varepsilon$ iza točke A predstavlja idealno plastično ponašanje materijala. Kada naprezanje u materijalu konstrukcijskog elementa postigne granicu plastičnosti σ_T (tečenja), deformacije materijala rastu bez povećanja naprezanja. Ako u točki B , rasteretimo epruvetu, tada to rasterećenje ide pravcem BC , a ponovno opterećenje ide pravcem CBD . Prikazani idealizirani dijagram na slici 5.6 dobro opisuje ponašanje mekog čelika [5].



Slika 5.6 Linearno elastičan – idealno plastičan materijal [6]

5.4.2 Linearno elastično-očvršćavajuće ponašanje materijala

Slika 5.7 prikazuje linearno elastično – očvršćavajuće ponašanje materijala. Dio OA dijagrama $\sigma - \varepsilon$ predstavlja elastično ponašanje materijala, a dio dijagrama $\sigma - \varepsilon$ iza točke A predstavlja očvršćavajuće ponašanje materijala. Kada naprezanje u materijalu konstrukcijskog elementa postigne granicu plastičnosti σ_T (tečenja), deformacije konstrukcijskog elementa rastu s povećanjem naprezanja [5].



Slika 5.7 Linearno elastičan – očvršćavajući materijal [6]

5.5 Zaključci o plastičnom deformiranju

Na temelju opisanih pokusa, kao i mnogobrojnih drugih koji ovdje nisu posebno opisani, mogu se postaviti sljedeće pretpostavke o ponašanju elastoplastičnih materijala pri jednoosnom deformiranju:

1. Ukupna deformacija može se rastaviti na *povrativu elastičnu deformaciju* ε^e i na trajnu ili *nepovrativu plastičnu deformaciju* ε^p . U tom slučaju vrijedi

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

2. Za gotovo sve materijale može se pretpostaviti postojanje granice tečenja σ_T . Ako je naprezanje manje od granice tečenja, materijal se nalazi u elastičnom stanju. Kad naprezanje dostigne granicu tečenja, počinje plastično deformiranje tijela.
3. Materijal je idealnoplastičan ako pri konstantnom naprezanju $\sigma = \sigma_T$, plastična deformacija neprekidno raste. U tom slučaju kažemo da materijal *plastično teče*. U tom slučaju vrijedi

$$\sigma < \sigma_T \quad \text{elastično stanje,}$$

$$\sigma = \sigma_T \quad \text{plastično tečenje.} \quad (5.16)$$

Pri rasterećenju materijal se ponaša linearno i elastično. Pri ponovnom opterećenju materijal se ponaša linearno elastično dok ne dostigne granicu tečenja σ_T .

4. Ako je nakon dostignuća granice tečenja σ_T povećanje plastične deformacije moguće samo uz povećanje naprezanja, radi se o *plastičnoočvršćujućem materijalu*. Pri tome poradi plastičnog deformiranja raste granica tečenja pa i dalje vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma < \sigma_T^* & \quad \text{elastično stanje,} \\ \sigma = \sigma_T^* & \quad \text{plastično deformiranje.} \end{aligned} \quad (5.17)$$

No, u tom slučaju granica tečenja nije konstantna nego ovisi o plastičnoj deformaciji, tj. vrijedi

$$\sigma_T^* = \sigma_T^*(\varepsilon^P) \quad \text{plastično deformiranje.} \quad (5.18)$$

5. Pri rasterećenju iz stanja naprezanja $\sigma = \sigma_T^*$ materijal se ponaša elastično i približno linearno. Pri ponovnom opterećenju materijal se ponovno ponaša elastično dok ne dostigne naprezanje σ_1 koje odgovara novoj povećanoj granici tečenja σ_T^* .
6. Pri promjeni predznaka deformiranja, primjerice pri prijelazu iz rastezanja u sabijanje i obratno, neki materijali pokazuju Bauschingerov efekt.
7. Pri plastičnom deformiranju ne mijenja se obujam, tj. plastična obujamna deformacija jednaka je nuli, dakle $\nu = 0,5$ [4].

5.6 Plastična analiza konstrukcija

Elastoplastična analiza u usporedbi s elastičnom (linearnom) analizom mnogo je teža i složenija. Na sreću, primjena mehanike plastičnih tijela uglavnom se odnosi na dva potpuno odvojena područja:

1. plastična analiza nosivih konstrukcija,
2. obrada metala deformiranjem.

