

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bojan Crnković

Poopćenje težinskih esencijalno neoscilirajućih
aproksimacija s primjenama

DOKTORSKA DISERTACIJA

Voditelji: prof. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic
prof. dr. sc. Mladen Rogina

Zagreb, 2012.

PREDGOVOR

Ova disertacija je posljedica istraživačkog rada na više znanstvenih i gospodarskih projekata prof. dr. sc. Luke Sopte kome iskreno zahvaljujem na pomoći i svim pruženim prilikama. Posebno se zahvaljujem voditeljima prof. dr. sc. Nelidi Črnjarić-Žic i prof. dr. sc. Mladenu Rogini na brizi, podršci, nesebičnoj pomoći te svemu čemu su me naučili.

Zahvaljujem članovima Seminara za diferencijalne jednačbe i numeričku analizu i Seminara za numeričku matematiku i računarstvo na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu na korisnim komentarima i pitanjima. Hvala mojim kolegama, članovima Katedre za primijenjenu matematiku i članovima Zavoda za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo te Branki Milotić na svakodnevnoj pomoći, inspiraciji i korisnim savjetima.

Veliko hvala i supruzi Vedrani na strpljenju, podršci i pomoći.

SADRŽAJ

1	Uvod	1
2	Zakoni očuvanja	3
2.1	Linearna advekcija	4
2.2	Linearni sustavi	5
2.3	Nelinearni skalarni zakoni očuvanja	7
2.3.1	Burgersova jednadžba	7
2.3.2	Karakteristike	8
2.4	Slaba rješenja	9
2.5	Entropijska rješenja	14
2.6	Riemannov problem	17
2.6.1	Valovi razrjeđenja	18
2.6.2	Riemannove invarijante	19
2.6.3	Šok valovi	21
2.6.4	Kontaktne diskontinuiteti	22
2.6.5	Rješenje općeg Riemannova problema	24
2.7	Eulerove jednadžbe	25
2.8	Jednadžbe za plitke vode	26
3	Zakoni ravnoteže	29
3.1	Riemannov problem za zakone ravnoteže	31
3.2	Jednadžbe za plitke vode s neravnim dnom kanala	32
3.3	Jednadžbe za otvorene vodotoke	34
4	Standardni WENO pristup	37
4.1	Metoda konačnih volumena	37
4.1.1	Roeva linearizacija i aproksimacija fluksa	39
4.2	WENO rekonstrukcija	42
4.2.1	Idealni težinski faktori	44
4.2.2	Težinska neoscilirajuća rekonstrukcija	45
4.2.3	Indikatori glatkoće	47
4.2.4	Implementacija WENO rekonstrukcije	47
4.3	Vremenska integracija	48

4.3.1	Eksplisitne SSP metode	50
4.3.2	SDIRK	51
4.3.3	Semiimplicitna metoda prvog reda točnosti	52
5	Semiimplicitne WENO metode	53
5.1	Metoda prvog reda točnosti	54
5.2	Primjena semiimplicitnih metoda	57
5.2.1	Balansirana semiimplicitna metoda za otvorene vodotoke	57
5.2.2	Efikasna implementacija modela za otvorene vodotoke	59
5.3	Visoki red točnosti	61
5.3.1	Vremenska diskretizacija	62
5.4	Numerički testovi	64
5.4.1	Pucanje brane	65
5.4.2	Višestruko pucanje brane	65
5.4.3	Nestacionarno strujanje u kanalu promjenljive širine	70
5.4.4	Stacionarno strujanje preko izbočine	72
5.4.5	Stacionarni transkritični tok s hidrauličkim skokom	78
5.4.6	Stacionarni transkritični tok s hidrauličkim skokom na trapeznom kanalu	80
5.4.7	Kanal s izrazito nepravilnom geometrijom	82
5.4.8	Prirodni vodotok rijeke Kupe	85
5.4.9	Testiranje reda točnosti	87
5.4.10	Mach 3 test	90
6	Novi WENO algoritam	93
6.1	Interpolacija	93
6.1.1	Standardna WENO interpolacija	93
6.1.2	BWENO interpolacija	95
6.2	Testovi i primjeri interpolacije	102
6.2.1	Red točnosti	103
6.2.2	Primjeri interpolacije	109
6.3	Rekonstrukcija	111
6.3.1	Modificirana WENO rekonstrukcija	111
6.3.2	BWENO rekonstrukcija	114
6.4	Testovi i primjeri rekonstrukcije	115
6.4.1	Red točnosti	115
6.4.2	Primjeri rekonstrukcije	117
6.4.3	Shuov test za linearnu advekciju	118
6.4.4	Red točnosti za linearnu advekciju	122
6.4.5	Interakcija šokova za Burgersovu jedandžbu	123

Literatura	129
Popis tablica	135
Popis slika	137
Sažetak	139
Summary	141
Životopis	143

1 UVOD

Za numeričko rješavanje hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u posljednjih dvadeset godina intenzivno se koriste WENO (*weighted essentially nonoscillatory*) metode, bazirane na težinskoj esencijalno neoscilirajućoj rekonstrukciji funkcije. Neoscilirajuća rekonstrukcija koristi se za aproksimaciju prostornog operatora parcijalne diferencijalne jednadžbe dok se za vremensku integraciju koriste Runge–Kutta metode.

WENO metode primjenjuju se kod simuliranja gibanja fluida, širenja seizmičkih valova, obradi medicinskih snimaka magnetske rezonancije, uklanjanje šumova kod obrade slike, kontrola fotolitografije kod izrade silikonskih čipova itd. Začetak neoscilirajućih rekonstrukcija pri numeričkoj aproksimaciji hiperboličkih zakona očuvanja utemeljen je konstrukcijom ENO (*essentially nonoscillatory*) metode početkom devedesetih godina prošlog stoljeća. Na temelju tog algoritma Liu, Osher i Chan [46] razvili su WENO metode bazirane na konačnim razlikama. 1996. godine su uvedene WENO metode za konačne volumene [38] te centralne WENO metode [50]. Algoritmi WENO shema detaljno su izloženi u radu [52].

Sve navedene inačice WENO shema bazirane su na algoritmu za težinsku aproksimaciju funkcije na temelju poznatih diskretnih vrijednosti funkcije ili na temelju prosječnih vrijednosti u ćelijama. Ključna je činjenica da su tako dobivene metode neoscilirajuće i pružaju ostru rezoluciju u blizini diskontinuiteta te visoki red točnosti u dijelovima domene u kojima je rješenje dovoljno glatko. Algoritam WENO rekonstrukcije se mijenjao vrlo malo u posljednjih desetak godina. Uglavnom su napravljena poboljšanja algoritma u nekim posebnim slučajevima kao u [5, 36]. U ovoj disertaciji je izložen novi algoritam koji zadržava dobra svojstva postojećih algoritama WENO rekonstrukcije te povećati stabilnost numeričke metode.

Budući da su WENO metode izvorno razvijene za hiperboličke zakone očuvanja, algoritam je u nizu radova [17, 65, 58] proširen za njihovu upotrebu pri numeričkoj aproksimaciji hiperboličkih zakona ravnoteže. Ta proširenja su zasnovana na ideji balansiranja gradijenta numeričkog fluksa i izvornog člana [2].

Dosadašnje WENO metode za rješavanje hiperboličkih jednadžbi uglavnom su se koristile zajedno s eksplicitnim Runge–Kutta metodama za vre-

mensku diskretizaciju. Te su metode brze, pouzdane i točne, ali za razliku od implicitnih metoda imaju bitno veća ograničenja na vremenski korak. Implicitne numeričke metode konačnih razlika i konačnih volumena prvog i drugog reda točnosti uspješno su primijenili Harten u [33] i Yee u [61], ali prvenstveno pri rješavanju stacionarnih ili kvazistacionarnih problema [62]. Temeljeno na njihovim idejama, i radovima [1, 33, 63] u radu [12] razvijene su semiimplicitne metode za hiperboličke zakone ravnoteže. Metode su vrlo uspješno primijenjene na izrazito nestacionarnim problemima i s velikim vremenskim korakom. Sličan pristup je korišten je u radovima [8, 9].

Kraaijevanger je 1991. godine povezo teoriju polugrupa operatora i Runge–Kutta metoda. Ta veza je rezultirala nizom radova poput [41] u kojima su izložene optimalne jako stabilne, tj. SSP (*strong stability preserving*), eksplisitne i implicitne Runge–Kutta metode.

U radu [29] korištene su SSP implicitne Runge–Kutta metode zajedno s WENO metodama konačnih razlika za hiperboličke zakone očuvanja. Međutim, usprkos nekim dobrim svojstvima, pokazalo se da je stabilnost takve metode očuvana samo za male vremenske korake.

U ovom radu su istražene težinske esencijalno neoscilirajuće interpolacije i rekonstrukcije te je poopćen algoritam kako bi povećala fleksibilnost algoritma i točnost aproksimacije. Pritom su očuvana sva bitna svojstva originalnih WENO interpolacija [11]. Novi algoritam koristi se kao dio WENO rekonstrukcije funkcija koje se pojavljuju u prostornom operatoru pri numeričkom rješavanju hiperboličkih zakona ravnoteže.

Također, opisane su nove WENO metode za rješavanje zakona ravnoteže koje se koriste zajedno s implicitnim SSP Runge–Kutta metodama za obične diferencijalne jednadžbe [12, 14, 15]. Nove implicitne WENO metode mogu se koristiti s visokim CFL brojevima. U ovoj disertaciji istražuje se utjecaj novog WENO algoritma u eksplicitnim i predloženim implicitnim numeričkim metodama, a testirat će se na zanimljivim primjerima iz mehanike fluida.

2 ZAKONI OČUVANJA

Hiperboličkim sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi opisuju se fizikalne pojave poput gibanja fluida, transporta tvari i vibracija tijela. U ovom poglavlju bavit ćemo se posebnom klasom hiperboličkih sustava, odnosno zakonima očuvanja u jednoj prostornoj dimenziji.

Mnogi problemi iz fizike opisuju se nelinearnim zakonima očuvanja koji prate promjenu očuvane varijable \mathbf{u} .

Jednodimenzijski zakon očuvanja može se zapisati u općem diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

gdje je $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija koju zovemo vektor stanja sustava, a diferencijabilna funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je fluks. Zakon očuvanja može se zapisati u nekonzervativnom obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ Jacobijeva matrica fluksa.

Definicija 2.1 *Sustav 2.1 je hiperbolički ako Jacobijeva matrica:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}}$$

ima n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda^{(p)}(\mathbf{u})$, $p = 1, \dots, n$ i n pripadnih linearno nezavisnih lijevih i desnih svojstvenih vektora $\mathbf{l}^{(p)}(\mathbf{u})$, $\mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u})$, $p = 1, \dots, n$. Ukoliko su svojstvene vrijednosti različite, sustav je strogo hiperbolički.

Osim diferencijalne formulacije (2.1), može se promatrati integralna forma zakona očuvanja koja proizlazi iz osnovnih fizikalnih principa:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u} \, dx = \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Svaka komponenta očuvane varijable \mathbf{u} mjeri gustoću ili ukupnu količinu neke očuvane fizikalne veličine između dviju točaka s koordinatama x_1 i x_2 . Iz

jednadžbe 2.3 je vidljivo da se očuvane varijable mogu promijeniti samo zbog fluksa, odnosno protoka u spomenutim točkama. Nužno je napomenuti da diferencijalna forma (2.1) i integralna (2.3) nisu ekvivalentne tj. integralna forma ima smisla na znatno široj klasi funkcija.

Kod zakona očuvanja često se promatra Cauchyjev problem s početnim uvjetom zadanim u trenutku $t_0 = 0$, tj. tražimo rješenje $\mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ koje zadovoljava i početni uvjet:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Definicija 2.2 *Neka je početni uvjet $\mathbf{u}_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Funkcija $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je klasično rješenje Cauchyjeva problema (2.1), (2.4) ako je klase $C^1(\mathbb{R})$, $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$ te zadovoljava jednadžbu (2.1) u svakoj točki domene.*

2.1 Linearna advekcija

Iz mehanike fluida dolazi jednostavan problem strujanja plina ili tekućine kroz jednodimenzijsku cijev. Ako pretpostavimo da je brzina strujanja fluida konstantna duž cijevi i zanemarimo trenje i kemijske procese, tada možemo koristiti jednostavan model:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx = c u(x_2, t) - c u(x_1, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

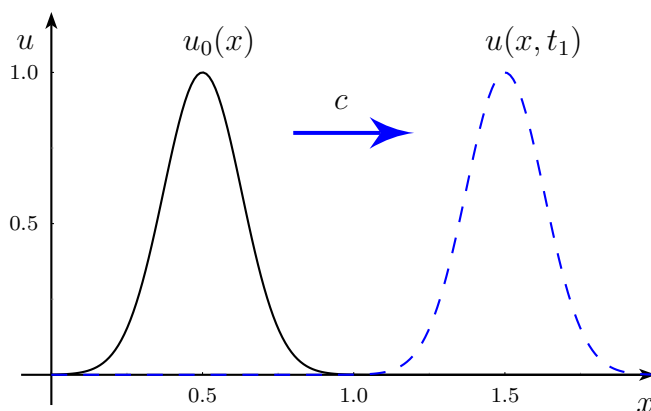
koji prati promjenu gustoće u neke tvari koja ovisi samo o protoku čestica brzinom c kroz dvije točke s koordinatama x_1 i x_2 . Ako je funkcija u dovoljno glatka, tada se zbog jednostavnosti rješenja koristi diferencijalna forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

gdje je u stanje, a fluks $f(u) = c u$. Jednadžba (2.5) predstavlja očuvanje mase ili količine varijable u i koristi za praćenje advekcije, tj. gibanja neke tvari prisutne u fluidu. Pritom je količina, odnosno koncentracija tvari u fluidu vrlo mala i ne utječe na gibanje fluida koji se kreće brzinom c . Ako ukupna gustoća u nije očuvana, tj. ne ovisi samo o protoku već postoje dodatni izvori te tvari, u jednadžbu moraju se dodati izvorni članovi.

Jednadžba (2.5) je hiperbolička skalarna, linearna s konstantnim koeficijentima, a njezino je opće rješenje oblika $u(x, t) = \tilde{u}(x - ct)$, gdje je $\tilde{u} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ glatka funkcija. Možemo zaključiti da je rješenje konstantno $u(x, t) = \tilde{u}(x_0)$ duž karakterističnih krivulja (*karakteristika*) $x(t) = x_0 + ct$ za $x_0 \in \mathbb{R}$. To proizlazi iz

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$



Slika 2.1: Glatki početni uvjet i rješenje (isprekidana crta) u trenutku t_1 .

Da bismo odredili partikularno rješenje moramo zadati početne uvjete i možda neke rubne.

Neka je zadan Cauchyjev problem, odnosno uz jednadžbu (2.5) neka je zadan početni uvjet (2.4). Rješenje ovoga problema možemo zapisati

$$u(x, t) = u_0(x - c t).$$

Iz oblika rješenja možemo zaključiti da se početno stanje $u_0(x)$ nepromjenjeno translata brzinom c kao na slici 2.1.

Promotrimo sada početni problem na domeni $x \in [a, b]$ ili $x \in [a, \infty)$ te $c > 0$. Da bi zadaća bila u potpunosti definirana potrebno je zadati rubni uvjet na lijevom kraju domene, odnosno $u(a, t) = g_a(t)$. Rubni uvjet zadajemo na lijevom kraju jer na tom rubu karakteristika ulazi u domenu. Također, kod klasičnog rješenja moramo paziti da su početni i rubni uvjet usklađeni $g_a(t_0) = u_0(a)$.

Zbog jednostavne strukture rješenja ova jednadžba se često koristi u numeričkim testovima.

2.2 Linearni sustavi

Poopćenje problema linearne advekcije jest linearni hiperbolički sustav koji ćemo zapisati u obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Budući da su postupak rješavanja i struktura rješenja jednaki za sve hiperboličke sustave, rješenje ćemo opisati na modelu linearne akustike. Širenje tlačnih poremećaja u jednodimenzijskoj cijevi modelira se nelinearnim sustavom jednadžbi. Zvučni valovi su u biti mali tlačni poremećaji koji se šire u

kompresibilnom fluidu te imaju gotovo infinitezimalni utjecaj na brzinu gibanja fluida i tlak. Zvučni valovi su većinom linearne pojave koje ne uključuju složene nelinearne efekte kao šok valove i valove razrjeđenja. Linearizacijom početnih nelinearnih jednadžbi oko nekog konstantnog pozadinskog stanja dobije se linearni model kojim se opisuje širenje zvučnih valova:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 & K_0 \\ \frac{1}{\rho_0} & v_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (2.6)$$

pri čemu je v_0 brzina i ρ_0 gustoća plina prije dolaska zvučnog vala, a K_0 je konstanta koja ovisi o ρ_0 . Vektor stanja \mathbf{u} prati promjenu tlaka i brzine, a vektor fluksa je

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} pv_0 + K_0v \\ \frac{p}{\rho_0} + v_0v \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Gotovo identične jednadžbe dobiju se prilikom izvoda modela kojim se opisuje širenje zvučnih valova u elastičnom tijelu u jednoj prostornoj dimenziji gdje je konstanta K_0 modul elastičnosti.

Iz Jacobijeve matrice fluksa (2.6) mogu se odrediti svojstvene vrijednosti i desni svojstveni vektori:

$$\lambda^{(1)} = v_0 - c, \quad \lambda^{(2)} = v_0 + c, \\ \mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\rho_0 c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 c \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ovdje je $c = \sqrt{K_0/\rho_0}$ brzina zvuka u promatranom kompresibilnom fluidu. Osim toga, zvučni valovi se šire brzinom $\pm c$ relativno u odnosu na brzinu fluida.

Svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su realne i različite iz čega zaključujemo da je sustav strogo hiperbolički. Jacobijeva matrica fluksa (2.7) može se dijagonalizirati, tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1}, \quad (2.8)$$

pri čemu je \mathbf{R} matrica desnih svojstvenih vektora, a $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti. Matrica \mathbf{R}^{-1} je konstantna pa se, supstitucijom $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$, sustav (2.6) svodi na sustav linearnih jednadžbi:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0.$$

Sada je moguće na jednostavan način riješiti jednadžbu (2.6) sa zadanim početnim uvjetom \mathbf{u}_0 . Rješenje je slično kao u slučaju linearne advekcije

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{pmatrix} w_0^{(1)}(x - \lambda^{(1)}t) \\ w_0^{(2)}(x - \lambda^{(2)}t) \end{pmatrix},$$

gdje je $\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_0$. Konačno rješenje u polaznim varijablama dobijemo supstitucijom:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{R} \mathbf{w}(x, t) = \sum_{p=1}^2 w^{(p)}(x, t) \mathbf{r}^{(p)}.$$

U slučaju linearne akustike razumno je pretpostaviti da će brzina gibanja fluida v_0 biti znatno manja od brzine zvuka c . Karakteristike će biti dvije familije paralelnih pravaca čiji su koeficijenti smjera suprotnih predznaka. Stoga će, u slučaju konačne domene $x \in [a, b]$, biti nužno zadati rubne uvjete na oba kraja domene budući da karakteristike ulaze u domenu s obje strane.