U prvom slučaju plastične deformacije su male, istog reda veličine kao i elastične deformacije, što znatno olakšava analizu. U drugom slučaju elastične deformacije su zanemarivo male u usporedbi s plastičnim pa se može primijeniti pojednostavljeni model kruto-idealnoplastičnog tijela. Pri savijanju i uvijanju štapova nastaju ponekad dvoosna i troosna stanja naprezanja. Na

sreću, jedno glavno naprezanje je po pravilu bitno veće od preostala dva pa se, uz prihvaćanje male pogreške, može prihvatiti da se radi o jednoosnom naprezanju u slučaju savijanja i osnog opterećenja. Kad se radi o uvijanju štapova, možemo prihvatiti pretpostavku o čistom smicanju. Analizi naprezanja i deformacija u štapovima pristupit će se pojednostavnjenim tehničkim postupkom. Prema tom postupku umjesto *uvjeta kompatibilnosti deformacije* rabe se *pretpostavke o deformiranju*, odnosno *pretpostavke o raspodjeli naprezanja*. Geometrijskom analizom dobivaju se kvalitativni izrazi za raspodjelu deformacije. U tim se izrazima nalazi jedan ili više *nepoznatih parametara*. Pomoću konstitutivnih jednadžbi, tj. veza naprezanja i deformacije, dobiju se izrazi za naprezanje. Na koncu se primjenom uvjeta ravnoteže određuju nepoznati parametri, a time i konačni izrazi za naprezanje i deformaciju [4].

5.6.1 Savijanje štapa čiji presjek ima dvije osi simetrije

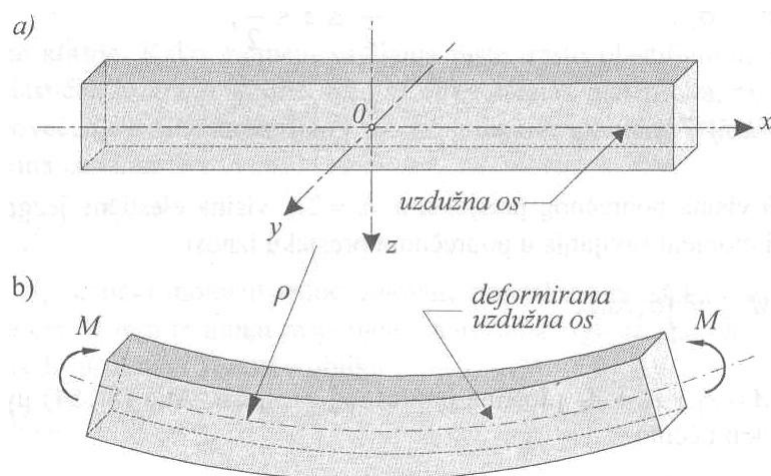
Analiza savijanja prizmatičnih štapova u elastoplastičnom stanju provodi se uz iste pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja kao i u elastičnom stanju. Te su pretpostavke:

1. poprečni presjeci štapa ostaju tijekom deformiranja ravni i okomiti na deformiranu uzdužnu os; u elastičnom stanju deformirana uzdužna os je elastična linija;
2. u štapu vlada približno jednoosno stanje naprezanja.

Izraz za raspodjelu deformacije u elastičnom i plastičnom području glasi

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}, \quad (5.19)$$

gdje je ρ polumjer zakrivljenosti deformirane uzdužne osi. Koordinatni sustav definiran je na slici 5.8.



Slika 5.8 Savijanje ravnog prizmatičnog štapa:

a) poprečni oblik štapa s koordinatnim sustavom, b) deformirani oblik štapa [4]

Elastično stanje. Dok je štap potpuno u elastičnom stanju, vrijede sljedeći izrazi

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z, \quad \sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{W_y}, \quad (5.20)$$

$$M_{y,\max} = M_{y,T} = \sigma_T W_y, \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \quad (5.22)$$

Elastoplastično stanje. Ako poprečni presjek štapa ima dvije osi simetrije i ako se savija oko jedne osi simetrije, ta će os ujedno biti neutralna os kako je prikazano na slici 5.9. Čim moment savijanja prijeđe vrijednost $M_{y,T}$ koja je određena izrazom (5.21), počinju se stvarati plastificirana područja na gornjemu i donjemu dijelu presjeka.

Naprezanje je u elastičnoj jezgri raspodijeljeno po zakonu pravca. U plastificiranim područjima jednako je granici tečenja σ_T .

Prema tome se može pisati

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_T \frac{2z}{h_e}, & -\frac{h_e}{2} &\leq z \leq \frac{h_e}{2}, \\ \sigma_x &= \sigma_T, & \frac{h_e}{2} &\leq z \leq \frac{h}{2}, \\ \sigma_x &= -\sigma_T, & -\frac{h}{2} &\leq z \leq -\frac{h_e}{2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdje je h visina poprečnog presjeka, a $h_e = 2z_e$ visina elastične jezgre. Prema definiciji moment savijanja u poprečnom presjeku iznosi