2.3 Nelinearni skalarni zakoni očuvanja

Nelinearne skalarne zakone očuvanja možemo zapisati u općem obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

2.3.1 Burgersova jednadžba

Standardni primjer skalarnog zakona očuvanja je neviskozna Burgersova jednadžba:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0. \quad (2.10)$$

Fluks $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ je jednostavna konveksna funkcija. Ovaj model nema važno značenje u primjenama, ali se radi o jednostavnoj hiperboličkoj skalarnoj jednadžbi koja je uvedena kao jednostavni nelinearni model na kojem se proučavaju ključna svojstva složenijih fizikalnih modela. Ako usporedimo kvazilinearni oblik jednadžbe (2.10):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

s modelom linearne advekcije (2.5), tada se može vidjeti da je Burgersova jednadžba strogo hiperbolička i da je rješenje $u(x, t)$ konstantno duž pravaca $x = x(t)$ dobivenih kao rješenje jednadžbe $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$:

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + u_x(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Za početni uvjet $u_0(x)$, rješenje Burgersove jednadžbe možemo zapisati implicitno:

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) t).$$

Naravno, trebalo bi utvrditi pod kojim uvjetima možemo riješiti postavljenu jednadžbu.

2.3.2 Karakteristike

Metodu karakteristika možemo koristiti i za općenitiji slučaj skalarne diferencijalne jednadžbe (2.9). Skalarna diferencijalna jednadžba u kvazilinearnoj formi glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

gdje je $\frac{df}{du} = \lambda(u)$ nagib karakteristike. Ako je $u(x, t)$ diferencijabilna funkcija i ima diferencijabilan početni uvjet $u_0(x)$, tada je $u(x, t)$ konstantna duž karakteristika $x = x(t)$ koje imaju karakterističnu brzinu $\frac{dx}{dt} = \lambda(u(x, t))$.

Lema 2.1 *Ako je $u_0(x)$ neprekidno diferencijabilna funkcija te je rješenje $u(x, t)$ inicijalnog problema (2.9) i (2.4) neprekidno diferencijabilna funkcija (po x i t), tada je rješenje $u(x, t)$ implicitno dano:*

$$u(x, t) = u_0(x - \lambda(u(x, t)) t). \quad (2.11)$$

Dokaz. Može se provjeriti da je (2.11) zbilja rješenje jednadžbe (2.9). Derivacije funkcije (2.11) su:

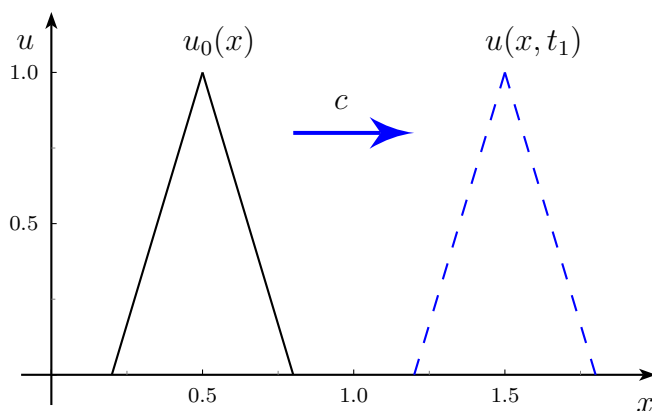
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{-\lambda u'_0}{1 + t u'_0 \frac{d\lambda}{du}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u'_0}{1 + t u'_0 \frac{d\lambda}{du}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Iz (2.12) je vidljivo da ako je u_0 diferencijabilna i $1 + t u'_0 \frac{d\lambda}{du} \neq 0$. Slijedi da je (2.11) rješenje jednadžbe (2.9).

□

Kada je fluks linearna funkcija kao u slučaju linearne advekcije (2.5), parcijalne derivacije su omeđene pod uvjetom da je početni uvjet dovoljno glatka funkcija. Na slici 2.1 vidjeli smo da se rješenje dobije jednostavnom translacijom početnog uvjeta brzinom c . Na slici 2.2 može se vidjeti početni uvjet koji nije \mathcal{C}^1 funkcija. U tom slučaju ne možemo govoriti o klasičnom rješenju po definiciji (2.2). Rješenje koje je prikazano isprekidanom linijom na slici 2.2 je dobiveno preko karakteristika translacijom početnog uvjeta. Rješenje je po dijelovima \mathcal{C}^1 i zadovoljava zakon očuvanja skoro svuda. Rješenje je jednoznačno određeno čak i u točkama u kojima se gubi glatkoća. Možemo naslutiti da je moguće razumno proširiti skup funkcija na kojem tražimo rješenja diferencijalne jednadžbe. Kada je fluks konveksna funkcija kao kod Burgersove jednadžbe (2.10), možemo promatrati dva zanimljiva slučaja.

Ako je početni uvjet rastuća omeđena funkcija, tada se iz (2.12) vidi da su parcijalne derivacije omeđene funkcije. Rješenje se može dobiti metodom



Slika 2.2: Rješenje za linearnu advekciju s početnim uvjetom koji nije gladak

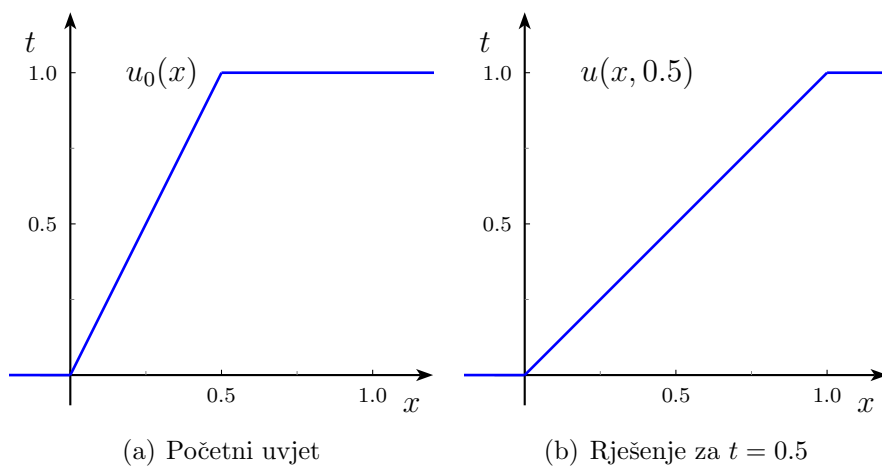
karakteristike u svim vremenskim trenucima kao na primjeru Burgersove jednadžbe na slici 2.3. I u ovom primjeru početni uvjet nije \mathcal{C}^1 pa ne možemo imati klasično rješenje, ali metoda karakteristika daje jedinstveno rješenje koje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu skoro svuda.

Ako je početni uvjet padajuća funkcija, tada je iz (2.12) vidljivo da se može dogoditi da parcijalne derivacije nisu omeđene. U tom slučaju mogu se stvoriti diskontinuiteti čak i ako je početni uvjet bio gladak. To je jasno vidljivo na slici 2.4. Nakon što se u rješenju pojavi diskontinuitet, više ne možemo govoriti o klasičnom rješenju (2.2). Nakon formiranja diskontinuiteta, metoda karakteristika više ne daje jednoznačan odgovor o rješenju diferencijalne jednadžbe jer u diskontinuitet ulaze dvije karakteristike koje možemo pratiti unatrag do dvije različite točke na početnom uvjetu. Stoga je nužno proširiti pojam rješenja parcijalne diferencijalne jednadžbe i opisati evoluciju rješenja nakon formiranja diskontinuiteta.

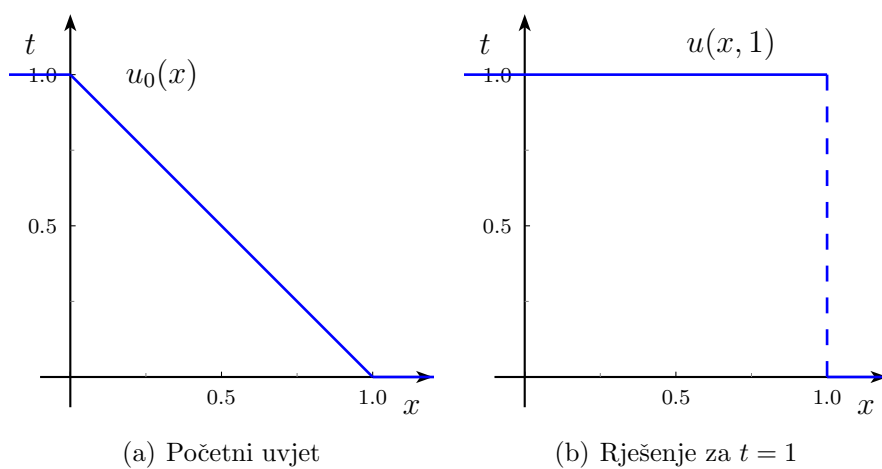
2.4 Slaba rješenja

S obzirom na prethodno opisane slučajeve i moguća rješenja, potrebno je proširiti pojam rješenja diferencijalnih jednadžbi hiperboličkog tipa. Trebalo bi na formalan način definirati rješenje diferencijalne jednadžbe koja ne uključuje samo $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ funkcije koje zadovoljavaju jednadžbu (2.1) po točkama. Da bismo to učinili moramo se vratiti integralnoj formi zakona očuvanja (2.3) koja ne uključuje prostorne derivacije u opisu rješenja. Rješenje \mathbf{u} ćemo tražiti u znatno širem skupu funkcija $(\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}))^n$, odnosno lokalno omeđenih izmjerljivih funkcija

$$\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathbf{L}^\infty(K), \forall K \subseteq \mathbb{R}, K \text{ kompaktan}\}.$$



Slika 2.3: Evolucija rješenja za Burgersovu jednadžbu



Slika 2.4: Evolucija rješenja za Burgersovu jednadžbu do stvaranja šoka.

Lijevu stranu zakona očuvanja (2.1) pomnožit ćemo funkcijom $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))^n$, odnosno dovoljno glatkom funkcijom s kompaktnim nosačem, integrirati na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ te primijeniti Greenov teorem:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} \right) \phi \, dx \, dt \\ & = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(x) \phi(x, 0) \, dx. \end{aligned}$$

Slijedi da svako klasično rješenje \mathbf{u} problema (2.1) i (2.4) zadovoljava integralnu jednakost:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(x) \phi(x, 0) \, dx = 0. \quad (2.13)$$

Sada proširimo pojam rješenja zakona očuvanja uvođenjem slabog rješenja.

Definicija 2.3 *Pretpostavimo da je početni uvjet $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. Funkcija $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ je slabo rješenje Cauchyjeva problema (2.1), (2.4) ako zadovoljava (2.13) za proizvoljnu test funkciju $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))^n$*

Iz ovakve definicije slabog rješenja slijedi da je klasično rješenje ujedno i slabo rješenje, odnosno, ako je $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1$, tada iz (2.13) i (2.1) parcijalnom integracijom dobijemo da je Cauchyjev problem (2.1) i (2.4) zadovoljen po točkama:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) \phi \, dx \, dt = 0, \\ & \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{u}(x, 0) - \mathbf{u}_0(x)) \phi(x, 0) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Ako odaberemo užu klasu test funkcija $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))^n$, tada je vidljivo da slabo rješenje zadovoljava (2.1) u smislu distribucija.

U ovom radu koncentrirat ćemo se na rješenja koja su po dijelovima \mathcal{C}^1 funkcije, tj. rješenja koja su po dijelovima klasična, s konačno mnogo izoliranih funkcijskih skokova. Označimo sa Γ glatku krivulju u (x, t) ravnini duž koje funkcija \mathbf{u} ima skok i normalu na Γ sa $\mathbf{n} = (n_t, n_x)$. Također, sa \mathbf{u}^- označimo lijevi, odnosno sa \mathbf{u}^+ desni limes funkcije \mathbf{u} u nekoj točki na krivulji Γ . U nastavku je teorem iz kojega slijedi da funkcijski skokovi duž krivulje Γ ne mogu biti proizvoljni već moraju zadovoljavati Rankine–Hugoniot uvjet skoka.

Teorem 2.1 *Neka je $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ po dijelovima \mathcal{C}^1 funkcija. \mathbf{u} je rješenje za (2.1) i (2.4) u smislu distribucija na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ onda i samo onda ako su zadovoljeni uvjeti:*

(a) \mathbf{u} je klasično rješenje za (2.1) na dijelu domene gdje je \mathbf{u} klase C^1 ;

(b) \mathbf{u} zadovoljava Rankine–Hugoniotov uvjet skoka

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) n_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}^+) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^-)) n_x = 0 \quad (2.14)$$

duž krivulje Γ , gdje je \mathbf{n} normala na Γ . Ako je $x = x(t)$ parametrizacija krivulje Γ , tada je $\mathbf{n} = (-c, 1)^T$, gdje je $c = \frac{dx}{dt}$ brzina gibanja šoka.

Dokaz nešto općenitijeg teorema može se naći u [23]. Primijetimo da je Rankine–Hugoniot uvjet skoka zadovoljen i u slučaju klasičnih rješenja, a kod slabih rješenja on stavlja ograničenja na veličinu i brzinu gibanja šoka.

Primjer 2.1 U slučaju skalarnih zakona očuvanja u jednoj dimenziji Rankine–Hugoniotov uvjet glasi

$$c(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-),$$

gdje je c brzina gibanja šoka. Posebno, u slučaju Burgersove jednadžbe, brzina gibanja šoka je aritmetička sredina lijevog i desnog stanja: $c = (u^+ + u^-)/2$.

Primjer 2.2 U slučaju linearnih sustava Rankine–Hugoniot uvjet (2.14) glasi:

$$c(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) = \mathbf{A}(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-).$$

Na ovom primjeru vidimo da kod sustava šokovi nisu proizvoljni, tj. brzina c gibanja šoka je svojstvena vrijednost, a $(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)$ pridruženi svojstveni vektor matrice \mathbf{A} .

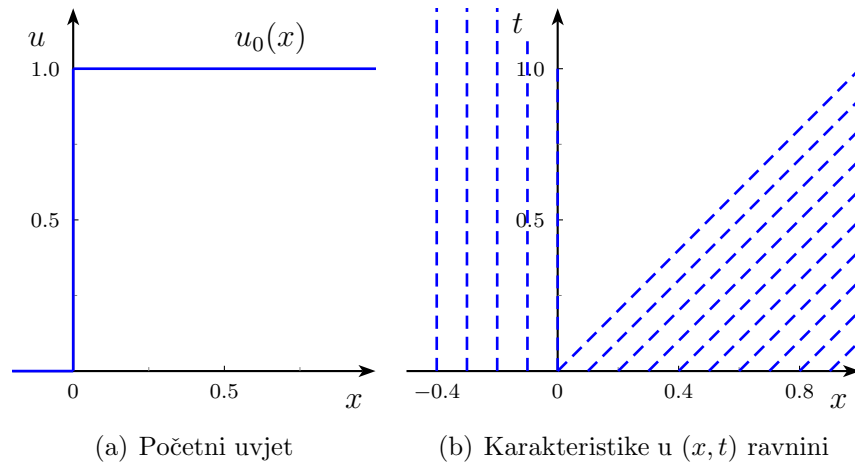
Nažalost, uvođenjem slabih rješenja dolazimo do problema nejedinstvenosti rješenja. Za neke početne uvjete postoji više bitno različitih slabih rješenja.

Primjer 2.3 Uzmimo Burgersovu jednadžbu (2.10) i početni uvjet:

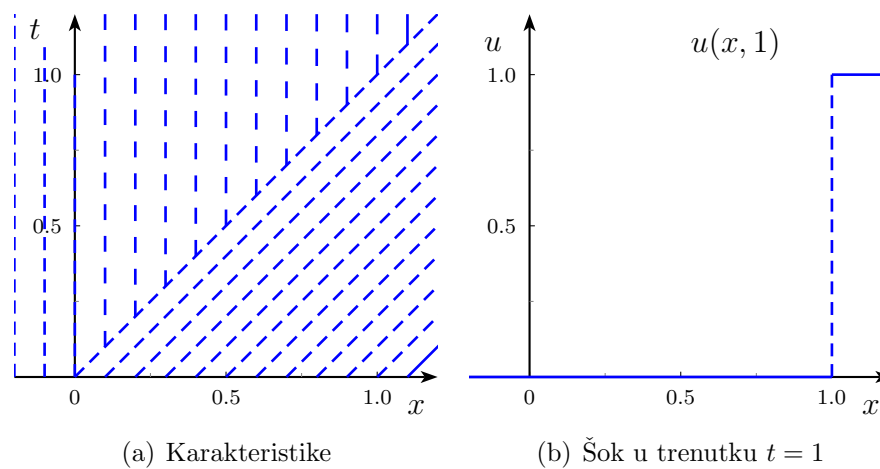
$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

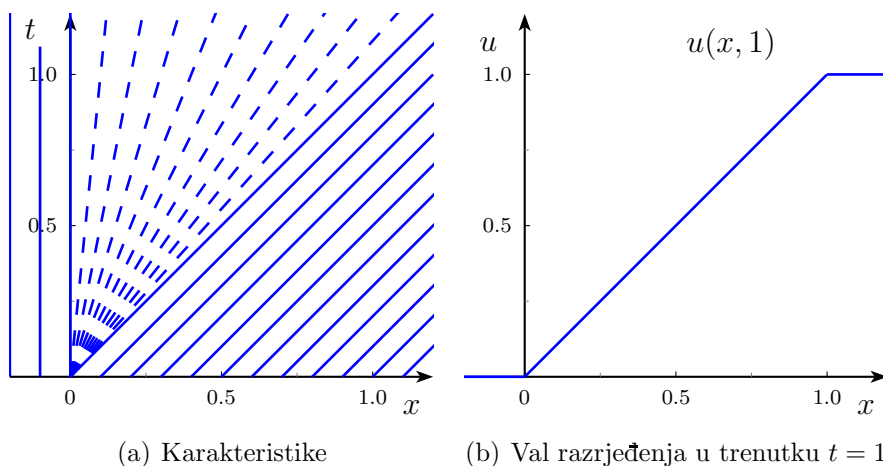
kao na slici 2.5 a). Na slici 2.5 b) prikazane su karakteristike koje jednoznačno opisuju rješenje izvan nepopunjenog klina u (x, t) ravnini. Na slikama 2.6 a) i 2.7 a) prikazana su dva načina na koji možemo popuniti ravninu karakteristikama. Na slici (2.6 b) možemo vidjeti rješenje koje zadovoljava Rankine–Hugoniotov uvjet skoka (2.14), a na slici 2.7 b) prikazano je rješenje valom razrjeđenja. Rješenje na slici 2.7 b) zovemo valom razrjeđenja zbog lepezastog širenja karakteristika na slici 2.7 a).

Na ovom primjeru vidjeli smo barem dva moguća rješenja postavljenog problema. Potrebni su nam dodatni uvjeti kako bismo imali jedinstveno slabo rješenje.



Slika 2.5: Početni uvjet s karakteristikama

Slika 2.6: Rješenje koje sadrži šok do trenutka $t = 1$

Slika 2.7: Rješenje koje sadrži val razrjeđenja do trenutka $t = 1$

2.5 Entropijska rješenja

Budući da se zakonima očuvanja modeliraju neke važne fizikalne pojave, nas zanima samo ono slabo rješenje koje ima fizikalnog smisla. Stoga u nastavku uvodimo pojam entropijskog rješenja. Fizikalno razumna rješenja dobiju se kao limes viskozne jednadžbe:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

kada $\epsilon \rightarrow 0$. Viskozna jednadžba dobivena je tako da je u zakonu očuvanja dodan član višega reda kojim se modelira difuzija koja izgladuje rješenje. Parametar ϵ zovemo koeficijentom difuzije. Viskozna jednadžba je parabolická parcijalna diferencijalna jednadžba koja ima jedinstveno rješenje. Ako je slabo rješenje problema (2.1) i (2.4) limes rješenja viskozne jednadžbe, tj. vrijedi $\mathbf{u}^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}$ i $\mathbf{u}_0^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}_0$ skoro svugdje, tada je takvo rješenje fizikalno dopušteno.

Ovo je neformalna definicija fizikalnih, odnosno entropijskih rješenja koja osiguravaju jedinstvenost. Na primjeru 2.3 prikazana su dva slaba rješenja, ali se može pokazati da je val razrjeđenja fizikalno dopustivo rješenje koje se dobije kao limes viskozne Burgersove jednadžbe.

Definicija 2.4 *Slabo rješenje \mathbf{u} problema (2.1) i (2.4) je fizikalno dopustivo ako postoji niz glatkih rješenja \mathbf{u}^ϵ viskozne jednadžbe (2.15) koje konvergira prema \mathbf{u} skoro svugdjekada $\epsilon \rightarrow 0$.*

Iako je definicija 2.4 korisna u nekim primjerima u praksi je teško opisati limes niza i dati uniformne ocjene rješenja parabolické jednadžbe. Odabir jedinstvenog fizikalno dopustivog, odnosno entropijskog slabog rješenja može se napraviti i preko funkcija entropije.

Definicija 2.5 *Pretpostavimo da neprekidno diferencijabilne funkcije $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednadžbu*

$$\frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

za svako klasično rješenje jednadžbe \mathbf{u} (2.1). Funkcija U je entropija, a F entropijski fluks zakona očuvanja.

Definicija 2.6 *Slabo rješenje \mathbf{u} problema (2.1) i (2.4) je entropijsko rješenje ako za sve parove (U, F) entropijske funkcije U i entropijskog fluksa F i sve test funkcije $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\phi \geq 0$, vrijedi:*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(U(\mathbf{u}) \frac{\partial \phi}{\partial t} + F(\mathbf{u}) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} U(\mathbf{u}(x, 0)) \phi(x, 0) dx \geq 0.$$

Iz definicije entropijskog rješenja slijedi entropijska nejednakost preko koje možemo odabrati fizikalno dopustive skokove. U sljedećem teoremu pretpostavit ćemo da su glatke krivulje duž kojih slabo rješenje ima funkcijske skokove parametrizirane krivuljama $x = x(t)$ te je $c = \frac{dx}{dt}$ brzina gibanja šoka $\mathbf{u}(x, t)$ ravnini.

Teorem 2.2 *Neka je $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ po dijelovima \mathcal{C}^1 funkcija. \mathbf{u} je entropijsko rješenje za (2.1) u smislu distribucija na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ onda i samo onda ako su zadovoljeni uvjeti:*

- (a) \mathbf{u} je klasično rješenje za (2.1) na dijelu domene gdje je \mathbf{u} klase \mathcal{C}^1 ;
- (b) \mathbf{u} zadovoljava **Rankine–Hugoniotov** uvjet skoka

$$c(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^+) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^-),$$

- (c) \mathbf{u} zadovoljava entropijsku nejednakost

$$c(U(\mathbf{u}^+) - U(\mathbf{u}^-)) \geq F(\mathbf{u}^+) - F(\mathbf{u}^-).$$

Dokazuje se slično teoremu 2.1 uz korištenje definicije 2.6.

U slučaju skalarnog zakona očuvanja može se dokazati egzistencija i jedinstvenost entropijskog rješenja. Egzistencija rješenja se dokazuje preko limesa rješenja viskozne jednadžbe (2.15). Također, za jedinstvenost rješenja vrlo je važno svojstvo totalne varijacije funkcije.

Definicija 2.7 Totalnu varijaciju funkcije $\mathbf{u} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ označavamo sa $TV(\mathbf{u})$ i definiramo:

$$TV(\mathbf{u}) = \sup \left(\sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}(x_i) - \mathbf{u}(x_{i-1})\|_{\infty} \right),$$

gdje se supremum uzima za svaki $N \geq 1$ i sve rastuće nizove čvorova $x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Ako je totalna varijacija funkcije \mathbf{u} omeđena, tada kažemo da pripada skupu funkcija omeđene varijacije tj. $\mathbf{u} \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$.

Sljedeći teorem govori o svojstvima i jedinstvenosti entropijskih rješenja.

Teorem 2.3 Neka je $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Tada problem (2.1) i (2.4) ima jedinstveno entropijsko rješenje $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ koje za skoro svaki $t \geq 0$ zadovoljava nejednakost:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{t})\|_{\infty} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\infty}.$$

Ako je \mathbf{v} entropijsko rješenje pridruženo početnom uvjetu \mathbf{v}_0 , tada vrijedi:

$$\|\mathbf{v}_0\|_{\infty} \geq \|\mathbf{u}_0\|_{\infty} \Rightarrow \|\mathbf{v}(\cdot, \mathbf{t})\|_{\infty} \geq \|\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{t})\|_{\infty} \quad \text{s.s.}$$

Neka je $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$, tada je $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ i vrijedi:

$$TV(\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{t})) \leq TV(\mathbf{u}_0).$$

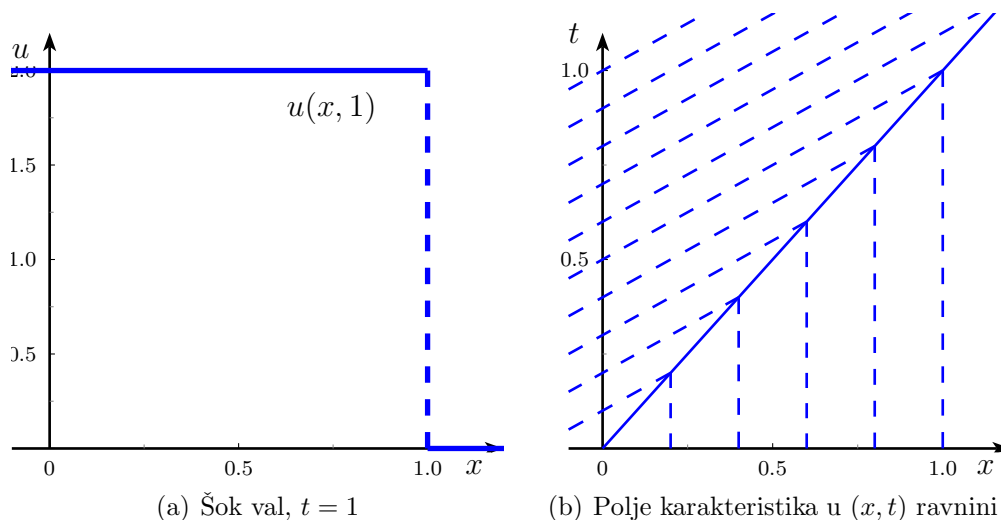
Dokaz se može naći u knjizi [24].

Entropijske nejednakosti su korisne samo ako se mogu pronaći netrivialne entropijske funkcije. Općenito se pokazuje da je za sustave $n \geq 3$ to vrlo teško.

U praksi je vrlo korisno koristiti Laxov uvjet koji ima jasno geometrijsko značenje. Diskontinuiteti koji zadovoljavaju Laxov uvjet entropije su fizikalno dopustivi. Iz Rankine–Hugoniotovog uvjeta skoka slijedi da se diskontinuiteti kreću brzinama koje su jednake nekoj svojstvenoj vrijednosti Jacobijeve matrice fluksa. Laxov uvjet zahtjeva da karakteristike s lijeve i desne strane šoka ulaze u liniju šoka.

Definicija 2.8 Slabo rješenje \mathbf{u} problema (2.1) i (2.4) zadovoljava **Laxov uvjet entropije** ako u svakoj točki na liniji diskontinuiteta (τ, ξ) , lijeva i desna stanja \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ i brzina gibanja diskontinuiteta $\lambda = \lambda_p(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+)$ zadovoljavaju uvjet:

$$\lambda_p(\mathbf{u}^-) \geq \lambda \geq \lambda_p(\mathbf{u}^+).$$



Slika 2.8: Entropijsko rješenje za Burgersovu jednadžbu.

Primjer 2.4 *Uzmimo Burgersovu jednadžbu (2.10) i početni uvjet:*

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} .$$

Na slici (2.8 a)) prikazano je slabo rješenje koje zadovoljava Rankine–Hugoniot uvjet skoka, a na slici (2.8 b)) jasno je vidljivo da karakteristike ulaze u diskontinuitet, odnosno da je zadovoljen Laxov uvjet entropije (2.8).

2.6 Riemannov problem

Riemannov problem za zakone očuvanja (2.1) je odrediti entropijsko rješenje Cauchyjeva problema sa zadanim početnim uvjetom:

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}^-, & x < 0 \\ \mathbf{u}^+, & x \geq 0 \end{cases} , \quad (2.17)$$

pri čemu su $\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+ \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Rješenje Riemannova problema je vrlo važno za razvoj numeričkih metoda za zakone očuvanja.

Definicija 2.9 *Za p -to karakteristično polje kažemo da je bitno nelinearno ako je*

$$\nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) \neq 0, \forall \mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

odnosno kažemo da je polje linearno degenerirano ako vrijedi:

$$\nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

U nastavku ćemo podrazumijevati da je (2.1) strogo hiperbolički s glatkim koeficijentima i definiran na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Također, sva karakteristična polja su ili bitno nelinearna ili linearno degenerirana.

Normalizacija lijevih i desnih svojstvenih vektora odabrat će se tako da je u slučaju bitno nelinearnog p -tog polja

$$\begin{cases} \nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) = 1 \\ \mathbf{l}^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) = 1 \end{cases}, \quad (2.18)$$

a u slučaju linearno degeneriranog polja

$$\mathbf{l}^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) = 1.$$

Vidjet ćemo u nastavku da uz pretpostavku da je svako polje bitno nelinearno ili linearno degenerirano te za dovoljno mali skok u početnom uvjetu (2.17), postoji rješenje Riemannova problema koje se sastoji od n valova odvojenih sa $n + 1$ konstantnih stanja $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}^+$. Slično kao što smo vidjeli u skalarnom slučaju, valovi mogu biti šokovi ili valovi razrjeđenja. Također, rješenje će biti automorfno, tj. imat će oblik $\mathbf{u}(x, t) = \psi(x/t)$

2.6.1 Valovi razrjeđenja

Definicija 2.10 Integralnu krivulju parametriziranu sa $\sigma \mapsto \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)$ koja rješava Cauchyjev problem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0) &= \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) \\ \mathbf{R}_p(0)(\mathbf{u}_0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

zvat ćemo p -tim valom razrjeđenja stanja \mathbf{u}_0 .

Uzmimo poseban slučaj Riemannovog problema. Neka su zadana stanja $\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+$ i neka postoji bitno nelinearno p -to polje tako da za neki $\bar{\sigma} > 0$ vrijedi:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{R}_p(\bar{\sigma})(\mathbf{u}^-),$$

što znači da se stanje \mathbf{u}^+ nalazi na p -tom valu razrjeđenja stanja \mathbf{u}^- . Iz definicije vala razrjeđenja i normalizacije (2.18) slijedi:

$$\frac{d}{d\sigma} \lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) = \nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0) = 1.$$

$\lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) = \sigma$, odnosno $\sigma \mapsto \lambda_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0))$ je strogo monotona i rastuća te preslikava $[0, \bar{\sigma}]$ na interval $[\lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-), \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^+)]$. Konačno, za $t > 0$ možemo definirati po dijelovima glatku funkciju:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^-, & x/t < \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-) \\ \mathbf{R}_p(x/t)(\mathbf{u}^-) & x/t \in [\lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-), \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^+)] \\ \mathbf{u}^+, & x/t > \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^+). \end{cases} \quad (2.19)$$

Tvrdimo da je (2.19) rješenje promatranog Riemannova problema. Slučajevi $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}^-$ i $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}^+$ su trivijalni.

U slučaju $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{R}_p(x/t)(\mathbf{u}^-)$ sa $\sigma = x/t$ dovoljno je iskoristiti definiciju vala razrjeđenja i uvrstiti $\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)$ u zakon očuvanja (2.2):

$$-\frac{x}{t^2} \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) + \frac{1}{t} \mathbf{A}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \frac{1}{t} (A(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) - \lambda^{(p)}(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u})) = 0$$

Rješenje koje sadrži val razrjeđenja prikazano je na slici 2.3.

Teorem 2.4 *Neka je p -to polje bitno nelinearno. Tada za svaki $\mathbf{u}^- \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ postoji $\sigma_0 > 0$ i parametrizacija integralne krivulje $\sigma \mapsto \lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-))$ definirane za $\sigma \in [0, \sigma_0]$ takva da vrijedi:*

$$\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \mathbf{u}^- + \sigma \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{d\mathbf{u}} \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \mathcal{O}(\sigma^3). \quad (2.20)$$

Dokaz se može naći u [23].

2.6.2 Riemannove invarijante

Za proučavanje rješenja korisno je uvesti Riemannove invarijante koje su pridružene svakom karakterističnom polju.

Definicija 2.11 *Glatka funkcija $\omega_p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je p -ta Riemannova invarijanta ako vrijedi*

$$\nabla \omega_p(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega.$$

Definicija 2.12 *Glatka funkcija $\omega : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je jaka p -ta Riemannova invarijanta ako vrijedi*

$$\nabla \omega(\mathbf{u}) \mathbf{A} = \lambda^{(p)}(\mathbf{u}) \nabla \omega(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega.$$

Lema 2.2 *Neka je $\lambda^{(p)}$ jednostruka svojstvena vrijednost. Tada postoji $n - 1$ p -tih Riemannovih invarijanti s linearno nezavisnim derivacijama.*

Lema 2.3 *ω je jaka p -ta Riemannova invarijanta ako i samo ako je k -ta Riemannova invarijanta za svaki $k \neq p$.*

Ove tvrdnje slijede iz stroge hiperboličnosti sustava, odnosno iz postojanja baze linearno nezavisnih lijevih svojstvenih vektora.

Lema 2.4 *Ako je p -to karakteristično polje linearno degenerirano, tada je svojstvena vrijednost $\lambda^{(p)}$ p -ta Riemannova invarijanta.*

Tvrđnja slijedi direktno iz definicije Riemannove invarijante i definicije linearno degeneriranog polja.

Propozicija 2.1 *p -ta Riemannova invarijanta je konstantna na p -tom valu razrjeđenja.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}\omega_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) &= \nabla\omega_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) \frac{d}{d\sigma}\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0) \\ &= \nabla\omega_p(\mathbf{u}) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}_0)) = 0 \end{aligned}$$

□

Riemannove invarijante smo zapravo već koristili kod metode karakteristika za skalarnu jednadžbu i linearne sustave.

Osim valova razrjeđenja sada je moguće uvesti širu klasu jednostavnih glatkih rješenja.

Definicija 2.13 *Glatko rješenje $\mathbf{u}(x, t)$ je p -ti jednostavni val ako je $\omega(\mathbf{u})$ konstantno za svaku p -tu Riemannovu invarijantu ω .*

Lema 2.5 *Neka je $\mathbf{u}(x, t)$ p -ti jednostavni val. Tada su vrijednosti rješenja $\mathbf{u}(x, t)$ ograničene na integralnu krivulju vektora $\mathbf{r}^{(p)}$.*

Po prethodnoj lemi znamo da će jednostavni val pripadati integralnoj krivulji, tj.

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{V}_p(\sigma(x, t)),$$

gdje je \mathbf{V}_p rješenje nekog početnog problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}\mathbf{V}_p(\sigma) &= \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{V}_p(\sigma)) \\ \mathbf{V}_p(\sigma_0) &= \mathbf{V}_0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Uvrstimo jednostavni val $\mathbf{V}_p(\sigma(x, t))$ u zakon očuvanja:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{V})}{\partial x} = \mathbf{r}^{(p)} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \lambda^{(p)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = \mathbf{0}.$$

Slijedi da $\sigma(x, t)$ zadovoljava skalarni zakon očuvanja:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \lambda^{(p)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \tag{2.22}$$

Glatka rješenja za skalarni zakon očuvanja moguće je odrediti metodom karakteristika.

Definicija 2.14 *Glatka krivulja $x^{(p)}(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ je p -ta karakteristika pridružena p -tom karakterističnom polju zakona očuvanja (2.1) ako vrijedi:*

$$\frac{dx^{(p)}(t)}{dt} = \lambda^{(p)}(\mathbf{u}(x^{(p)}(t), t)).$$

Teorem 2.5 *Neka je \mathbf{u} p -ti jednostavni val. Tada su p -te karakteristike ravne linije duž kojih je \mathbf{u} konstantna.*

Dokaz. Ako je p -to polje bitno nelinearno, tada iz (2.21) i (2.18) slijedi

$$\frac{d}{d\sigma} \lambda^{(p)}(\mathbf{V}_p) = \nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{V}_p) \frac{d}{d\sigma} \mathbf{V}_p(\sigma) = 1$$

iz čega možemo zaključiti da je $\lambda^{(p)}(\mathbf{V}_p) = \sigma$, a iz (2.22) slijedi da $\sigma(x, t)$ mora zadovoljiti Burgersovu jednadžbu:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

što znači da su karakteristike pravci duž kojih je \mathbf{u} konstantna.

U slučaju linearno degeneriranog polja svojstvena vrijednost $\lambda^{(p)}$ je konstantna iz čega slijedi da su karakteristike paralelni pravci.

□

Konačno možemo zapisati rješenje početnog problema za p -ti jednostavni val:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{V}_p(\sigma_0(x - \lambda^{(p)}(\mathbf{V}_p)(\sigma)t)),$$

gdje je σ_0 iz (2.21).

Više o Riemannovim invarijantama i primjenama može se pronaći u [4] i [23].

2.6.3 Šok valovi

Za zadano stanje \mathbf{u}^- želimo opisati stanja \mathbf{u}^+ za koja Riemannov problem (2.17) ima po dijelovima konstantno automorfno rješenje koje možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^-, & x/t < \lambda, \\ \mathbf{u}^+, & x/t > \lambda, \end{cases}$$

za neki λ . Ovakvo rješenje zovemo šok val. Skup svih stanja koja mogu šokom biti povezana sa \mathbf{u}^- označit ćemo sa $S(\mathbf{u}^-)$. Već smo vidjeli da takav skup stanja mora zadovoljavati Rankine–Hugoniotov uvjet skoka:

$$S(\mathbf{u}^-) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^-) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}^-)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^-)\}.$$

Teorem 2.6 *Neka je p -to polje bitno nelinearno. Tada za svaki $\mathbf{u}^- \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ postoji $\sigma_0 > 0$ takav da se $S(\mathbf{u}^-)$ sastoji od n glatkih krivulja s parametризacijom $\sigma \mapsto \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)$, $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$ za koje vrijedi:*

$$\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \mathbf{u}^- + \sigma \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{d\mathbf{u}} \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \mathcal{O}(\sigma^3), \quad (2.23)$$

$$\lambda_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \frac{\sigma}{2} \nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}^-) + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Dokaz se može naći u knjizi [23].