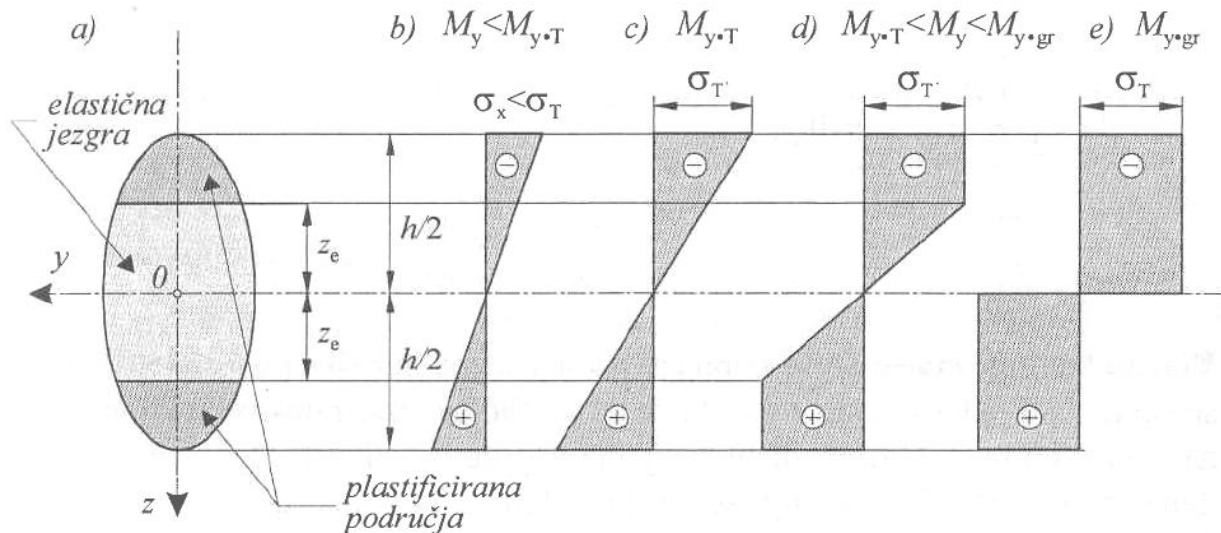
$$M_{y,pl} = \int_A \sigma_x z dA, \quad (5.24)$$

gdje je $A = A_1 + A_e + A_2$ ploština poprečnog presjeka. Ako se (5.23) uvrsti u (5.24), dobit će se

$$M_{y,pl} = \frac{2\sigma_T}{h_e} \int_{A_e} z^2 dA + \sigma_T \int_{A_1} z dA - \sigma_T \int_{A_2} z dA. \quad (5.25)$$

Prvi integral na desnoj strani jednak je momentu tromosti elastične jezgre. Drugi i treći integral jednaki su statičkom momentu plastificiranih područja, tj.

$$I_{y,e} = \int_A z^2 dA, \quad S_{y1} = -S_{y2} = \int_{A_1} z dA. \quad (5.26)$$



Slika 5.9 Elasto-plastično stanje štapa:

a) elastična jezgra i dva plastificirana područja, b) elastično stanje, c) maksimalna naprezanja u elastičnom stanju, d) raspodjela naprezanja u elasto-plastičnom stanju, e) raspodjela naprezanja u graničnom stanju [4]

Ako se uzme u obzir da je $I_{y,e}/h_e = W_{y,e}$, moment otpora elastične jezgre, može se (5.26) napisati u obliku

$$M_{y,pl} = \sigma_T (W_{y,e} + 2S_{y1}). \quad (5.27)$$

Granično stanje. Kako moment savijanja raste, rastu plastificirana područja, dok se elastična jezgra smanjuje. Kad se čitav presjek plastificira, nije moguće daljnje povećanje momenta savijanja, tj. $M_{y,pl}$ dostiže graničnu vrijednost $M_{y,gr}$ koja je dana izrazom

$$M_{y,gr} = 2\sigma_T S_y, \quad (5.28)$$

gdje je S_y statički moment jedne polovine poprečnog presjeka oko osi y , tj. neutralne osi. U tom trenutku raspodjela naprezanja izgleda kao na slici 5.9e. Izraz (5.28) se može napisati u obliku

$$M_{y,gr} = \sigma_T W_{y,pl}, \quad (5.29)$$

gdje je

$$W_{y,pl} = 2S_y, \quad (5.30)$$

Osni plastični moment otpora. Izraz (5.29) omogućuje da se odredi $W_{y,pl}$ kad je poznata visina elastične jezgre $h_e = 2z_e$. Naime $W_{y,e}$ i $S_{y,1}$ sadrže u sebi implicitno veličinu z_e kao nepoznanicu. Sve su ostale veličine poznate. Pomoću toga istog izraza se može odrediti z_e kad je poznat moment savijanja $W_{y,pl}$. *Faktor povećanja nosivosti* u plastičnom području k_f iznosi

$$k_f = \frac{M_{y,gr}}{M_{y,T}} = \frac{\sigma_T W_{y,pl}}{\sigma_T W_y}, \quad (5.31)$$

odnosno

$$k_f = \frac{W_{y,pl}}{W_y}. \quad (5.32)$$

Indeks f odnosi se na riječ fleksija, tj. savijanje.