Slabo rješenje promatranog problema je funkcija:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^-, & x/t < \lambda_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) \\ \mathbf{u}^+ = \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-), & x/t > \lambda_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) \end{cases}. \quad (2.24)$$

Ako je p -to karakteristično polje bitno nelinearno, tada za rješenje za $\sigma < 0$ zovemo kompresivni šok, odnosno šok razrjeđenja za $\sigma > 0$.

Može se pokazati da za kompresivne šokove vrijedi Laxov uvjet entropije (2.8) dok ga šokovi razrjeđenja ne zadovoljavaju. Rješenje koje sadrži kompresivni šok prikazano je na slici 2.8.

2.6.4 Kontaktni diskontinuiteti

Još je preostao slučaj linearno degeneriranog polja. Slično kao i u slučaju vala razrjeđenja i šok valova, želimo odrediti sva stanja \mathbf{u}^+ koja se mogu povezati sa stanjem \mathbf{u}^- p -tim valom. Već smo spomenuli da su u slučaju linearno degeneriranog polja karakteristike paralelni pravci duž kojih je \mathbf{u} konstantna pa u ovom polju nije moguće povezati stanja \mathbf{u}^- i \mathbf{u}^+ neprekidnim p -tim valom već to moramo učiniti funkcijskim skokom.

Teorem 2.7 *Neka je p -to polje linearno degenerirano. Tada je krivulja (2.23) integralna krivulja:*

$$\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)$$

i vrijedi

$$\lambda_p(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) = \lambda^{(p)}(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) = \lambda^{(p)}(\mathbf{u}^-) \forall \sigma.$$

Također, za Riemannovu invarijantu ω_p vrijedi

$$\omega_p(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) = \omega_p(\mathbf{u}^-).$$

Dokaz. Pokažimo da val razrjeđenja zadovoljava Rankine–Hugoniotov uvjet skoka (2.14).

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^-) &= \int_0^\sigma \frac{d}{ds} \mathbf{f}(\mathbf{R}_p(s)(\mathbf{u}^-)) ds & (2.25) \\
&= \int_0^\sigma \mathbf{A}(\mathbf{R}_p(s)(\mathbf{u}^-)) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{R}_p(s)(\mathbf{u}^-)) ds \\
&= \int_0^\sigma \lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(s)(\mathbf{u}^-)) \frac{d}{ds} \mathbf{R}_p(s)(\mathbf{u}^-) ds \\
&= \lambda^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) (\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) - \mathbf{u}^-).
\end{aligned}$$

Iz jednadžbe (2.25) slijedi $\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)$ te iz teorema 2.6 slijedi $\lambda_p(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) = \lambda^{(p)}(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) \forall \sigma$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \omega_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) &= \nabla \omega_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) \\
&= \nabla \omega_p(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Slijedi da je $\omega_p(\mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)) = \omega_p(\mathbf{u}^-)$. Svojstvena vrijednost $\lambda^{(p)}$ je Riemannova invarijanta linearno degeneriranog polja pa slijedi tvrdnja teorema.

□

Ako za neki σ vrijedi $\mathbf{u}^+ = \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-)$, tada je rješenje Riemannova problema šok (*kontaktni diskontinuitet*) koji zadovoljava Laxov uvjet entropije te ga možemo zapisati u obliku (2.24).

Primjer 2.5 *Kod linearnog sustava u poglavlju 2.2 sva su polja linearno degenerirana. Stoga u ovom slučaju možemo jednostavno zapisati rješenje Riemannova problema. Linearni sustav smo zamjenom varijabli $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$ transformirali u sustav linearno nezavisnih jednadžbi. Riemannov problem (2.17) možemo zapisati u varijabli \mathbf{w} :*

$$\mathbf{w}_0 = \begin{cases} \mathbf{w}^-, & x < 0 \\ \mathbf{w}^+, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Konačno rješenje Riemannova problema može se zapisati u obliku:

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p: x - \lambda^{(p)} t < 0} w^{-(p)} \mathbf{r}^{(p)} + \sum_{p: x - \lambda^{(p)} t \geq 0} w^{+(p)} \mathbf{r}^{(p)}. \quad (2.26)$$

2.6.5 Rješenje općeg Riemannova problema

Vidjeli smo osnovne strukture koje možemo dobiti za posebne oblike Riemannova problema. U općem slučaju početni diskontinuitet će se razložiti na n valova, po jedan val u svakom karakterističnom polju. Ako je polje linearno degenerirano, tada su mogući samo kontaktni diskontinuiteti i rješenje se u tom polju ponaša poput linearne skalarne jednadžbe. Ako je polje bitno nelinearno, tada možemo očekivati valove razrjeđenja ili kompresivne šokove.

Neka je p -to polje bitno nelinearno. Za svako stanje $\mathbf{u}^- \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ u p -tom polju mogu definirati dvije glatke krivulje:

$$\sigma \mapsto \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) \text{ i } \sigma \mapsto \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-).$$

Kada se obje krivulje parametriziraju preko duljine luka, iz (2.20) i (2.23) slijedi:

$$\mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) - \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \mathcal{O}(\sigma^3).$$

Spajanjem krivulje vala razrjeđenja i kompresivnog šoka moguće je definirati glatku krivulju:

$$\Psi_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) = \begin{cases} \mathbf{S}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-), & \sigma < 0 \\ \mathbf{R}_p(\sigma)(\mathbf{u}^-) & \sigma \geq 0 \end{cases}.$$

Krivulja Ψ_p je glatka za $\sigma \neq 0$, ima neprekidnu drugu derivaciju za $\sigma = 0$ te je jedinstveno definirana čak i u slučaju linearno degeneriranog polja.

Za odabrani \mathbf{u}^- i $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ iz okoline $0 \in \mathbb{R}^n$ možemo definirati stanja:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \mathbf{u}^-, \\ \boldsymbol{\omega}_p &= \Psi_p(\sigma_p)(\boldsymbol{\omega}_{p-1}). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da postoji $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ takav da je $\mathbf{u}^+ = \boldsymbol{\omega}_n$. Uvodimo oznake:

$$\begin{aligned} \lambda_p^- &= \begin{cases} \lambda_p(\boldsymbol{\omega}_{p-1}, \boldsymbol{\omega}_p), & \sigma_p < 0 \\ \lambda_p(\boldsymbol{\omega}_{p-1}) & \sigma_p \geq 0 \end{cases}, \\ \lambda_p^+ &= \begin{cases} \lambda_p(\boldsymbol{\omega}_{p-1}, \boldsymbol{\omega}_p), & \sigma_p < 0 \\ \lambda_p(\boldsymbol{\omega}_p) & \sigma_p \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Za dovoljno male $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ brzine λ_p^-, λ_p^+ su blizu svojstvene vrijednosti λ_p . Zbog neprekidnosti i stroge hiperboličnosti možemo zaključiti da vrijedi

$$\sigma_1^- < \sigma_1^+ < \sigma_2^- < \dots < \sigma_n^- < \sigma_n^+.$$

Konačno možemo zapisati rješenje Riemannova problema:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^-, & x/t < \lambda_1^- \\ \mathbf{R}_p(x/t)(\boldsymbol{\omega}_{p-1}), & x/t \in [\lambda_p^-, \lambda_p^+] \text{ } p = 1 \dots n \\ \boldsymbol{\omega}_p, & x/t \in (\lambda_p^+, \lambda_{p+1}^-) \text{ } p = 1 \dots n - 1 \\ \mathbf{u}^+, & x/t > \lambda_n^+ \end{cases}. \quad (2.27)$$

Teorem 2.8 *Za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji $\sigma > 0$ takav da za $\mathbf{u}^- \in K$, $\|\mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+\| \leq \sigma$, Riemannov problem (2.1), (2.17) ima jedinstveno slabo rješenje koje se može zapisati u obliku (2.27).*

Dokaz se može naći u [6].

2.7 Eulerove jednadžbe

Eulerove jednadžbe su jednodimenzijski sustav kojim se modelira gibanja plina. Ako ih zapišemo u obliku (2.1), tada su stanje i fluks jednaki:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Ovdje ρ , v , E , i p označavaju gustoću, brzinu, ukupnu energiju i tlak. Kako bi sustav jednadžbi bio zatvoren dodat ćemo jednadžbu stanja za idealni politropni plin:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

pri čemu je $\gamma = 1.4$.

Jacobijeva matrica fluksa je

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)v^3 - vH & H - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

gdje je $H = (E - p)/\rho$ totalna specifična entalpija. Brzina zvuka za idealni politropni plin je $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Iz Jacobijeve matrice (2.29) dobiju se svojstvene vrijednosti i desni svojstveni vektori:

$$\lambda^{(1)} = v - c, \quad \lambda^{(2)} = c, \quad \lambda^{(3)} = v + c, \\ \mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c \\ H - vc \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c \\ H + vc \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Da je sustav (2.28) strogo hiperbolički može se vidjeti iz svojstvenih vrijednosti (2.30). Može se pokazati da su prvo i treće karakteristično polje bitno nelinearni, a drugo polje je linearno degenerirano. Prema tome će se rješenje Riemannova problema će se sastojati od kontaktnih diskontinuiteta, valova razrjeđenja i kompresibilnih šok valova.

Eulerove jednadžbe mogu imati i proširenja, odnosno dodatne izvorne članove kojima se modelira utjecaj vanjskih sila ili geometrije cijevi u kojoj se nalazi kompresibilni fluid, ali u tim slučajevima Riemannov problem ima znatno složenije rješenje što se može vidjeti u radovima [22, 45].

2.8 Jednadžbe za plitke vode

Jednodimenzionalnim jednadžbama plitkih voda modelira se strujanje vode u kanalu s pravokutnim poprečnim presjecima konstantne širine. Pri tom se pretpostavi da je vertikalna brzina fluida zanemariva, dok je horizontalna brzina $v = v(x, t)$ konstantna na svakom poprečnom presjeku kanala i tlak je hidrostatički. Dodatno pretpostavljamo da je dno kanala ravno i da nema trenja. Iz zakona očuvanja mase i zakona očuvanja količine gibanja dobijemo sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi oblika (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ h v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Ovdje je $h = h(x, t)$ dubina, a $v = v(x, t)$ brzina vode. U skladu s oznakama ovoga poglavlja možemo pisati

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ h v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{1}{2} g u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Odredimo najprije svojstvene vrijednosti te lijeve i desne svojstvene vektore ovoga sustava. Jacobijeva matrica sustava glasi

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{u_2}{u_1})^2 + g u_1 & 2\frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix},$$

gdje je sa $c = \sqrt{gh}$ označena brzina propagacije poremećaja. Svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} jednake su:

$$\lambda^{(1)} = \frac{u_2}{u_1} - \sqrt{g u_1} = v - c, \quad \lambda^{(2)} = \frac{u_2}{u_1} + \sqrt{g u_1} = v + c. \quad (2.32)$$

Svojstvenim vrijednostima pridružena su dva lijeva i dva desna linearno nezavisna svojstvena vektora

$$\mathbf{l}^{(1)} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\lambda^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}^{(2)} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

i

$$\mathbf{r}^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Propozicija 2.2 *Sustav (2.31) je strogo hiperbolički za $h > 0$.*

Dokaz. Iz izraza (2.32) je jasno da se svojstvene vrijednosti razlikuju ako je brzina gibanja poremećaja $c > 0$, što vrijedi za $h > 0$ pa je u tom slučaju promatrani sustav strogo hiperbolički.

□

Entropija ovog sustava jest

$$U(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2u_1} + \frac{1}{2}g u_1^2 = \frac{1}{2}(h v^2 + g h^2), \quad (2.33)$$

dok je entropijski fluks

$$F(u_1, u_2) = \frac{u_2}{u_1} \left(\frac{u_2^2}{2u_1} + g u_1^2 \right) = v \left(\frac{1}{2}h v^2 + g h^2 \right). \quad (2.34)$$

Nije teško pokazati, da sa (2.33) i (2.34) definirane funkcije U i F zadovoljavaju (2.16).

Kako je

$$\nabla \lambda^{(1,2)} \mathbf{r}^{(1,2)} = \frac{2 + \sqrt{g}}{2\sqrt{h}} > 0,$$

slijedi da su oba karakteristična polja sustava su bitno nelinearna.

Rješenje Riemannova problema sastoji se od dva vala koja mogu biti valovi razrjeđenja i šokovi. Dva vala razdvajaju tri konstantna stanja \mathbf{u}^- , \mathbf{u}^+ i stanje \mathbf{u}^* . Iz zajedničke krivulje za valove razrjeđenja i kompresivne šok valove možemo definirati krivulje $v^{(p)}(h)$ u svakom karakterističnom polju

$$v^{(1)}(h) = \begin{cases} v^- + 2(\sqrt{g h^-} - \sqrt{g h}), & h < h^-, \\ v^- - (h - h^-) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h^-} \right)}, & h > h^-, \end{cases}$$

$$v^{(2)}(h) = \begin{cases} v^+ - 2(\sqrt{g h^+} - \sqrt{g h}), & h < h^+, \\ v^+ + (h - h^+) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h^+} \right)}, & h > h^+. \end{cases}$$

Sva stanja $(h, h v^{(1)}(h))$ mogu se povezati fizikalnim 1-valom sa stanjem \mathbf{u}^- , odnosno stanje $(h, h v^{(2)}(h))$ može se povezati fizikalnim 2-valom sa stanjem \mathbf{u}^+ . Nama je cilj odrediti h^* tako da vrijedi

$$v^{(1)}(h^*) = v^{(2)}(h^*).$$

Nakon što odredimo stanje $\mathbf{u}^* = (h^*, h^* v^*)$, potpuno je određeno rješenje Riemannova problema.

Riemannove invarijante promatranog sustava jesu:

$$\omega_1(\mathbf{u}) = v + 2\sqrt{g h},$$

$$\omega_2(\mathbf{u}) = v - 2\sqrt{g h}.$$

3 ZAKONI RAVNOTEŽE

Zakoni očuvanja (2.1) opisuju stanje zatvorenih sustava kod kojih ne postoji utjecaj vanjskih sila ili je on zanemariv. Za praktičnu primjenu često je nužno uvesti proširenje zakona očuvanja na zakone ravnoteže u kojima se pojavljuje dodatni član kojim se modelira utjecaj vanjskih sila. Zanimljiv je i slučaj kod kojeg je fluks prostorno ovisan.

Vrlo široku klasu hiperboličkih zakona ravnoteže u jednoj prostornoj dimenziji možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, x)}{\partial x} = \mathbf{s}(\mathbf{u}, x), \quad (3.1)$$

pri čemu je $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija koju nazivamo vektorom stanja sustava, diferencijabilna funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je fluks te funkcija $\mathbf{s}(\mathbf{u}, x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vanjski, odnosno *izvorni član* sustava.

Definicija 3.1 *Pretpostavimo da je početni uvjet $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. Funkcija $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ je slabo rješenje Cauchyjeva problema (3.1) i (2.4) ako zadovoljava*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{s} \phi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(x) \phi(x, 0) dx = 0.$$

za proizvoljnu test funkciju $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))^n$.

Definicija slabog rješenja za zakone ravnoteže ne razlikuje se bitno od definicije slabog rješenja zakona očuvanja. Može se čak pokazati da teorem (2.2) vrijedi i za zakone ravnoteže, tj. Rankine–Hugoniot uvjet skoka (2.14) ne ovisi o izvornom članu. Uvođenjem izvornog člana dobili smo nehomogeni sustav što ipak donosi probleme kod dokazivanja egzistencije i jedinstvenosti rješenja.

Kako bismo iskoristili teoriju razvijenu za zakone očuvanja, praktično je zapisati sustav (3.1) u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, a)}{\partial x} &= \mathbf{s}(\mathbf{u}, a) \frac{\partial a}{\partial x}, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

pri čemu je $a = a(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Primijetimo da druga jednadžba (3.2) odgovara linearno degeneriranim poljima sa svojstvenom vrijednosti $\lambda = 0$. Također, za $a = x$ dobije se oblik zakona ravnoteže (3.1). Značajno je primijetiti da se na desnoj strani sustava (3.2) pojavljuje tzv. nekonzervativni produkt kojeg je potrebno definirati na ispravan način.

Definicija 3.2 *Sustav (3.2) je hiperbolički ako Jacobijeva matrica:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, a) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, a)}{\partial \mathbf{u}}$$

ima n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda^{(p)}(\mathbf{u}, a)$, $p = 1, \dots, n$ i n pripadnih linearno nezavisnih lijevih i desnih svojstvenih vektora $\mathbf{l}^{(p)}(\mathbf{u}, a)$, $\mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}, a)$, $p = 1, \dots, n$. Ukoliko su svojstvene vrijednosti različite sustav je strogo hiperbolički.

Lijeve i desne svojstvene vektore normalizirat ćemo kao i u slučaju zakona očuvanja.

$$\begin{aligned} \nabla \lambda^{(p)}(\mathbf{u}, a) \cdot \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}, a) &= 1, \\ \mathbf{l}^{(p)}(\mathbf{u}, a) \cdot \mathbf{r}^{(p)}(\mathbf{u}, a) &= 1. \end{aligned}$$

Pretpostavit ćemo da su sva polja bitno nelinearna ili linearno degenerirana.

Možemo uvesti novu oznaku $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, a)$ i zapisati (3.2) kao nekonzervativni homogeni sustav

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Sustav (3.3) je homogen, ali sadrži nekonzervativni član $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$, pri čemu $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ ne mora biti Jacobijeva matrica neke funkcije. Također, nekonzervativni produkt nije dobro definiran u teoriji distribucija.

Stoga se u nastavku uvodi definicija nekonzervativnog produkta u skladu s terijom koju su razvili Dal Maso, Le Floch i Murat. U radu [18] uvodi se familija putova preko koje je opisan distribucijski produkt $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$, pri čemu je $\mathbf{w} \in BV(\mathbb{R}^{n+1})$ te je $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{w})$ glatko omeđeno preslikavanje.

Definicija 3.3 *Familija putova $\Phi \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je Lipschitz neprekidno preslikavanje $[0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$ za koje vrijedi*

1. $\Phi(0; \mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) = \mathbf{w}^-$, $\Phi(1; \mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) = \mathbf{w}^+$, za sve $\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+ \in \Omega$;
2. $\Phi(s; \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$, za sve $\mathbf{w} \in \Omega$ i $s \in [0, 1]$;

3. Za svaki omeđen podskup $U \subset \Omega$, postoji konstanta $K > 0$ za koju je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+) \right\| \leq K \|\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-\|$$

za sve $\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+ \in U$ i $s \in [0, 1]$.

Dal Maso, Le Floch i Murat su pokazali da se izrazu $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$ i familiji putova Φ može pridružiti jedinstvena Borelova mjera koja se označava sa $[\mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}]_{\Phi}$, a nazivamo je nekonzervativni produkt. Koristeći takvu definiciju može se definirati slabo rješenje nekonzervativnog oblika zakona ravnoteže (3.3).

Definicija 3.4 *Neka je Φ familija putova iz definicije 3.3 Funkcija $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^{n+1}) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^{n+1})$ je slabo rješenje sustava (3.3), (2.4) ako zadovoljava*

$$\left[\mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right]_{\Phi} + \left[\mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right]_{\Phi} = 0,$$

u smislu Borelovih mjera na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

3.1 Riemannov problem za zakone ravnoteže

Kod analize Riemannova problema za zakone ravnoteže promatrat ćemo nekonzervativnu homogenu jednadžbu (3.3) i početni uvjet:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} \mathbf{w}^-, & x < 0 \\ \mathbf{w}^+, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

pri čemu je $\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+ \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Iako postoje mnoge sličnosti između Riemannova problema za zakone očuvanja i ravnoteže, problem za zakone ravnoteže je znatno teži. Egzistenciju i jedinstvenost je za sada moguće pokazati uz dodatne pretpostavke i ograničenja. Za neke vrlo zanimljive primjere zakona ravnoteže poznato je da Riemannov problem ne mora imati jedinstveno rješenje.

Uz jaku pretpostavku da su sva karakteristična polja bitno nelinearna Dal Maso, Le Floch i Murat su u članku [18] dokazali sljedeći teorem:

Teorem 3.1 *Neka je Φ familija putova i neka su sva karakteristična polja bitno nelinearna. Onda za svaki $\mathbf{w}^- \in \Omega$ postoji okolina V za \mathbf{w}^- za koju vrijedi: ako je $\mathbf{w}^+ \in V$, Riemannov problem (3.3), (3.4) ima slabo rješenje u smislu definicije 3.4 koje se sastoji od najviše $n + 2$ konstantnih stanja koja su razdvojena valovima razrjeđenja i šokovima. Takvo rješenje je jedinstveno ako zadovoljava Laxov uvjet entropije.*

Zakoni ravnoteže (3.1) imaju jedno polje koje je linearno degenerirano pa za taj slučaj teorem 3.1 ne rješava nama zanimljiv problem. Ipak ovaj teorem sugerira da je struktura rješenja Riemannova problema slična rješenju zakona očuvanja.

Slično kao i kod zakona očuvanja (2.15), može se koristiti viskozna jednadžba kako bi se pokazala egzistencija rješenja

$$\frac{\partial \mathbf{w}_\epsilon}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}_\epsilon) \frac{\partial \mathbf{w}_\epsilon}{\partial x} = \epsilon t \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{B}(\mathbf{w}_\epsilon) \frac{\partial \mathbf{w}_\epsilon}{\partial x} \right), \epsilon > 0$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{w}_\epsilon)$ strogo hiperbolična, a $\mathbf{B}(\mathbf{w}_\epsilon)$ je matrica difuzije. Ovaj sustav ima automorfno rješenje $\mathbf{w}_\epsilon = \mathbf{w}_\epsilon(x/t)$. Za Riemannov problem s početnim uvjetom takvim da su $\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+ \in \mathcal{B}_{\sigma_0}$, gdje je $\mathcal{B}_{\sigma_0} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kugla oko nule radijusa σ_0 , može se pokazati egzistencija rješenja bez pretpostavke bitne nelinearnosti polja. Uz navedene pretpostavke u članku [39] je dokazano da niz automorfni rješenja \mathbf{w}_ϵ konvergira jako $\mathbf{w}_\epsilon \rightarrow \mathbf{w}$, $\mathbf{w} : [-L, L] \mapsto \mathcal{B}_{\sigma_0}$ u \mathbf{L}^1 kada $\epsilon \rightarrow 0$. Rješenje \mathbf{w} ima omeđenu totalnu varijaciju te ako se (3.3) može zapisati u konzervativnom obliku, tada je \mathbf{w} slabo entropijsko rješenje u smislu distribucija.

Egzistenciju i jedinstvenost za općeniti Riemannov problem bez jakih pretpostavki je vrlo teško pokazati.

Egzistencija i analiza Riemannova problema bez strogih ograničenja je ipak napravljena za neke zanimljive zakone ravnoteže.

Tako se npr. u radovima [22, 44] analizira Riemannov problem za Eulerove jednadžbe za strujanje u cjevovodima varijabilnog poprečnog presjeka te jednadžbe za plitke vode s varijabilnim dnom. U spomenutim radovima je pokazano da jednadžbe plitkih voda i Eulerove jednadžbe ne moraju imati jedinstveno rješenje Riemannova problema. U oba slučaja rješenje se i dalje sastoji od od valova razrjeđenja, kompresibilnih šokova i kontaktnih diskontinuiteta.

3.2 Jednadžbe za plitke vode s neravnim dnom kanala

U nastavku ćemo prikazati model koji predstavlja proširenje jednadžbi za plitke vode. U jednadžbu se uvodi dodatni član kojim se uzima u obzir nagib dna kanala. Kako bismo opisali utjecaj neravnog dna kanala moramo uvesti vanjski član kojem se modelira utjecaj gravitacijskog ubrzanja na fluid. Dodatni član na desnoj strani jednadžbi očuvanja količine gibanja bi trebao biti $-gh \sin(\phi)$, gdje je ϕ nagib kanala. Za male nagibe taj član se opravdano može zamijeniti članom $-g h \frac{dz}{dx}$, gdje je z visina dna kanala. Dobijemo

3.2. JEDNADŽBE ZA PLITKE VODE S NERAVNIM DNOM KANALA 33

sustav:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ h v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h \frac{dz}{dx} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ovdje je $h = h(x, t)$ dubina, a $v = v(x, t)$ brzina vode. Prema definiciji ovaj je nehomogeni sustav strogo hiperbolički te ima svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti kao i sustav za plitke vode u poglavlju 2.8.

U skladu s teorijom za zakone ravnoteže, u vektor stanja (3.5) možemo dodati novu varijablu $z = z(x, t)$ te zapisati novi sustav u nekonzervativnom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ h v \\ z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{1}{2} g h^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h \frac{dz}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prošireni sustav omogućava promatranje sustava (3.5) kao hiperbolički sustav s jednim linearno degeneriranim poljem. Odredimo najprije svojstvene vrijednosti te lijeve i desne svojstvene vektore ovako preformuliranog sustava. Proširena matrica sustava može se zapisati ovako:

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\frac{u_2}{u_1})^2 + g u_1 & 2\frac{u_2}{u_1} & g u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v^2 & 2v & g h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ su jednake

$$\lambda^{(1)} = \frac{u_2}{u_1} - \sqrt{g u_1} = v - c, \quad \lambda^{(2)} = \frac{u_2}{u_1} + \sqrt{g u_1} = v + c, \quad \lambda^{(3)} = 0.$$

Svojstvenim vrijednostima pridružena su tri lijeva i tri desna linearno nezavisna svojstvena vektora

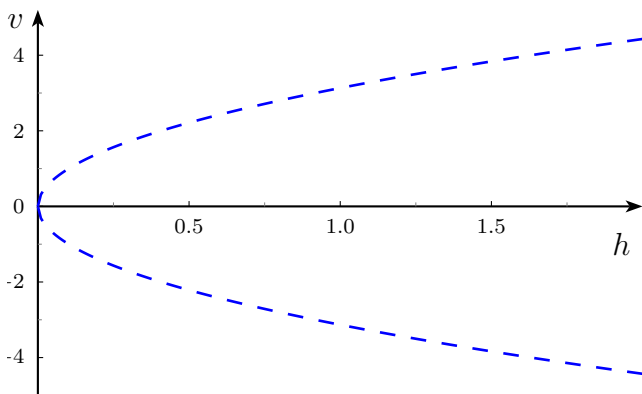
$$\mathbf{l}^{(1)} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\lambda^{(2)} \\ 1 \\ c^2 \lambda^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}^{(2)} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\lambda^{(1)} \\ 1 \\ c^2 \lambda^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{r}^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} c^2 \\ 0 \\ \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Ako promatramo prošireni sustav, tada možemo zaključiti da su dva polja bitno nelinearna, a treće je linearno degenerirano.

Ako je $|v| \neq c$, tada je sustav strogo hiperbolički, ali ako je strujanje kritično, tj. $|v| = c$ prošireni sustav ima dvije svojstvene vrijednosti jednake



Slika 3.1: Područja stroge hiperboličnosti u (h, v) poluravnini

nula i matrica sustava se ne može dijagonalizirati pa u tom slučaju sustav nije više strogo hiperbolički. Na slici 3.1 krivulja $C \equiv v^2 - c^2 = 0$ razdvaja područje stroge hiperboličnosti proširenog sustava. Ako se početni podaci za Riemannov problem \mathbf{w}^- , \mathbf{w}^+ nalaze unutar povezanog područja stroge hiperboličnosti i svi p -valovi rješenja Riemannova problema ne presijecaju kritičnu krivulju C . Rješenje Riemannova problema za promatrani sustav sastoji se od valova razrjeđenja, šok valova i stacionarnih kontaktnih diskontinuiteta u linearno degeneriranom polju. U općem slučaju rješenja se mogu potražiti pomoću Riemannova rješavača opisanog u [44], gdje je također pokazano da da promatrani sustav ne mora imati jedinstveno rješenje.

3.3 Jednadžbe za otvorene vodotoke

Jednadžbama za otvorene vodotoke modelira se jednodimenzijski nekompresibilni tok fluida sa slobodnom površinom. Model se koristi za modeliranje toka vode u kanalima proizvoljnog poprečnog presjeka pri čemu se pretpostavlja hidrostatička distribucija tlaka i mali nagib kanala. Model je dan kroz jednadžbe očuvanja mase i ravnoteže količine gibanja. Jednadžbe se mogu zapisati u obliku (3.1) gdje su vektor stanja \mathbf{u} , fluks \mathbf{f} i izvorni član \mathbf{s} dani formulama:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ g I_2 + g A (S_b - S_f) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

$A = A(x, t)$ označava površinu mokrog poprečnog presjeka kanala, $Q = Q(x, t)$ predstavlja protok i g gravitacijsko ubrzanje. Sila hidrostatičkog tlaka modelira se članom:

$$I_1 = \int_0^h (h - \eta) B(\eta, x) d\eta.$$

Sila koja nastaje zbog longitudinalne varijacije u širini kanala modelira se članom:

$$I_2 = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial B(\eta, x)}{\partial x} d\eta.$$

Izvornim članom $S_b = -\frac{dz}{dx}$ modelira se ubrzanje sile teže na fluid zbog nagiba kanala dok član $S_f = n^2 Q |Q| P^{4/3} A^{-10/3}$ modelira trenje.

U gore spomenutim izrazima $h = h(A, x)$ je dubina vode, $B = B(h, x)$ širina kanala, $z = z(x)$ opisuje visinu dna korita kanala, $n = n(x)$ je Manningov koeficijent trenja. $P = P(A, x) = \frac{R}{A}$ je mokri perimetar kanala, a R hidraulički radijus.

Da bismo primijenili numeričke metode na ovom modelu moramo odrediti analitičke izraze za neke ranije spomenute članove. Jacobijeva matrica fluksa jednaka je:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}$$

gdje je brzina $v = \frac{Q}{A}$ fluida i $c = \sqrt{g \frac{A}{B}}$ brzina gibanja valova na površini fluida tj. brzina gibanja poremećaja. Svojsstvene vrijednosti su $\lambda^{(1),(2)} = v \mp c$ iz čega slijedi da je sustav (3.6) strogo hiperbolički. Lijeve i desne svojsstvene vektore možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{r}^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Analogno modelu plitkih voda, može se pokazati da sustav ima dva bitno nelinearna karakteristična polja. Budući da ovaj model vrijedi za kanale s općenitom geometrijom, vektorom \mathbf{v} ćemo označiti prostornu ovisnost fluksa koja nastaje zbog promjene širine kanala

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{\partial I_1}{\partial x} \Big|_{A=const.} \end{pmatrix}.$$

Član \mathbf{v} može se zapisati [63] u obliku pogodnom za numeričku aproksimaciju :

$$\mathbf{v} = g \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dI_1}{dx} - \frac{A}{B} \frac{dA}{dx} \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \frac{dI_1}{dx} - A \frac{dh}{dx}.$$

Za implicitne numeričke metode potrebno je odrediti i neke dodatne Jakobijeve matrice:

$$\mathbf{J}_v = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}} = -g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{A}{B^2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial h} \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dx} \right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{u}} = g \left(\left(\frac{1}{B} \frac{dA}{dx} - \frac{d(h+z)}{dx} \right) - S_f \left(-\frac{7}{3} + \frac{4}{3} \frac{A}{BP} \frac{\partial P}{\partial h} \right) \quad -\frac{2S_f}{Q} \right).$$

Numerička aproksimacija navedenih izraza ovisi o potrebama pojedine numeričke metode.

4 STANDARDNI WENO

PRISTUP

Vrlo raširen pristup u konstrukciji numeričke metode za hiperboličke zakone ravnoteže je metoda linija. Osnovna ideja metode linija je razdvojiti prostornu i vremensku diskretizaciju da bi se prostorni i vremenski dio jednadžbe mogli razmatrati gotovo odvojeno.

Zakon ravnoteže zapišemo tako da se odvoje vremenske i prostorne derivacije

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, x)}{\partial x} + \mathbf{s}(\mathbf{u}, x). \quad (4.1)$$

Na desnoj strani jednadžbe (4.1) su isključivo prostorne derivacije. Sljedeći korak je prostorna diskretizacija domene, vektora stanja i desne strane jednadžbe (4.1). Domenu podijelimo na $N + 1$ numeričkih ćelija ili čvorova te odaberemo odgovarajuće numeričke aproksimacije fluksa i izvornih članova.

Nakon prostorne diskretizacije i aproksimacije preostaje nam riješiti sustavobičnih diferencijalnih jednadžbi koji možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{d\mathbf{u}_i(t)}{dt} = \mathbf{L}_i(\mathbf{u}_0(t), \dots, \mathbf{u}_N(t)), \quad i = 0, \dots, N \quad (4.2)$$

pri čemu je \mathbf{L}_i komponenta diskretnog prostornog operatora. Sustav (4.2) detaljnije ćemo opisati u nastavku. Preostaje nam diskretizirati i vremensku domenu, tj. sa \mathbf{u}_i^n ćemo označiti stanje pridruženo i -tom čvoru, odnosno ćeliji u n -tom vremenskom sloju t^n . Istu oznaku za vremenski sloj koristit ćemo za numeričke aproksimacije fluksa i izvornog člana. Vremensku integraciju sustava (4.2) Runge–Kutta metodom objasniti ćemo u poglavlju 4.3.

4.1 Metoda konačnih volumena

Jedan od mogućih pristupa prostornoj diskretizaciji desne strane jednadžbe (4.1) jest metoda konačnih volumena koja je motivirana integralnom formom zakona očuvanja.

Prostornu domenu podijelimo na numeričke ćelije $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ te svakoj ćeliji pridružimo funkciju $\mathbf{u}_i(x, t)$ koja aproksimira vektor stanja. U

nastavku ćemo koristiti sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \\ x_i &= \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2} \\ \Delta x &= \max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i.\end{aligned}$$

Srednju vrijednost vektora stanja u ćeliji I_i u trenutku t označimo:

$$\bar{\mathbf{u}}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t) dx.$$

Da bismo dobili oblik (4.2), jednadžbu (4.1) podijelimo sa Δx_i i integriramo po numeričkoj ćeliji I_i :

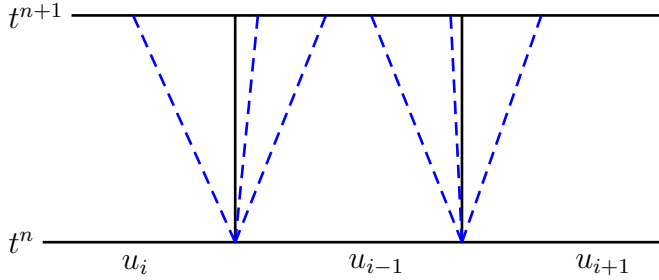
$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t)}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x_i} \left(\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t), x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t), x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{s}(\mathbf{u}(x, t), x) dx.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Vrijednost fluksa na rubu numeričke ćelije i integral izvornog člana u jednadžbi (4.3) zamijenimo odgovarajućim numeričkim aproksimacijama koje ćemo označiti sa $\tilde{\mathbf{f}}_{i\pm\frac{1}{2}}$ i \mathbf{s}_i . Metodu konačnih volumena možemo zapisati u konzervativnoj formi:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} \left(\tilde{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{f}}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{\Delta x_i} \mathbf{s}_i \equiv \mathbf{L}_i(\bar{\mathbf{u}}).\quad (4.4)$$

Forma jednadžbe (4.4) pogodna je za primjenu Runge–Kutta metoda za vremensku integraciju. Zbog dobrih svojstava koristit ćemo SSP Runge–Kutta metode koje će biti opisane u poglavlju 4.3.

Numerički fluks na rubu numeričke ćelije odredit ćemo u skladu s metodom Godunova, tj. na temelju rješenja lokalnog Riemannova problema na rubu numeričke ćelije. Najjednostavniji izbor za funkciju $\mathbf{u}_i(x, t)$ koju smo pridružili numeričkoj ćeliji jest konstantno stanje $\mathbf{u}_i(x, t) = \bar{\mathbf{u}}_i(t)$, ali može se koristiti i složenija rekonstrukcija vektora stanja kao što je WENO rekonstrukcija koja će biti opisana poglavlju 4.2. Na taj način dobijemo aproksimaciju vektora stanja s po dijelovima glatkim funkcijama. Prekidi su dopušteni na rubovima numeričkih ćelija. Za dovoljno mali Δt na rubu numeričke ćelije možemo promatrati izolirane lokalne Riemannove probleme. Složenu strukturu rješenja lokalnog Riemannova problema moguće je vidjeti na slici 4.1 gdje se isprekidanim crtama prikazane fronte valova koji nastaju na rubu ćelije. Lokalni Riemannov problem moguće je riješiti nekim egzaktim ili približnim rješavačem. S obzirom da je egzaktno rješavanje uglavnom



Slika 4.1: Godunovljeva metoda

vrlo zahtjevno, tipično se uvodi numerička aproksimacija fluksa koju možemo zapisati u obliku:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^-, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^+), \quad (4.5)$$

gdje je \mathbf{F} monotoni numerički fluks konzistentan s fizikalnim fluksom [53] te $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^- = \mathbf{u}_i(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$ i $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{u}_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. Numerički fluks aproksimira stanje fluksa na rubu numeričke ćelije za tekući vremenski sloj.

WENO metode za konačne volumene čine široku klasu numeričkih metoda za zakone očuvanja i ravnoteže. Moguće je odabrati različite WENO rekonstrukcije vektora stanja, različite Riemannove rješavače i tretiranje izvornog člana. Detaljniji opis WENO metode za konačne volumene može se pročitati u [53]. Proširenje WENO metode za hiperboličke zakone ravnoteže može se pronaći u radovima [58, 59, 64, 65, 16, 49].

4.1.1 Roeva linearizacija i aproksimacija fluksa

Rješenje Riemannova problema za nelinearne jednadžbe ima vrlo složenu strukturu čija je implementacija računalno zahtjevna, stoga se nastoje izbjeći egzaktni rješavači te se koriste numeričke aproksimacije oblika (4.5). Takva aproksimacija može se bazirati na lokalnoj linearizaciji fluksa na rubu numeričke ćelije. U poglavlju 2.2 smo vidjeli da je rješenje linearnog modela moguće jednostavno odrediti. Također, u (2.26) smo kompaktno zapisali rješenje Riemannova problema za linearne hiperboličke sustave koje možemo iskoristiti za aproksimaciju rješenja nelinearnih sustava. Da bismo to učinili moramo lokalno linearizirati jednadžbu, tj. moramo odabrati konstantnu matricu koja će aproksimirati Jacobijevu matricu fluksa na rubu numeričke ćelije. Za aproksimaciju Jacobijeve matrice na rubu $i + 1/2$ koristit ćemo oznaku $\mathbf{A}_{i+1/2}$. Matrica ne može biti proizvoljna, već mora zadovoljiti nužne uvjete:

- matrica $\mathbf{A}_{i+1/2}$ mora imati realne i različite svojstvene vrijednosti

- $\mathbf{A}_{i+1/2} \rightarrow \frac{df}{du}$ kada $\mathbf{u}_{i+1/2}^-, \mathbf{u}_{i+1/2}^+ \rightarrow \mathbf{u}$.