Kad se radi o pravokutnom poprečnom presjeku prema slici 5.10a vrijedi

$$W_{y,e} = \frac{b(2z_e)^2}{6} = \frac{2}{3}bz_e^2,$$

$$S_{y,1} = b\left(\frac{h}{2} - z_e\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z_e\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z_e^2\right).$$

Ako se te vrijednosti uvrste u (5.29), dobit će se

$$M_{y,pl} = \sigma_T \frac{bh^2}{6} \left[\frac{3}{2} - 2\left(\frac{z_e}{h}\right)^2 \right] = \sigma_T \frac{bh^2}{4} \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2z_e}{h}\right)^2 \right], \quad (5.33)$$

odnosno

$$M_{y,pl} = M_{t,T} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2z_e}{h}\right)^2 \right] = M_{y,gr} \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2z_e}{h}\right)^2 \right]. \quad (5.34)$$

Budući da je prema (5.19) $\varepsilon_T = z_e / \rho$ i $\varepsilon_{\max} = h / (2\rho)$, bit će $2z_e / h = \varepsilon_T / \varepsilon_{\max}$. S druge strane ako se označi s $\kappa_T = 1 / \rho_T$ onu zakrivljenost pri kojoj nastaju prve plastične deformacije, bit će $\kappa_T : \kappa = \rho : \rho_T = \varepsilon_T : \varepsilon_{\max}$ pa (5.34) prelazi u

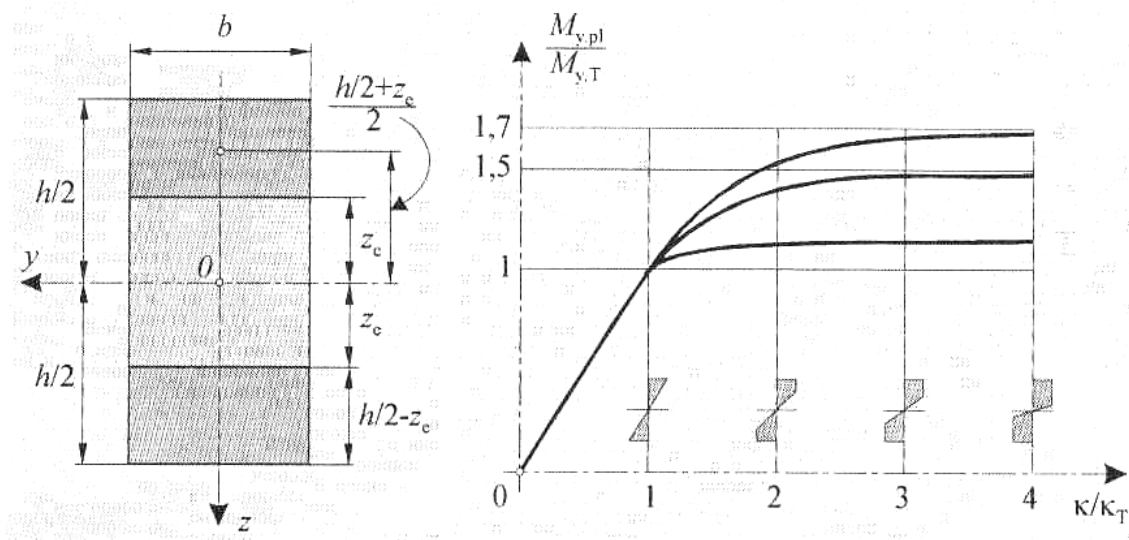
$$\frac{M_{y,pl}}{M_{y,T}} = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_T}{\kappa} \right)^2 \right] \quad \text{za } \kappa > \kappa_T. \quad (5.35)$$

Ako je $\kappa < \kappa_T$, moment savijanja dan je izrazom

$$M_y = \frac{EI_y}{\rho} = \kappa EI_y = \frac{\kappa}{\kappa_T} (\kappa_T EI_y). \quad (5.36)$$

Budući da je $\kappa_T EI_y = M_{y,T}$, bit će

$$\frac{M_y}{M_{y,T}} = \frac{\kappa}{\kappa_T} \quad \text{za } \kappa \leq \kappa_T. \quad (5.37)$$



Slika 5.10 Ovisnost momenta savijanja o zakrivljenosti štapa:

a) djelomično plastificiran poprečni presjek, b) dijagram ovisnosti momenta savijanja o zakrivljenosti u bezdimenzijskom obliku [4]

Ovisnost bezdimenzijskog momenta savijanja $M_y / M_{y,pl}$ u ovisnosti o omjeru zakrivljenosti κ / κ_T izračunata je pomoću (5.37) i (5.36) i prikazana srednjom krivuljom na slici 5.9. Ta se krivulja odnosi na pravokutni poprečni presjek. Na istoj slici prikazane su slične krivulje za kružni poprečni presjek i za tankostjeni presjek I. U elastičnom području ($\kappa < \kappa_T$) sve tri krivulje međusobno se podudaraju i prelaze u pravac. Kad κ / κ_T teži u beskonačnost, omjer $M_y / M_{y,gr}$ teži asimptotski jedinici [4].