Jednu od često korištenih linearizacija Jacobijeve matrice fluksa koja se određuje iz jednakosti

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^+ - \mathbf{f}_{i+1/2}^- = \mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{u}_{i+1/2}^+ - \mathbf{u}_{i+1/2}^-)$$

zovemo Roeva linearizacija [51]. Sustav nakon Roeve linearizacije ostaje strogo hiperbolički te se može dijagonalizirati:

$$\mathbf{A}_{i+1/2} = \mathbf{R}_{i+1/2}\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}\mathbf{L}_{i+1/2}.$$

U slučaju kada je fluks prostorno ovisan, potrebno je proširiti definiciju Roeve linearizacije, tj. potrebno je odrediti matricu $\mathbf{A}_{i+1/2}$ i vektor $\mathbf{v}_{i+1/2}$ tako da bude zadovoljena jednakost:

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^+ - \mathbf{f}_{i+1/2}^- = \mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{u}_{i+1/2}^+ - \mathbf{u}_{i+1/2}^-) + \Delta x \mathbf{v}_{i+1/2}. \quad (4.6)$$

$\mathbf{v}_{i+1/2}$ je numerička aproksimacija prostorne derivacije fluksa. Prostorno ovisni fluks pojavljuje se kod nekih zakona ravnoteže kao što je model otvorenih vodotoka u poglavlju 3.3.

Nakon Roeve linearizacije, znamo odrediti približno rješenje Riemannova problema sastavljena od n -valova proporcionalnih desnim svojstvenim vektorima $\mathbf{r}_{i+1/2}^{(p)}$ koji se kreću brzinama jednakima svojstvenim vrijednostima $\lambda_{i+1/2}^{(p)}$, znamo odrediti.

Egzaktnorješenje Riemannova problema za nelinearne jednadžbe sastoji se od uglavnom izoliranih šokova i kontaktnih diskontinuiteta između kojih je rješenje glatko. Na glatkim dijelovima domene linearizacija je opravdana jer je Jacobijeva matrica skoro konstantna $\mathbf{A}_{i+1/2}^- \approx \mathbf{A}_{i+1/2} \approx \mathbf{A}_{i+1/2}^+$. Kada je u pitanju šok val ili kontaktni diskontinuitet teže je opravdati linearizaciju jer je pravo rješenje nelinearnog problema daleko složenije od problema dobivenog linearizacijom. Osim povremenih interakcija šok valovi i kontaktni diskontinuiteti su uglavnom međusobno izolirani, tj. skok se nalazi u samo jednom karakterističnom polju, dok je u ostalim poljima rješenje glatko. Ako su stanja $\mathbf{u}_{i+1/2}^-$ i $\mathbf{u}_{i+1/2}^+$ povezana p -valom, tada je razlika $\mathbf{u}_{i+1/2}^+ - \mathbf{u}_{i+1/2}^-$ jednaka svojstvenom vektoru $\mathbf{r}_{i+1/2}^{(p)}$ Roeve linearizirane matrice $\mathbf{A}_{i+1/2}$. Dakle, ako je egzaktno rješenje p -val, tada se egzaktno rješenje Riemannova problema podudara s rješenjem dobivenim Roevom linearizacijom.

Kako bismo postigli dobru aproksimaciju, cilj nam je odrediti numeričku aproksimaciju fluksa $\mathbf{f}_{i+1/2}^n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1/2}^-, \mathbf{u}_{i+1/2}^+)$ na način da metoda konačnih volumena (4.4) približno rješava Riemannov problem na rubu ćelije $x_{i+1/2}$.

Roeva aproksimacija numeričkog fluksa bazirana je na linearizaciji Jacobijeve matrice fluksa na rubu numeričke ćelije koja omogućuje „upwind” aproksimaciju prostorne derivacije fluksa

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^-, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^+) &= \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^- + \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^+) - \frac{1}{2}|\mathbf{Q}_{i+1/2}|(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^-) \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbf{Q}_{i+1/2}^{-1}|\mathbf{Q}_{i+1/2}|\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

pri čemu je

$$|\mathbf{Q}_{i+1/2}| = \mathbf{R}_{i+1/2}|\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}|\mathbf{L}_{i+1/2}. \quad (4.8)$$

Za matricu $\mathbf{Q}_{i+1/2}$ možemo odabrati upravo Roevu linearizaciju Jacobijeve matrice fluksa koju smo označavali sa $\mathbf{A}_{i+1/2}$. U posebnim slučajevima nužno je napraviti korekciju matrice $|\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}|$ kako bi se osigurala konvergencija metode prema entropijskom rješenju. Harten–Hymanova entropijska korekcija [42] koristi se kada su svojstvene vrijednosti blizu nule. Može se pokazati da je metoda koja se temelji na Roevoj aproksimaciji fluksa konzistentna s viskoznom paraboličkom jednadžbom. Roeva metoda unosi umjetno dodanu viskoznost ili numeričku difuziju koja ovisi o svojstvenim vrijednostima $\lambda_{i+1/2}^{(p)}$. Ako u nekom p -tom polju egzaktno rješenje sadrži val razrjeđenja, a svojstvena je vrijednost u tom polju jednaka nuli, tada Roeva metoda nema dovoljno numeričke difuzije koja bi izgladila umjetno generiran stacionarni šok. Harten–Hymanovom korekcijom umjetno se povećava vrijednost svojstvene vrijednosti kako bi se izbjegla ova situacija. Nažalost ova korekcija nije jasno definirana, tj. ovisi o konkretnim jednadžbama i posebno se definira za svaki model.

Dodatno je moguće uvesti proširenje Roevog fluksa tako da se u istoj formi koristi metoda višeg reda točnosti

$$|\mathbf{Q}_{i+1/2}| = \mathbf{R}_{i+1/2}|\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}|\mathbf{\Psi}_{i+1/2}\mathbf{L}_{i+1/2}.$$

Odabirom matrice $\mathbf{\Psi}_{i+1/2}$ mogu se dobiti različite metode

$$\mathbf{\Psi}_{i+1/2} = \mathbf{I} + \text{diag} \left(\varphi(\eta_{i+1/2}^{(p)}) \left(1 - \left| \lambda_{i+1/2}^{(p)} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \right)_{p=1, \dots, m}, \quad (4.9)$$

gdje je $\varphi(\eta_{i+1/2}^{(p)})$ neki fluks limiter [43] koji ovisi o skalarima $\eta_{i+1/2}^{(p)}$ u svakom karakterističnom polju koji se računaju po formuli:

$$\eta_{i+1/2}^{(p)} = \frac{\left(\mathbf{u}_{i+1-\text{sgn}(\lambda_{i+1/2}^{(p)})} - \mathbf{u}_{i-\text{sgn}(\lambda_{i+1/2}^{(p)})} \right) \mathbf{l}_{i+1/2}^{(p)}}{(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \mathbf{l}_{i+1/2}^{(p)}}.$$

Za $\varphi(\eta_{i+1/2}^{(p)}) = 0$, $p = 1, \dots, m$ dobije se klasična Roeva metoda prvoga reda točnosti, a u slučaju $\varphi(\eta_{i+1/2}^{(p)}) = 1$, $p = 1, \dots, m$ dobije se nestabilna Lax-Wendroffova metoda drugog reda točnosti.

4.2 WENO rekonstrukcija

Kod primjene Godunovljeve metode, svakoj smo numeričkoj ćeliji pridružili glatku funkciju $\mathbf{u}_i(x, t)$ koja aproksimira vektor stanja u toj numeričkoj ćeliji. Da bi aproksimacija $\mathbf{u}_i(x, t)$ bila glatka i neoscilirajuća možemo koristiti WENO rekonstrukciju. U nastavku ćemo opisati standardnu racionalnu WENO rekonstrukciju čiji je cilj neoscilirajuća aproksimacija visokog reda točnosti.

Neka su umjesto vrijednosti funkcije u točkama poznate prosječne vrijednosti \bar{v}_i funkcije $v(x)$ u ćeliji I_i :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

Zadatak je odrediti aproksimaciju vrijednosti funkcije $v(x)$ visokog reda točnosti. Ako je funkcija $v(x)$ dovoljno, glatka želimo odrediti aproksimaciju $p(x)$ funkcije $v(x)$ reda točnosti m u ćeliji I_i , odnosno:

$$p(x) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^m), \quad x \in I_i, \quad (4.10)$$

za odabrani red m , $1 \leq m \leq 2r - 1$. Dodatno, želimo da $p(x)$ zadovoljava:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} p(\xi) d\xi = \bar{v}_i. \quad (4.11)$$

Rekonstrukcija polinomima

Krenut ćemo od polinoma $p(x)$ stupnja $r - 1$ koji aproksimira glatku funkciju $v(x)$ u ćeliji I_i :

$$p(x) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^r), \quad x \in I_i. \quad (4.12)$$

Polinom, osim točnosti, mora zadovoljiti i sljedeći uvjet:

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} p(\xi) d\xi = \bar{v}_j, \quad j = i - r + 1 + s, \dots, i + s. \quad (4.13)$$

Različitih polinoma koji zadovoljavaju (4.12) i (4.13) ima točno r . Označimo te polinome sa $p^s(x)$, $s = 0, \dots, r - 1$. Koeficijente polinoma $p^s(x)$, $s = 0, \dots, r - 1$ možemo odrediti iz linearnog sustava koji se dobije iz jednadžbe (4.13). Mi ćemo koristiti drukčiji pristup koji je pogodniji za korištenje u daljnjem radu.

Najprije ćemo odrediti primitivnu funkciju:

$$V(x) = \int_a^x v(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Na temelju prosječnih vrijednosti funkcije $v(x)$ dobiju se vrijednosti primitivne funkcije (4.14) na rubovima ćelija:

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=1}^i \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^i \bar{v}_j \Delta x_j.$$

Primitivnu funkciju $V(x)$ možemo aproksimirati polinomima $P^s(x)$, $s = 0, \dots, r-1$ stupnja r koji interpoliraju $V(x)$ u čvorovima $x_{i-r+s+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}}$ koji su rubovi ćelija u uzorku (skupu susjednih ćelija):

$$S_{r,s}(i) = \{I_{i-r+s+1}, \dots, I_{i+s}\}, \quad s = 0, \dots, r-1.$$

Svakom polinomu $P^s(x)$, $s = 0, \dots, r-1$ pripada jedan uzorak $S_{r,s}(i)$, pri čemu svaki od uzoraka $S_{r,s}(i)$ sadrži r susjednih ćelija među kojima je i ćelija I_i . Konačno polinomi $p^s(x)$ dobiju se iz

$$p^s(x) = P^{s'}(x).$$

Iz činjenice da su polinomi $P^s(x)$ interpolacijski pa u slučaju glatke funkcije $v(x)$ slijedi:

$$p^s(x) = P^{s'}(x) = V'(x) + \mathcal{O}(\Delta x^r) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^r).$$

Nadalje, iz definicije interpolacijskog polinoma slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j} (P^s(x_{j+\frac{1}{2}}) - P^s(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} (V(x_{j+\frac{1}{2}}) - V(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} v(\xi) d\xi = \bar{v}_j \end{aligned}$$

Uzorci $S_{r,s}(i)$, $s = 0, \dots, r-1$ zajedno čine jedan veći uzorak koji sadrži $2r-1$ susjednih ćelija i koji označimo sa

$$\mathcal{T}(i) = \bigcup_{s=0}^{r-1} S_{r,s}(i).$$

Na isti način kao što smo uzorcima $S_{r,s}(i)$ pridružili polinome $p^s(x)$, uzorku $\mathcal{T}(i)$ možemo pridružiti rekonstrukcijski polinom $q(x)$ stupnja $2r-2$. Slično kao za polinome $p^s(x)$ moguće je pokazati za glatku funkciju $v(x)$ vrijedi

$$\begin{aligned} q(x) &= v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{2r-1}), \quad x \in \mathcal{T}(i) \\ \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} q(\xi) d\xi &= \bar{v}_j, \quad I_j \in \mathcal{T}(i). \end{aligned}$$

Polinom $q(x)$ je rekonstrukcija visokog reda točnosti za glatke funkcije $v(x)$. Međutim, tako dobiveni polinom visokog stupnja će oscilirati u slučaju kada funkcija $v(x)$ ima prekide.

4.2.1 Idealni težinski faktori

Polinom $q(x)$ može se zapisati kao težinska kombinacija polinoma nižeg reda $p^s(x)$, $s = 0, \dots, r-1$, odnosno

$$q(x) = \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) p^s(x), \quad x \in I_i, \quad (4.15)$$

pri čemu je $C_{r,s}(x)$ racionalna funkcija koja se često naziva idealnim težinskim faktorom.

Kako bismo odredili funkcije $C_{r,s}(x)$ moramo zapisati polinome $q(x)$ i $p^s(x)$ u nekoj bazi. S obzirom na poznate podatke bilo bi najbolje da se polinomi izraze kao linearna kombinacija prosječnih stanja \bar{v}_j . Takav zapis omogućuje brzu i efikasnu evaluaciju.

Interpolacijske polinome $P^s(x)$ primitivne funkcije $V(x)$ može se zapisati u Lagrangeovoj formi

$$P^s(x) = \sum_{m=0}^r V(x_{i-r+s+m+\frac{1}{2}}) \prod_{l=0, l \neq m}^r \frac{x - x_{i-r+s+l+\frac{1}{2}}}{x_{i-r+s+m+\frac{1}{2}} - x_{i-r+s+l+\frac{1}{2}}},$$

Nakon što ovaj izraz deriviramo i stavimo u traženi oblik dobije se:

$$p^s(x) = \sum_{j=0}^{r-1} a_{r,s,j}(x) \bar{v}_{i-r+1+s+j}, \quad (4.16)$$

gdje je

$$a_{r,s,j}(x) = \sum_{m=j+1}^r \frac{\sum_{l=0, l \neq m}^r \prod_{q=0, q \neq l, m}^r (x - x_{i-r+s+q+\frac{1}{2}})}{\prod_{l=0, l \neq m}^r (x_{i-r+s+m+\frac{1}{2}} - x_{i-r+s+l+\frac{1}{2}})} \Delta x_{i-r+1+s+j}. \quad (4.17)$$

Iz (4.17) može se vidjeti da koeficijenti iz $a_{r,s,j}(x)$ ne ovise o vrijednostima funkcije $v(x)$ već samo o strukturi mreže. Također, iz (4.16) i (4.17) možemo zaključiti da se vrijednosti polinoma $p^s(x)$ mogu odrediti za svaki $x \in I_i$ i to kao linearna kombinacija prosječnih vrijednosti funkcije $v(x)$.

Na sličan način možemo zapisati $q(x)$ na uzorku $\mathcal{T}(i)$:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{2r-2} \tilde{a}_{r,k}(x) \bar{v}_{i-r+1+k}, \quad (4.18)$$

gdje je

$$\tilde{a}_{r,k}(x) = \sum_{m=k+1}^{2r-2} \frac{\sum_{l=0, l \neq m}^{2r-2} \prod_{q=0, q \neq l, m}^{2r-2} (x - x_{i-r+s+q+\frac{1}{2}})}{\prod_{l=0, l \neq m}^{2r-2} (x_{i-r+s+m+\frac{1}{2}} - x_{i-r+s+l+\frac{1}{2}})} \Delta x_{i-r+1+k}.$$

Preko jednadžbi (4.15),(4.16) i (4.18) možemo povezati izraz za evaluaciju koeficijenata $C_{r,s}(x)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2r-2} \tilde{a}_{r,k}(x) \bar{v}_{i-r+1+k} &= \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) \sum_{j=0}^{r-1} a_{r,s,j}(x) \bar{v}_{i-r+1+s+j} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) a_{r,s,j}(x) \bar{v}_{i-r+1+s+j} \\
&= \sum_{k=0}^{2r-2} \sum_{s=\max\{0,k-r+1\}}^{\min\{k,r-1\}} C_{r,s}(x) a_{r,s,k-s}(x) \bar{v}_{i-r+1+k}.
\end{aligned}$$

Usporedbom lijeve i desne strane jednadžbe, dobije se rekurzivni algoritam za određivanje $C_{r,s}(x)$, odnosno:

$$C_{r,s}(x) = \frac{\tilde{a}_{r,s}(x) - \sum_{k=0}^{s-1} C_{r,k}(x) a_{r,k,s-k}(x)}{a_{r,s,0}(x)}, \quad s = 0, \dots, r-1.$$

Može se pokazati da je $\sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) = 1$. Za razliku od polinoma $a_{r,s,j}(x)$, $C_{r,s}(x)$ su racionalne funkcije koje nisu svugdje dobro definirane. Kada bi se polovi funkcije $C_{r,s}(x)$ pojavljivali samo izvan centralne ćelije I_i , tada bi evaluacija bila sigurna, ali su nažalost, polovi funkcije $C_{r,s}(x)$ prisutni unutar centralne ćelije. Numerička evaluacija polinoma $q(x)$ na temelju izraza (4.15) je nestabilna u blizini polova funkcija $C_{r,s}(x)$. Polovi funkcije $C_{r,s}(x)$ nisu jedini problem. Vidjet ćemo da funkcije $C_{r,s}(x)$ nisu pozitivne za svaki x centralne ćelije pa se $q(x)$ u tim čvorovima ne može zapisati kao konveksna kombinacija polinoma $p^s(x)$.

U nastavku ćemo vidjeti da je nama najčešće potrebna evaluacija u rubnim točkama ćelije u kojima su $C_{r,s}(x)$ neprekidne i pozitivne što znači da je evaluacija $q(x)$ u rubnim čvorovima sigurna.