6 GRANIČNO KONSTRUIRANJE

6.1 Granična analiza konstrukcija

Pri dimenzioniranju konstrukcija i njihovih dijelova koristili smo se do sada pojmom dopuštenog naprezanja i faktora sigurnosti. U slučaju duktilnih materijala dopušteno naprezanje definirano je izrazom [7]

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_T}{S} \quad (6.1)$$

gdje je S faktor sigurnosti. Dimenzioniranje prema dopuštenom naprezanju provodi se tako da se odredi maksimalno naprezanje σ_{\max} , odnosno maksimalno ekvivalentno naprezanje $\sigma_{\text{ekv,max}}$ kad se radi o dvoosnom ili troosnom naprezanju. Uvjet čvrstoće tada glasi

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dop}} \quad \sigma_{\text{ekv,max}} \leq \sigma_{\text{dop}} \quad (6.2)$$

Prema tom načinu prešutno se smatra da konstrukcija gubi svoju funkciju (čvrstoću, krutost) pri pojavi prve plastične deformacije. No nije tako.

Konstrukcija ne gubi svoju nosivost nakon pojave prvih plastičnih deformacija, tj. kad opterećenje dostigne vrijednost opterećenja tečenja F_T . Konstrukcija iscrpi svoju nosivost tek kad opterećenje dostigne graničnu vrijednost $F = F_{\text{gr}}$. Prema tome, primjerenije je dimenzionirati konstrukciju prema graničnom opterećenju F_{gr} . Pri tome se uvodi pojam *faktora opterećenja*

$$\lambda = \frac{F_{\text{gr}}}{F_{\text{dop}}} = \text{granično opterećenje} / \text{dopušteno opterećenje}. \quad (6.3)$$

Faktor opterećenja λ ima slično značenje kao faktor sigurnosti pri dimenzioniranju prema dopuštenom naprezanju. Kad se radi o statički određenim konstrukcijama, faktor sigurnosti i faktor opterećenja povezani su izrazom

$$\lambda = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{dop}}} k = Sk \quad (6.4)$$

gdje je k faktor povećanja nosivosti. Kod uvijanja okruglog štapa faktor oblika $k_t = 4/3 = 1,333$.

Pri savijanju štapa pravokutnog poprečnog presjeka je $k_f = 3/2 = 1,5$.

Za ostale oblike faktori se mogu naći u tablicama. Faktori (dopuštenog) opterećenja po pravilu su isti ili neznatno veći od faktora sigurnosti pa proračun prema graničnom opterećenju daje lakše i ekonomičnije konstrukcije. Osim toga je proračun prema graničnom opterećenju znatno lakši od proračuna prema dopuštenom naprezanju pa je njegova primjena tim opravdanija. To se posebno odnosi na jednostavnije konstrukcije.

Najveća učinkovitost proračuna prema dopuštenom opterećenju nastaje u statički neodređenim konstrukcijama u kojima tijekom plastičnog deformiranja nastaje preraspodjela sila i momenata. Nakon primjene faktora opterećenja je vrlo često

$$F_{\text{dop}} < F_T.$$

To znači da se u redovitoj upotrebi neće u konstrukciji pojaviti plastične deformacije iako je proračun proveden u plastičnom području.

Prilikom primjene postupka *granične analize* treba imati na umu da se analiza uvijek odnosi na *idealizirane*, a ne *realne konstrukcije*. Idealizirana konstrukcija ima ova svojstva:

1. materijal konstrukcije je idealnoplastičan, tj. nema očvršćenja materijala tijekom deformiranja;
2. promjena geometrije konstrukcije do prijelaza u granično stanje zanemarivo je mala.

Ova druga pretpostavka omogućuje primjenu principa virtualnih radova u analizi konstrukcija. Danas se u graničnoj analizi rabe tri pristupa:

1. pristup krutog plastičnog zgloba (rigid plastic hinge)
2. pristup elastoplastičnog zgloba (elasto plastic hinge)
3. pristup analize širenja plastičnih područja.

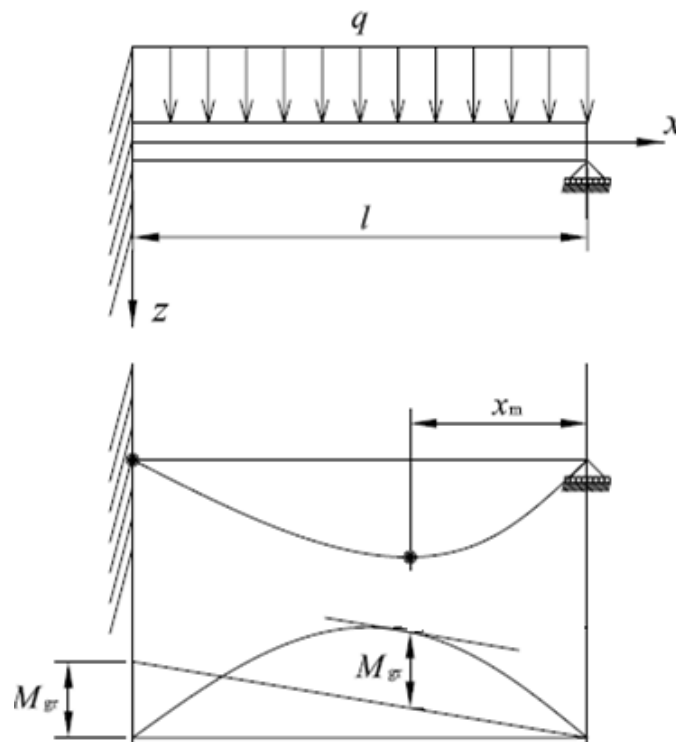
Pristup *krutog plastičnog zgloba* najjednostavniji je i danas najrašireniji u primjeni. U tom pristupu zanemaruje se elastično deformiranje. Do pojave mehanizma konstrukcija se smatra krutom. Smatra se da plastični zglob ima nultu duljinu. Pristup *elastoplastičnog zgloba* u suštini je isti kao i pristup krutog zgloba. Razlika je u tome što se razmatra elastično deformiranje između plastičnih zglobova. Treći pristup uzima u obzir tijek širenja plastičnih područja. Očito je takva analiza najsloženija. Istraživanja pokazuju da drugi pristup daje gotovo iste rezultate kao i znatno složeniji treći pristup. Drugi i treći pristup još su u razvoju.

Iako se stvarno opterećenje *plastičnog sloma* realnih konstrukcija razlikuje od graničnog opterećenja idealiziranih konstrukcija, ta se razlika u većini slučajeva može zanemariti.

Graničnom analizom izbjegava se mukotrpan inkrementalno-iterativni postupak koji se inače primjenjuje u redovitoj numeričkoj analizi. U primjeni metode konačnih elemenata nastaju poteškoće kad se pojedina područja plastifikacije počnu međusobno spajati i kad se opterećenje približava graničnom opterećenju. Graničnu analizu znatno olakšava primjena principa virtualnih radova, odnosno *statičkog* i *kinematičkoga* poučka. Ti poučki daju donje i gornje ograničenje graničnog opterećenja. Ako se rješenja koja su dobivena pomoću tih dvaju poučka podudaraju, riječ je o egzaktnom rješenju koje vrijedi za idealiziranu konstrukciju [4].

6.2 Granična i maksimalna vrijednost kontinuiranog opterećenja

Da bi nastao plastični slom, moraju se pojaviti dva plastična zgloba. Na temelju izgleda momenata savijanja procjenjuje se da će jedan plastičan zglob nastati na mjestu uklještenja, a drugi negdje na sredini nosača, tj. na udaljenosti x_m od desnog oslonca.



Slika 6.1 Momentni dijagram u graničnom stanju

Prvo će nastati plastični zglob u uklještenju, a potom na udaljenosti $x_m = 2,25$ m .

Statički uvjet ravnoteže nosača glasi

$$M_y = -F_B \cdot x + q \frac{x^2}{2}, \quad \Rightarrow x \text{ se kreće od oslonca ka uklještenju.} \quad (6.5)$$

Moment tečenja $M_{y,T}$, prema (5.21), iznosi

$$M_{y,T} = \sigma_T W_y, \quad (a)$$

gdje je moment otpora W_y

$$W_y = \frac{bh^2}{6} \quad (b)$$

Kada se izraz (b) uvrsti u (a), moment tečenja $M_{y,T}$ iznosi

$$M_{y,T} = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = 400 \cdot \frac{30 \cdot 60^2}{6} = 7,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (c)$$

Do prve pojave tečenja materijala će doći onda kada moment savijanja M_y dostigne vrijednost momenta tečenja $M_{y,T}$. To će se najprije dogoditi u uklještenju. Kontinuirano opterećenje q_T pri kojem dolazi do početka tečenja, prema (6.5), iznosi

$$M_{y,T} = -F_B \cdot x + q_T \frac{x^2}{2}$$

$$7,2 = -2,25 \cdot 6 + q_T \frac{6^2}{2} \Rightarrow q_T = \frac{20,7}{18} = 1,15 \text{ kN/m.}$$