4.2.2 Težinska neoscilirajuća rekonstrukcija

Oscilacije u rekonstrukcijskoj funkciji koje nastaju zbog korištenja polinoma visokog stupnja su nepoželjne, naročito kada se koriste kao dio numeričke metode za hiperboličke zakone očuvanja. WENO rekonstrukcija nastoji umanjiti oscilacije koje nastaju kada funkcija $v(x)$ nije dovoljno glatka. Umjesto polinoma $q(x)$ u (4.15) možemo uzeti konveksnu kombinaciju oblika:

$$w_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \omega_{r,s}(x) p^s(x), \quad (4.19)$$

gdje se nelinearne težinske funkcije $\omega_{r,s}(x)$ koriste umjesto idealnih težina. $\omega_{r,s}(x)$ moraju biti odabrane tako da ne odstupaju previše od idealnih težina $C_{r,s}(x)$ ako su podaci na uzorku $S_{r,s}(i)$ dovoljno glatki, te u tom slučaju zahtjevamo:

$$\omega_{r,s}(x) = C_{r,s}(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{r-1}), \quad s = 0, \dots, r-1. \quad (4.20)$$

Također, $\omega_{r,s}(x)$ moraju zadovoljiti i dodatne uvjete koji osiguravaju konveksnost:

$$\begin{aligned} \omega_{r,s}(x) &\geq 0, \quad s = 0, \dots, r-1 \\ \sum_{s=0}^{r-1} \omega_{r,s}(x) &= 1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

U slučaju kada je funkcija $v(x)$ dovoljno glatka, uvjeti (4.20) i (4.21) će osigurati visoki red točnosti aproksimacije $\omega_r(x)$

$$\begin{aligned} w_r(x) - v(x) &= \sum_{s=0}^{r-1} \omega_{r,s}(x) p^s(x) - \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) p^s(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{2r-1}) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} (\omega_{r,s}(x) - C_{r,s}(x)) (p^s(x) - v(x)) + \mathcal{O}(\Delta x^{2r-1}) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \mathcal{O}(\Delta x^{r-1}) \mathcal{O}(\Delta x^r) + \mathcal{O}(\Delta x^{2r-1}) = \mathcal{O}(\Delta x^{2r-1}). \end{aligned}$$

Odabir težinskih funkcija je ključan za dobivanje neoscilirajuća svojstva rekonstrukcijske funkcije. Postoji više predloženih rješenja kojima se mogu zadovoljiti spomenuti uvjeti. Uglavnom se koristi sljedeći oblik:

$$\omega_{r,s}(x) = \frac{\alpha_{r,s}(x)}{\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{r,j}(x)}, \quad (4.22)$$

gdje je

$$\alpha_{r,s}(x) = \frac{C_{r,s}(x)}{\epsilon + SI_{r,s}^2}.$$

Parametar ϵ uvodi se da bi izbjegli dijeljenje s nulom i često se uzima $\epsilon = 10^{-15}$. Težinske funkcije $\omega_{r,s}(x)$ ovise o indikatorima glatkoće $SI_{r,s}$ funkcije $v(x)$ na uzorku $S_{r,s}(i)$. EkspONENT indikatora glatkoće je pozitivan broj koji ne utječe na točnost, već regulira neoscilirajuća svojstva aproksimacije. Ako se unutar uzorka pojavi funkcijski skok, tada indikator glatkoće $SI_{r,s}$ mora biti relativno velik, a pripadajući težinski faktor $\omega_{r,s}(x) \approx 0$. Na ovaj način se umanjuje utjecaj oscilirajućih polinoma $p^s(x)$ na konačnu rekonstrukciju.

4.2.3 Indikatori glatkoće

Uvjet (4.20) će biti zadovoljen ako indikatori glatkoće zadovoljavaju uvjet:

$$SI_{r,s} = D(1 + \mathcal{O}(\Delta x^{r-1})), \quad s = 0, \dots, r-1,$$

za neku konstantu $D \neq 0$. Ako funkcija $v(x)$ ima skok na uzorku $S_{r,s}(i)$, tada indikator mora biti oblika:

$$SI_{r,s} = \mathcal{O}(1).$$

Indikatori glatkoće koji zadovoljavaju navedene uvjete mogu se naći u [38]. Indikatore ćemo računati iz izraza:

$$SI_{r,s} = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{I_i} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l p^s(x)}{dx^l} \right)^2 dx. \quad (4.23)$$

Ovi indikatori glatkoće su zapravo seminorma koja ovisi o \mathbf{L}^2 normama derivacija polinoma $p^s(x)$ u ćeliji I_i te predstavljaju mjeru oscilacija polinoma $p^s(x)$. Član Δx^{2l-1} nije ključan za definiciju već se koristi da bi se otklonio utjecaj veličine mreže u slučaju kada se koristi neuniformna mreža.

Evaluacija indikatora glatkoće je računalno najzahtjevniji dio WENO metode čak i u slučaju uniformne mreže. U slučajevima neuniformne mreže evaluacija indikatora glatkoće je bitno složenija i računalno zahtjevnija [15, 10].

4.2.4 Implementacija WENO rekonstrukcije

Kod implementacije WENO rekonstrukcije moramo voditi računa o efikasnosti evaluacije. S obzirom da su dostupne prosječne vrijednosti \bar{v}_i , rekonstrukciju (4.19) pogodno je zapisati na sljedeći način:

$$w_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} \omega_{r,s}(x) a_{r,s,j}(x) \bar{v}_{i-r+1+s+j}.$$

Težinski koeficijenti $a_{r,s,j}(x)$ i $C_{r,s}(x)$ ovise samo o geometriji mreže i mogu se izračunati za unaprijed poznatu lokaciju u ćeliji. Taj postupak je potrebno napraviti samo jednom prije početka proračuna pa njihova evaluacija ne utječe na brzinu izvođenja. U slučaju uniformnih mreža spomenuti koeficijenti su konstantni i ne ovise o veličini mreže i ćeliji već samo o redu rekonstrukcije i čvoru x . Indikatori glatkoće ovise i o vrijednostima \bar{v}_i pa je njihova evaluacija vrlo zahtjevnija čak i na uniformnim mrežama.

Može se dogoditi da se u nekim dijelovima ćelije pojave negativne težine zbog kojih se javljaju nestabilnosti u WENO algoritmu. U tim je situacijama nužno koristiti dodatne popravke algoritma kao u [55]. Također u nekim se

točkama javljaju diskontinuiteti [47] koji nisu u svim slučajevima adekvatno riješeni spomenutim popravkom u radu [55].

Zbog upotrebe propisanog algoritma WENO rekonstrukcije u približnom rješavaču Riemannova problema (4.5)-(4.8), posebno je važna evaluacija vrijednosti na rubu numeričke ćelije. Te se vrijednosti mogu odrediti izrazima:

$$w_{i+\frac{1}{2},r}^- = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} \omega_{r,s}^-(x_{i+\frac{1}{2}}) a_{r,s,j}(x_{i+\frac{1}{2}}) \bar{v}_{i-r+1+s+j},$$

$$w_{i+\frac{1}{2},r}^+ = \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{r-1} \omega_{r,s}^+(x_{i+\frac{1}{2}}) a_{r,s,j}(x_{i+\frac{1}{2}}) \bar{v}_{i-r+1+s+j}.$$

Ovdje je $w_{i+\frac{1}{2},r}^-$ vrijednost funkcije $w_r(x)$ pridružene ćeliji I_i u čvoru $x_{i+\frac{1}{2}}$, a $w_{i+\frac{1}{2},r}^+$ je vrijednost funkcije $w_r(x)$ pridružene ćeliji I_{i+1} u čvoru $x_{i+\frac{1}{2}}$.

4.3 Vremenska integracija

Za poznati numerički prostorni operator sustava, tj. poznatu desnu stranu sustava (4.2) ostaje problem integracije sustava vremenski ovisnih običnih diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetom. Sustav (4.2) moguće je riješiti upotrebom neke Runge–Kutta (RK) metode. Vremensku domenu ćemo diskretizirati vremenskim slojevima gdje ćemo sa t^{n+1} označiti buduću, a sa t^n tekući vremenski sloj. Iste oznake koristit ćemo za vektore stanja, flukseve, itd.

Algoritam RK metode sa s stadija može se jedinstveno zapisati u standardnoj Butcherovoj formi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(j)} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^s \kappa_{lj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}), \quad j = 1, \dots, s \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^s b_l \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Svakoj RK metodi sa s stadija može se pridružiti Butcherova tablica

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & \kappa_{11} & \dots & \kappa_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_s & \kappa_{s1} & \dots & \kappa_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s, \end{array} \quad (4.25)$$

gdje je $c_i = \sum_{j=1}^s \kappa_{ij}$, $i = 1 \dots s$.

RK metode ćemo podijeliti na eksplicitne i implicitne metode. RK metoda (4.24) sa s stadija je eksplicitna ako je $\kappa_{ij} = 0$ za sve $j \geq i$, gdje je $i, j = 1 \dots s$. Butcherova tablica (4.25) za eksplicitne metode poprima oblik

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & \kappa_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_s & \kappa_{s1} & \dots & \kappa_{s(s-1)} & 0 \\ \hline & b_1 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

Eksplicitne metode su bitno jednostavnije jer se algoritam može izvoditi bez rješavanja sustava jednačbi.

Za hiperboličke zakone očuvanja većinom se koriste eksplicitne RK metode, dok se implicitne metode koriste uglavnom za određivanje stacionarnih rješenja. U ovom radu ćemo, implicitne metode ćemo koristiti i u nestacionarnim slučajevima. Numeričke metode s implicitnom RK integracijom i WENO rekonstrukcijom visokog reda točnosti su izuzetno računalno zahtjevne i znatno složenije od eksplicitnih metoda. U radu [29] promatrane su implicitne RK s WENO metodom za konačne razlike, ali rezultati nisu bili ohrabrujući. U ovom ćemo radu opisati WENO metodu za konačne volumene s implicitnom RK integracijom koja daje vrlo dobre rezultate.

Zbog nelinearnosti sustava (4.2) i diskontinuiteta koji se pojavljuju kod hiperboličkih sustava, linearno stabilne RK metode nisu dale zadovoljavajuće rezultate. Za hiperboličke sustave nužno je uvesti jaču mjeru stabilnosti, odnosno jako stabilne (SSP) RK metode. Zbog svojstva da ne povećavaju totalnu varijaciju rješenja, ove metode su se najprije zvale TVD (*total variation diminishing*), da bi se kasnije promijenio naziv u SSP.

SSP metode su bazirane na ideji očuvanja stabilnosti rješenja sustava običnih diferencijalnih jednačbi koje je stabilno u odnosu na rješenje dobiveno eksplicitnom Eulerovom metodom u nekoj normi.

Pretpostavimo da je odabran numerički prostorni operator $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ tako da se za dovoljno mali vremenski korak $\Delta t \leq \Delta t_{FE}$ može odrediti rješenje sustava (4.2) pomoću Eulerove eksplicitne metode

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u})$$

tako da je pritom zadovoljen uvjet

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq \|\mathbf{u}^n\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ neka seminorma ili konveksni funkcional. Δt_{FE} je najveći vremenski korak za koji je Eulerova eksplicitna metoda stabilna.

Definicija 4.1 Za $\Delta t_{FE} > 0$ neka je $\mathcal{L}(\Delta t_{FE})$ skup svih parova $(\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ takvih da numeričko rješenje dobiveno Eulerovom integracijom sustava (4.2) zadovoljava $\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq \|\mathbf{u}^n\|$ kada je $\Delta t \leq \Delta t_{FE}$. SSP koeficijent Runge–Kutta metode je najveća konstanta $c_{SSP} \geq 0$ takva da za numeričko rješenje dobiveno Runge–Kutta metodom vrijedi

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq \|\mathbf{u}^n\|$$

za sve $(\mathbf{L}, \|\cdot\|) \in \mathcal{L}(\Delta t_{FE})$ kada je

$$\Delta t \leq c_{SSP} \Delta t_{FE}.$$

Ako je $c > 0$ kažemo da je metoda jako stabilna ili SSPRK (strong stability preserving Runge–Kutta).

Ako je prostorna diskretizacija u kombinaciji s eksplicitnom Eulerovom metodom stabilna u nekoj normi za neki vremenski korak, tada je ta stabilnost očuvana i za SSPRK metodu višeg reda točnosti za neki drugi vremenski korak koji je određen SSP koeficijentom. Kod odabira metode naročito je bitno odabrati optimalne SSPRK metode, tj. one koje imaju najveći SSP koeficijent u zadanoj klasi metoda.

U radovima [53, 27, 26, 28, 40] istražene su SSP eksplicitne i implicitne Runge–Kutta metode za vremensku integraciju.

Sve SSP Runge–Kutta metode višeg reda imaju konačan SSP koeficijent. U [40, 19] je dokazano da se SSP koeficijenti mogu odrediti algebarski te su određeni optimalni SSP koeficijenti za neke klase SSP Runge–Kutta metoda.

4.3.1 Eksplicitne SSP metode

Za eksplicitne SSP metode (SSPERK) umjesto Butcherove forme često se koristi Shu-Osherova forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(0)} &= \mathbf{u}^n \\ \mathbf{u}^{(j)} &= \sum_{l=0}^{j-1} (\alpha_{lj} \mathbf{u}^{(l)} + \Delta t \beta_{lj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)})), \quad j = 1, \dots, s \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{(s)}. \end{aligned}$$

Reprezentacija metode u Shu-Osheroj formi nije jedinstvena. Za $\alpha_{lj} \geq 0$ i $\beta_{lj} \geq 0$ možemo odrediti koeficijent $c(\alpha, \beta) = \min_{l,j} \frac{\alpha_{lj}}{\beta_{lj}}$. Za metodu u Butcherovoj formi postoji više reprezentacija u Shu-Osheroj formi sa različitim koeficijentom $c(\alpha, \beta)$, a najveći od svih $c(\alpha, \beta)$ koeficijenata jednak je c_{SSP} koeficijentu. U numeričkim testovima koristit ćemo optimalne eksplicitne metode za $k = 2, 3$ sa k -stadija i k -tog reda točnosti kod kojih je $c_{SSP} = 1$. Za četvrti red točnosti ne postoji SSPERK metoda s četiri stadija pa ćemo koristiti metodu s pet stadija kod koje je $c_{SSP} = 1.508$ [56].

4.3.2 SDIRK

Klasu implicitnih RK metoda koja će se koristiti u ovom radu prikazat ćemo u nastavku. Ta je metoda korištena u radu [19]. Implicitne RK metode kod kojih su svi elementi Butcherove forme iznad glavne dijagonale nula zovemo dijagonalno implicitnim RK metodama, skraćeno DIRK metodama:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(j)} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^j \kappa_{lj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}), \quad j = 1, \dots, s \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^s b_l \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}).\end{aligned}$$

Ako su svi koeficijenti na dijagonali međusobno jednaki i različiti od nule, tada ćemo takvu metodu označiti sa SDIRK (*singly-diagonally-implicit Runge–Kutta*). SDIRK metode su optimalne SSP implicitne metode drugog i trećeg reda točnosti, ali ne postoje SSP SDIRK metode reda točnosti višeg od 4.

U članku [19] pokazane su sljedeće tvrdnje:

- Optimalne implicitne metode drugog i trećeg reda točnosti pripadaju klasi SDIRK metoda.
- Red točnosti SDIRK metode ne može biti viši od $s + 1$, gdje je s broj stadija.
- Ne postoje SSP SDIRK metode reda točnosti viši od 4.

Primjer 4.1 *Kao primjer navodimo koeficijente SDIRK metode zapisane Butcherovom tablicom. Uzmimo SDIRK metodu četvrtog reda točnosti s četiri stadija:*

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 0.09796108 & 0.097961082941 & 0 & 0 & 0 \\ 0.36027915 & 0.262318069183 & 0.097961082941 & 0 & 0 \\ 0.62259722 & 0.230169419019 & 0.294466719347 & 0.097961082941 & 0 \\ 0.88491529 & 0.210562684389 & 0.269382888280 & 0.307008634881 & 0.097961082941 \\ \hline & 0.222119403264 & 0.282060762166 & 0.236881213175 & 0.258938621395 \end{array} \right).$$

Ova SDIRK metoda s četiri stadija je četvrtog reda točnosti čiji je SSP koeficijent $c_{SSP} = 4.2081$. Prije smo spomenuli da ne postoji eksplicitna SSP metoda četvrtog reda točnosti s četiri stadija već koristimo metodu s pet stadija čiji je SSP koeficijent $c_{SSP} = 1.508$. Na ovom primjeru možemo vidjeti da implicitne metode mogu imati znatno šire područje stabilnosti. Koeficijenti SDIRK metoda koje ćemo koristiti u ovom radu mogu naći u [19]

4.3.3 Semiimplicitna metoda prvog reda točnosti

Za metode prvog reda točnosti koristit ćemo klasu SSPRK metoda koje ovise o parametru $\theta \in [0, 1]$ i koju možemo opisati Butcherovom tablicom

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1-\theta & \theta \end{array} \right). \quad (4.26)$$

Za $\theta = 0$ metoda je eksplicitna Eulerova, za $\theta = 1$ metoda je Eulerova potpuno implicitna (FI), a u slučaju $0 < \theta < 1$ dobijemo semiimplicitnu (SI) metodu.

U [32] je dokazano da je u skalarnom slučaju semiimplicitna „upwind” numerička metoda s numeričkim fluksom Roevog tipa TVD, pod uvjetom da vrijedi

$$\text{CFL} \leq \frac{1}{1-\theta}, \quad (4.27)$$

gdje je CFL *Courant–Friedrichs–Lewy* uvjet stabilnosti

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{x,p=1,\dots,m} |\lambda^{(p)}|. \quad (4.28)$$

U slučaju kada je $\theta = 1$ dobije se bezuvjetno stabilna Eulerova implicitna metoda, dok se za $\theta = 0$ dobije uobičajeni uvjet stabilnosti za eksplicitne metode, tj. $\text{CFL} \leq 1$.

5 SEMIIMPLICITNE WENO METODE

U nizu radova uvedena su proširenja klasičnih WENO metoda na sustave s izvornim članom [64, 65, 58, 59, 16, 49]. Ta su proširenja napravljena za eksplicitne WENO metode i uglavnom su bazirana na balansiranju gradijenta fulksa i izvornog člana za neka stacionarna stanja.

Implicitne numeričke metode za hiperboličke zakone očuvanja omogućuju korištenje većeg vremenskog koraka u odnosu na eksplicitne metode. Pritom je potrebno riješiti sustave nelinearnih jednadžbi u svakom vremenskom koraku. Unatoč dužem vremenskom koraku, računalna isplativost korištenja implicitnih metoda ponekad je upitna. Implicitne metoda za rješavanje hiperboličkih zakona očuvanja do sada su se uglavnom koncentrirale na rješavanje stacionarnih problema.

U ovom poglavlju, najprije ćemo opisati nove semiimplicitne WENO metode koje su utemeljene na semiimplicitnoj vremenskoj integraciji opisanoj u poglavlju 4.3.3. Kako bi se smanjila nepotrebna količina numeričke difuzije, kod novih metoda predlaže se da parametar θ ne bude konstantan već prostorno ovisan. Na temelju pristupa korištenog u radu [63] za eksplicitne balansirane metode, ovdje su razvijene balansirane semiimplicitne metode za model otvorenih vodotoka. Na numeričkim primjerima vidjet ćemo da su nove semiimplicitne metode efikasne i robusne te se mogu primjenjivati na nestacionarnim problemima.

Daljnje poopćenje odnosi se na razvoj novih WENO metoda visokog reda točnosti koje koriste implicitne SDIRK SSP metode. WENO metode su do sada uglavnom koristile eksplicitne RK metode. U radu [29] korištene su implicitne WENO metode visokog reda točnosti za konačne razlike, ali njihova stabilnost nije bila zadovoljavajuća. Pokazat ćemo da je linearizacija implicitnih članova zajedno s metodama balansiranja proizvela robusne i stabilne metode koje se mogu primjenjivati na nestacionarnim problemima za zakone ravnoteže. Time je značajno prošireno područje upotreba implicitnih WENO metoda.

5.1 Metoda prvog reda točnosti

Početak ćemo s prostornom aproksimacijom i vremenskom integracijom prvog reda točnosti. Iako za postizanje prvog reda točnosti nije potrebna složena rekonstrukcija vektora stanja, ova metoda može se promatrati kao dio klase WENO metoda za konačne volumene.