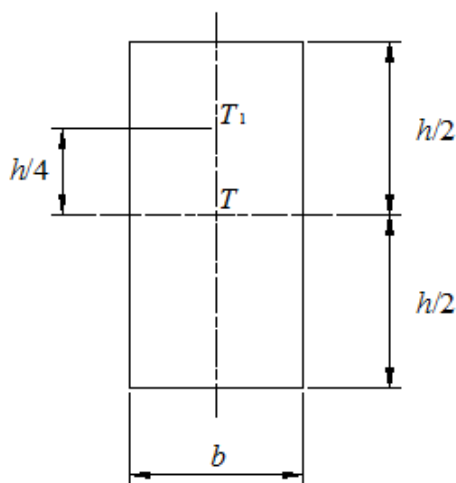
Kako bi se odredilo granično kontinuirano opterećenje q_{gr} potrebno je prije izračunati granični moment $M_{y,gr}$ koji za pravokutnik prema izrazu (5.29) glasi

$$M_{y,gr} = \sigma_T W_{y,pl}, \quad (f)$$

pri čemu je plastični moment otpora $W_{y,pl}$

$$W_{y,pl} = 2S_y. \quad (g)$$

Gdje je S_y statički moment površine poprečnog presjeka oko neutralne osi y .



Slika 6.2 Poprečni presjek pravokutnika

Za pravokutni poprečni presjek, prema slici 6.2, statički moment površine je

$$S_y = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}. \quad (\text{h})$$

Kada se izraz (h) uvrsti u izraz (g) pa u (f) granični moment $M_{y,\text{gr}}$ iznosi

$$M_{y,\text{gr}} = \sigma_T \cdot \frac{bh^2}{4} = 400 \cdot \frac{30 \cdot 60^2}{4} = 10,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Konačno, granično kontinuirano opterećenje q_{gr} , prema (6.5), iznosi

$$M_{y,\text{gr}} = -F_B \cdot x + q_{\text{gr}} \frac{x^2}{2}$$
$$10,8 = -2,25 \cdot 2,25 + q_{\text{gr}} \frac{2,25^2}{2} \Rightarrow q_{\text{gr}} = \frac{15,8625}{2,53125} = 6,23 \text{ kN/m.}$$

Faktor povećanja nosivosti u plastičnom području k_f iznosi

$$k_f = \frac{M_{y,\text{gr}}}{M_{y,T}} = \frac{10,8}{7,2} = 1,5.$$

7 USPOREDBA I ANALIZA RJEŠENJA

Ovdje će se usporediti normalno naprezanje u smjeru osi x dobiveno numeričkim i analitičkim proračunom. Analitički proračun se temelji na teoriji elastičnosti i nauci o čvrstoći. Usporediti će se vrijednosti naprezanja σ_x na udaljenosti $x=3$ mm od uklještenja i oslonca, te na sredini ($x=3000$ mm) konzolnog nosača.

Tablica 7.1 Raspodjela normalnog naprezanja σ_x

h [mm]	σ_x uz uklještenje nosača			σ_x uz oslonac nosača			σ_x na sredini nosača		
	MKE	TE	NOČ	MKE	TE	NOČ	MKE	TE	NOČ
-30	255,03	249,49	249,37	-0,332	-0,381	-0,375	-124,55	-125,01	-125
-25	213,71	207,92	207,81	-0,239	-0,314	-0,312	-103,79	-104,17	-104,17
-20	169,72	166,33	166,25	-0,197	-0,248	-0,249	-83,03	-83,33	-83,33
-15	125,74	124,75	124,69	-0,155	-0,184	-0,187	-62,26	-62,49	-62,5
-10	81,76	83,17	83,12	-0,112	-0,122	-0,125	-41,50	-41,66	-41,67
-5	37,77	41,58	41,56	-0,07	-0,061	-0,062	-20,74	-20,83	-20,83
0	-6,21	0	0	-0,028	0	0	0,023	0	0
5	-49,79	-41,58	-41,56	0,014	0,061	0,062	20,79	20,83	20,83
10	-93,63	-83,17	-83,12	0,058	0,122	0,125	41,55	41,66	41,67
15	-137,48	-124,75	-124,69	0,101	0,184	0,187	62,31	62,49	62,5
20	-181,31	-166,34	-166,25	0,145	0,248	0,249	83,08	83,33	83,33
25	-225,16	-207,92	-207,81	0,189	0,314	0,312	103,84	104,17	104,17
30	-269,01	-249,49	-249,37	0,232	0,381	0,375	124,81	125,01	125

U tablici 7.1 su prikazane vrijednosti normalnog naprezanja σ_x izračunate analitičkim proračunom i numeričkim proračunom. Analitički proračun se odnosi na izračunavanje normalnog naprezanja prema teoriji čvrstoće i prema teoriji elastičnosti. Numerički proračun je izvršen pomoću metode konačnih elemenata u računalnom programu *Ansys Workbench 12*. Iz rezultata u tablici se može vidjeti i zaključiti da se utjecaj reakcija veza (uklještenje i oslonac) već na udaljenosti od $x=3$ mm gubi. Što znači da je kubna parabola, koja opisuje raspodjelu naprezanja prema teoriji čvrstoće, jako blizu pravcu. Prema teoriji čvrstoće naprezanja po visini konzolnog nosača h su raspoređena po zakonu pravca.

8 ZAKLJUČAK

U ovom radu je bilo potrebno izračunati reakcije veza, elastičnu liniju te raspodjelu naprezanja i deformacija u svim točkama konzolnog nosača. Također, skicirati i kotirati sve dijagrame unutrašnjih sila, naprezanja i deformacija. Analitičko rješenje se temelji na teoriji elastičnosti i teoriji plastičnosti. Za numeričko proračunavanje korišten je računalni program *Ansys Workbench 12* koji se zasniva na metodi konačnih elemenata.

Prvenstveni cilj ovog rada je bio pretpostaviti Airyjevu funkciju naprezanja oblika $\phi = \phi(x, z)$ koja zadovoljava biharmonijsku diferencijalnu jednadžbu. Ta funkcija opisuje raspodjelu naprezanja uzduž konzolnog nosača po visini nosača. Iznalaženje ove funkcije je mukotrpan posao i nikako ju nismo mogli odrediti za konkretan slučaj. Konzolni nosač je dovoljno dugačak, što znači da lijevi dio ne utječe na desni u smislu raspodjele naprezanja uz uklještenje, odnosno oslonca. Tu vrijedi St. Venantov princip ili princip lokalnosti djelovanja samouravnoteženog opterećenja koji glasi: "Ako na malom dijelu tijela djeluju međusobno uravnotežene sile, one izazivaju samo lokalna naprezanja u neposrednoj blizini djelovanja sila i vrlo brzo opadaju s udaljenošću od mjesta opterećenja".

Stoga se konzolni nosač razmatrao kao dva zasebna zadatka. U prvom slučaju se razmatrao kao konzola, a u drugom kao greda na dva oslonca. Da bi se odredila raspodjela naprezanja konzolnog nosača uz uklještenje bilo je potrebno odabrati konzolu koja ima iste reakcije veze kao konzolni nosač. Zatim se isto napravilo s gredom na dva oslonca, izabrala se greda takve duljine da ima istu reakciju veze kao konzolni nosač.

Iz knjige [3] smo preuzeli Airyjevu funkciju naprezanja za konzolu opterećenu kontinuiranim opterećenjem pomoću koje smo izračunali naprezanje uz uklještenje. Pri tome smo izračunali duljinu l_k konzole pri kojoj su njene reakcije bile jednake reakcijama našeg konzolnog nosača. Na sličan način smo odredili raspodjelu naprezanja uz oslonac preuzevši Airyjevu funkciju naprezanja za gredu na dva oslonca opterećenu kontinuiranim opterećenjem.

Prema teoriji plastičnosti, metodom graničnog konstruiranja smo odredili vrijednost kontinuiranog opterećenja $q_T = 1,15 \text{ kN/m}$ pri kojem dolazi do prve pojave tečenja materijala. Zatim, granično kontinuirano opterećenje $q_{gr} = 6,23 \text{ kN/m}$ što je oko 6 puta veće od zadanog kontinuiranog opterećenja $q = 1 \text{ kN/m}$. Konstrukcija ne gubi svoju nosivost nakon pojave prvih plastičnih deformacija, tj. kad opterećenje dostigne vrijednost opterećenja tečenja q_T . Konstrukcija iscrpi svoju nosivost tek kad opterećenje dostigne graničnu vrijednost $q = q_{gr}$. Prema tome, primjerenije je dimenzionirati konstrukciju prema graničnom opterećenju q_{gr} .

9 LITERATURA

- [1] Matejiček, Franjo: *Uvod u statiku sa zbirkom zadataka*, Zagreb, Golden marketing – Tehnička knjiga, 2005, str. 279.
- [2] Alfirević, I.: *Nauka o čvrstoći I.*, Zagreb, ITP – Tehnička knjiga, 1995, str. 318.
- [3] Alfirević, I.: *Linearna analiza konstrukcija*, Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2003, str. 409.
- [4] Ivo Alfirević: *Mehanika elastoplastičnih tijela*, FSB Zagreb
- [5] Josip Brnić: *Elastomehanika i plastomehanika*, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet Rijeka, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [6] Ivo Alfirević: *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Zagreb, Golden marketing, 2003
- [7] Brnić, Josip, Turkalj, Goran: *Nauka o čvrstoći I*, Rijeka, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2004, 545.
- [8] Alfirević, I.: *Nauka o čvrstoći II.*, Zagreb, Golden marketing, 1999, str. 279.
- [9] Brnić, Josip, Turkalj, Goran: *Nauka o čvrstoći II*, Rijeka, Zigo, 2006, str. 661.
- [10] Sorić, Jurica: *Metoda konačnih elemenata*, Zagreb, Golden marketing – Tehnička knjiga, 2004, str. 442.