Radi kraćeg zapisa numeričke metode, koristit ćemo centralni diferencijski operator

$$\Delta_\alpha a^n = a_{\alpha+1/2}^n - a_{\alpha-1/2}^n.$$

Metode konačnih volumena sa semiimplicitnom vremenskom integracijom (4.26) za zakone ravnoteže možemo zapisati u konzervativnoj formi

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} \left((1 - \theta)\Delta_i \mathbf{f}^n + \theta\Delta_i \mathbf{f}^{n+1} \right) + (1 - \theta)\mathbf{s}_i^n + \theta\mathbf{s}_i^{n+1}, \quad (5.1)$$

gdje je \mathbf{u}_i^{n+1} oznaka za prosječnu vrijednost stanja pridruženu i -toj ćeliji u budućem vremenskom sloju t^{n+1} . Numerički fluks koji ćemo koristiti smo opisali u poglavlju 4.1.1.

Iz uvjeta stabilnosti vremenske integracije (4.27),(4.28) slijedi da je za numeričku metodu (5.1), vremenski korak $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ograničen CFL uvjetom

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max |\lambda_{i+1/2}^{(p)}|}. \quad (5.2)$$

Pritom se maksimum gleda na cijeloj numeričkoj domeni i za sva karakteristična polja. Poznato je da je količina numeričke difuzije veća što je veći parametar θ . Što će biti vidljivo u numeričkim testovima. Semiimplicitne (SI) metode unose manje numeričke difuzije od pune implicitne (FI) metode. Iz tog razloga, parametar θ na početku se odabere tako da bude što manji, a da pritom metoda ostane stabilna za odabrani CFL.

Kako bi se numerička difuzija lokalno smanjila, u predloženoj ćemo shemi dozvoliti da parametar θ varira po numeričkoj domeni. Umjesto uobičajenog globalnog parametra θ , uvodimo lokalni parametar $\theta(i)$ koji ćemo pridružiti svakoj ćeliji. Maksimalni vremenski korak (5.2) koji se može koristiti u tekućem vremenskom sloju ovisi o zadanom CFL broju. Za tako odabran vremenski korak, svakoj ćeliji možemo pridružiti lokalni CFL(i, r) koji ovisi o susjednim ćelijama i globalnom vremenskom koraku:

$$\text{CFL}(i, r) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i-r \leq j \leq i+r, 1 \leq p \leq m} \left(|\lambda_{j+1/2}^{(p)}| \right). \quad (5.3)$$

Parametar r predstavlja maksimalan broj susjednih ćelija koje leže u zoni utjecaja promatrane ćelije i možemo ga odabrati tako da vrijedi $r \geq r_0 =$

[CFL]. Uvjet stabilnosti (4.27) moramo prilagoditi tako da se primjenjuje lokalno u svakoj ćeliji pa imamo:

$$\theta(i) = \theta(i, r_0) = 1 - \frac{1}{\text{CFL}(i, r_0)}. \quad (5.4)$$

S predloženim promjenama smo definirali novu lokalno semiimplicitnu (LSI) metodu. Iz numeričkih testova 5.4.1 i 5.4.2 vidi se da lokalni parametar $\theta(i)$ u odnosu globalni parametar θ unosi manje numeričke difuzije, te je moguće povećati efikasnost proračuna. Većina testova na realnim situacijama pokazuje da za umjerene CFL brojeve veći dio domene ima vrijednosti lokalnog parametra $\theta(i)$ jednake nuli. To znači da iako se koristi metoda koja je globalno implicitna, za veći dio numeričke domene proračun je eksplicitan i numerička difuzija je minimalna.

U slučaju fluks limitirane (FL) metode uvodimo modifikaciju izraza (4.9) i predlažemo korištenje izraza:

$$\Psi_{i+1/2} = \mathbf{I} + \text{diag} \left(\varphi(\eta^{(p)}) \left(1 - \min \left(1, \left| \lambda_{i+1/2}^{(p)} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \right) \right)_{p=1, \dots, m}. \quad (5.5)$$

Iako su izrazi (4.9) i (5.5) jednaki za eksplicitnu metodu, tj. za $\text{CFL} < 1$, u slučaju implicitne metode kada je $\text{CFL} > 1$ modificirana matrica Ψ daje znatno bolje rezultate. Poznato je da za $\text{CFL} > 1$ fluks limitirana metoda koja koristi (4.9) postane prvog reda točnosti. Također, takva metoda za $\text{CFL} > 1$ unosi nepotrebno veliku količinu numeričke difuzije [61]. Modifikacija koja je uvedena u izrazu (5.5) isključuje fluks limiter, odnosno reducira metodu na prvi red točnosti kada lokalni CFL u nekom karakterističnom polju postane veći od jedan. Za $\text{CFL} < 1$ izraz (5.5) ponaša se kao standardni fluks limiter i osigurava drugi red točnosti na glatkim dijelovima domene.

Da bi numerička shema bila u potpunosti definirana preostalo je odrediti numeričku aproksimaciju izvornog člana u izrazu (5.1). Numerička metoda koju uvodimo bazirana je na „upwind” dekompoziciji numeričkog fluksa i izvornog člana kako bi se postiglo balansiranje, odnosno ravnotežno stanje. Dekompozicija izvornog člana naročito je važna kada je fluks prostorno ovisan te u slučajevima kada je izvorni član prostorno ovisan, odnosno geometrijskog tipa. Dekompozicija izvornog člana opisana u [63], koja uzima u obzir smjer propagacije valova u svakom karakterističnom polju, može se zapisati u obliku:

$$\mathbf{s}_i^n = \mathbf{s}_{i+1/2}^{n,-} + \mathbf{s}_{i-1/2}^{n,+}, \quad \mathbf{s}_{i+1/2}^{n,\pm} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm \mathbf{Q}_{i+1/2}^{-1} |\mathbf{Q}_{i+1/2}| \right) \mathbf{s}_{i+1/2}^n, \quad (5.6)$$

gdje je $\mathbf{s}_{i+1/2}^n$ aproksimacija izvornog člana na rubu $i + 1/2$.

Numerička metoda (5.1) s numeričkim fluksom (4.7) i dekompozicijom izvornog člana (5.6) vodi na nelinearan sustav s velikim brojem jednažbi koji

je nužno riješiti u svakom vremenskom koraku. S obzirom da je rješavanje nelinearnog sustava vrlo zahtjevno, nužno je uvesti neka pojednostavljenja koja će uštedjeti proračunsko vrijeme. U radovima [60, 61] korištena je linearizacija fluksa i izvornog člana. Linearizaciju je moguće izvesti na više načina.

Prvi pristup je preformulirati izraz (5.1) tako da se u fluksu pojave članovi $\mathbf{f}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{f}_i^{n+1}$, a zatim koristiti aproksimaciju

$$\mathbf{f}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{f}_i^{n+1} \approx \mathbf{Q}_{i+1/2}^n \Delta_{i+1/2} \mathbf{u}^{n+1} + \Delta x \mathbf{v}_{i+1/2}^n. \quad (5.7)$$

Ovaj pristup rezultira linearnim sustavom koji se može relativno brzo riješiti, ali postoji problem jer dobivena numerička metoda nije u konzervativnoj formi pa ne osigurava točnu brzinu šok valova [32, 60, 61]. Stoga se linearizacija (5.7) koristi uglavnom za stacionarne probleme.

Drugim pristupom želi se zadržati konzervativna forma numeričke metode. Implicitne članove možemo zamijeniti Taylorovim razvojem oko poznatog stanja \mathbf{u}^n pri čemu se članovi višeg reda zanemaruju te ostaje

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{n+1} &\approx \mathbf{f}_i^n + \mathbf{J}_{f,i}^n (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \\ \mathbf{v}_{i+1/2}^{n+1} &\approx \mathbf{v}_{i+1/2}^n + \mathbf{J}_{v,i+1/2}^n (\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n) \\ \mathbf{s}_{i+1/2}^{n+1} &\approx \mathbf{s}_{i+1/2}^n + \mathbf{J}_{s,i+1/2}^n (\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Matrica $\mathbf{Q}_{i+1/2}^{(n+1)}$ aproksimira se matricom $\mathbf{Q}_{i+1/2}^{(n)}$ koja je definirana u (4.8). Na taj ćemo način dobiti lineariziranu konzervativnu metodu konzistentnu sa zakonom ravnoteže (3.1). Taj pristup primjenjiv je na tranzijentne i stacionarne proračune [60, 61].

Linearizirane članove (5.8) uvrstimo u izraze (4.7), (5.6) i (5.1). Takva linearizirana konzervativna metoda vodi na blok tridijagonalan sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \theta \mathbf{A}_i^n (\mathbf{u}_{i-1}^{n+1} - \mathbf{u}_{i-1}^n) + (\mathbf{I} + \theta \mathbf{B}_i^n) (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \\ + \theta \mathbf{C}_i^n (\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1}^n) = \mathbf{d}_i^n, \end{aligned} \quad (5.9)$$

koji moramo riješiti u svakom vremenskom koraku. Sa \mathbf{A}_i^n , \mathbf{B}_i^n , i \mathbf{C}_i^n smo označili $[m \times m]$ blok matrice sustava, a \mathbf{d}_i^n je blok vektora desne strane pridružen jednoj numeričkoj ćeliji domene. Radi kraćeg zapisa implicitnih članova uvodimo oznake

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^\pm &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathbf{J}_{f,i+1/2}^\pm \mp |\mathbf{Q}_{i+1/2}| \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{Q}_{i+1/2}^{-1} |\mathbf{Q}_{i+1/2}| \mathbf{J}_{v,i+1/2} \right) \end{aligned}$$

i

$$\mathbf{S}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{\Delta t}{4} \left(\mathbf{I} \pm \mathbf{Q}_{i+1/2}^{-1} |\mathbf{Q}_{i+1/2}| \right) \mathbf{J}_{s,i+1/2}.$$

$\mathbf{J}_{f,i+1/2}^{\pm}$ označava lijevu i desnu aproksimaciju Jacobijeve matrice fluksa na $(i+1/2)$ rubu ćelije. Pritom $\mathbf{J}_{f,i+1/2}^{-} = \mathbf{J}_{f,i}$ ovisi o stanju \mathbf{u}_i , a $\mathbf{J}_{f,i+1/2}^{+} = \mathbf{J}_{f,i+1}$ ovisi o stanju \mathbf{u}_{i+1} . Jacobijeve matrice $\mathbf{J}_{v,i+1/2}$ i $\mathbf{J}_{s,i+1/2}$ aproksimiraju se na rubu $(i+1/2)$. Konačno, blok matrice sustava i vektora desne strane

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^n &= -\mathbf{F}_{i-1/2}^{-} - \mathbf{S}_{i-1/2}^{+}, \\ \mathbf{B}_i^n &= \mathbf{F}_{i+1/2}^{-} - \mathbf{S}_{i+1/2}^{-} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{+} - \mathbf{S}_{i-1/2}^{+}, \\ \mathbf{C}_i^n &= \mathbf{F}_{i+1/2}^{+} - \mathbf{S}_{i+1/2}^{-}, \\ \mathbf{d}_i^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\mathbf{f}_{i+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2}) + \Delta x \left(\mathbf{s}_{i+1/2}^{-} + \mathbf{s}_{i-1/2}^{+} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dobiveni tri-dijagonalan linearni sustav (5.9) i (5.10) mora se riješiti u svakom vremenskom koraku.

5.2 Primjena semiimplicitnih metoda

Kada primjenjujemo numeričku metodu na zakone ravnoteže, tada posebnu pažnju treba obratiti na aproksimaciju izvornog člana. U nekim modelima, poput plitkih voda (3.2) i otvorenih vodotoka 3.3 prisutan je prostorno ovisan fluks i prostorno ovisan izvorni član. Kod takvih modela, evaluacijom izvornog člana u točkama nije dala dobre rezultate. Takve numeričke metode bile su nestabilne čak i kod blagih prostornih varijacija u geometriji. Dobro rješenje ovog problema postiglo se numeričkim metodama koje imaju svojstvo egzaktnog očuvanja, odnosno C-svojstvo. Takve numeričke metode prvi put su uvedene u radu [2]. Numerička metoda za otvorene vodotoke ima C-svojstvo ako može očuvati „mirnu vodu” $H = \text{konst.}$, $Q = 0$, gdje je $H = h + z$ razina vode. Takve numeričke metode nazivaju se i dobro balansiranim. Balansirane metode pokazale su se dobre i kod nestacionarnih problema na izuzetno varijabilnoj geometriji [20, 37].

5.2.1 Balansirana semiimplicitna metoda za otvorene vodotoke

Balansirane eksplicitne metode za otvorene vodotoke s proizvoljnom geometrijom opisane su u [63]. Slijedeći isti princip u ovom radu razvit ćemo Roevu balansiranu semiimplicitnu metodu.

Da bismo dobili balansiranu metodu za model otvorenih vodotoka, moramo ispravno definirati vektore i matrice koje se pojavljuju u numeričkoj

metodi. Kao u radu [63] koristit ćemo sljedeće izraze

$$\mathbf{Q}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_{i+1/2}^2 - u_{i+1/2}^2 & 2u_{i+1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{v}_{i+1/2} = g \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta_{i+1/2} I_1}{\Delta x} - \frac{A_{i+1/2}}{B_{i+1/2}} \frac{\Delta_{i+1/2} A}{\Delta x} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

i

$$\mathbf{s}_{i+1/2} = g \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta_{i+1/2} I_1}{\Delta x} - A_{i+1/2} \left(\frac{\Delta_{i+1/2} H}{\Delta x} - S_{f_{i+1/2}} \right) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Članovi $c_{i+1/2}$ i $u_{i+1/2}$ moraju se odrediti tako da matrica $\mathbf{Q}_{i+1/2}$ zadovolji Roevu linearizaciju (4.6)

$$c_{i+1/2} = \sqrt{g \frac{A_{i+1/2}}{B_{i+1/2}}}, \quad u_{i+1/2} = \frac{\sqrt{A_{i+1}} u_{i+1} + \sqrt{A_i} u_i}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}}. \quad (5.14)$$

Aproksimacije (5.11)-(5.13) i (5.14) ključne su za postizanje C-svojstva [63]. Za semiimplicitnu metodu moramo opisati i članove koji ulaze u matricu sustava

$$\mathbf{J}_{v,i+1/2} = \frac{-g}{\Delta x} \frac{A_{i+1/2}}{(B_{i+1/2})^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{B_{i+1/2}} \frac{\partial B_{i+1/2}}{\partial x} \Delta_{i+1/2} A - \Delta_{i+1/2} B & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{J}_{s,i+1/2} = g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{i+1/2} A}{\Delta x B_{i+1/2}} - \frac{\Delta_{i+1/2} H}{\Delta x} - S_{f_{i+1/2}} M_{i+1/2} & \frac{2S_{f_{i+1/2}}}{Q_{i+1/2}} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$M_{i+1/2} = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3} \frac{A_{i+1/2}}{B_{i+1/2} P_{i+1/2}} \frac{\partial P}{\partial h_{i+1/2}},$$

$$S_{f_{i+1/2}} = \frac{(m_{i+1/2})^2 Q_{i+1/2} |Q_{i+1/2}| (P_{i+1/2})^{4/3}}{(A_{i+1/2})^{10/3}},$$

gdje se članovi $B_{i+1/2}$, $\frac{\partial B}{\partial h_{i+1/2}}$, $A_{i+1/2}$, $Q_{i+1/2}$, $m_{i+1/2}$, $\frac{\partial P}{\partial h_{i+1/2}}$ i $P_{i+1/2}$ evaluiraju kao aritmetičke sredine pripadnih vrijednosti u ćelijama I_i i I_{i+1} .

Propozicija 5.1 *Linearizirana semiimplicitna i lokalno semiimplicitna metoda s dekompozicijom fluksa definirana izrazima (5.9)-(5.10), (5.12)-(5.16) zadovoljava C-svojstvo za jednadžbe otvorenih vodotoka ako je CFL dovoljno mali.*

Dokaz. Prema (5.9), semiimplicitna i lokalno semiimplicitna metoda mogu se zapisati u obliku

$$(\mathbf{I} + \theta \mathbf{K}(\mathbf{u}^n)) (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = \mathbf{d}(\mathbf{u}^n) \quad (5.17)$$

odnosno

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{u}^n) \Theta(\mathbf{u}^n)) (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = \mathbf{d}(\mathbf{u}^n), \quad (5.18)$$

pri čemu je $\mathbf{d}(\mathbf{u}^n)$ vektor desne strane, a $\Theta(\mathbf{u}^n)$ dijagonalna matrica lokalnih parametara $\theta(i)$ definiranih u (5.4). $\mathbf{K}(\mathbf{u}^n)$ je tridijagonalna blok matrica s blokovima (5.10), gdje su \mathbf{B}_i dijagonalni blokovi, \mathbf{A}_i blokovi ispod glavne dijagonale i matrice \mathbf{C}_i blokovi iznad glavne dijagonale.

U slučaju mirne vode, za $\text{CFL} \leq 1$ dobije se eksplicitna metoda koja zadovoljava C-svojstvo [63]. U eksplicitnom slučaju kada je $\text{CFL} \leq 1$ matrica sustava je jedinična, a desna strana je nul-vektor. Sustav je regularan iz čega slijedi $\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = \mathbf{0}$, što znači da će stanje mirne vode biti očuvano.

U slučaju kada je $\text{CFL} > 1$, desna strana je i dalje nul-vektor kao u eksplicitnom slučaju, ali matrica sustava nije jedinična. Matrica sustava može se zapisati u obliku $\mathbf{I} + \theta \mathbf{K}(\mathbf{u}^n)$ pa zaključujemo da je za dovoljno mali θ sustav regularan. Ovime smo pokazali da je za dovoljno mali CFL, semiimplicitna metoda (5.17) balansirana, isti zaključak vrijedi i za lokalno semiimplicitnu metodu (5.18).

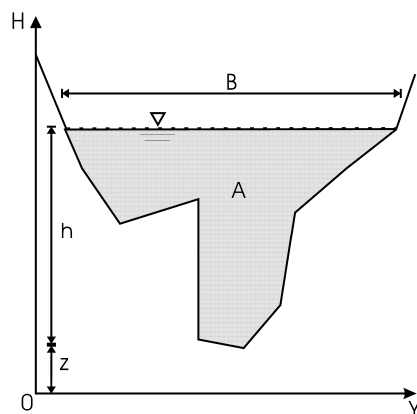
□

Iako smo tvrdnju pokazali za male vrijednosti parametra θ , numerički testovi u poglavlju 5.4 pokazuju da je u praksi C-svojstvo očuvano za mnogo veće vrijednosti CFL broja.

5.2.2 Efikasna implementacija modela za otvorene vodotoke

Kod kanala s općom geometrijom, efikasnost i točnost numeričke aproksimacije je vrlo važna ako želimo postići brzu i robustanu simulaciju strujanja fluida. Vrlo važan čimbenik u implementaciji numeričke metode je efikasna evaluacija parametara koji opisuju geometriju kanala.

U svakom trenutku i u svakom čvoru kanala moramo biti u stanju brzo i točno odrediti vrijednosti poput $h = h(A, x)$, $B = B(h, x)$, $I_1 = I_1(h, x)$, $I_2 = I_2(h, x)$... U slučaju pravokutnog ili trapeznog poprečnog presjeka, navedeni članovi mogu se odrediti analitički. U slučaju općeg nesimetričnog poprečnog presjeka, spomenuti parametri moraju se odrediti približno. Ovdje ćemo opisati brz i efikasan način tretiranja geometrijskih podataka kanala koji će omogućiti efikasno određivanje potrebnih parametara. Opći profil poprečnog presjeka kanala možemo vidjeti na slici 5.1. Prirodni i umjetni kanali



Slika 5.1: Poprečni profil kanala.

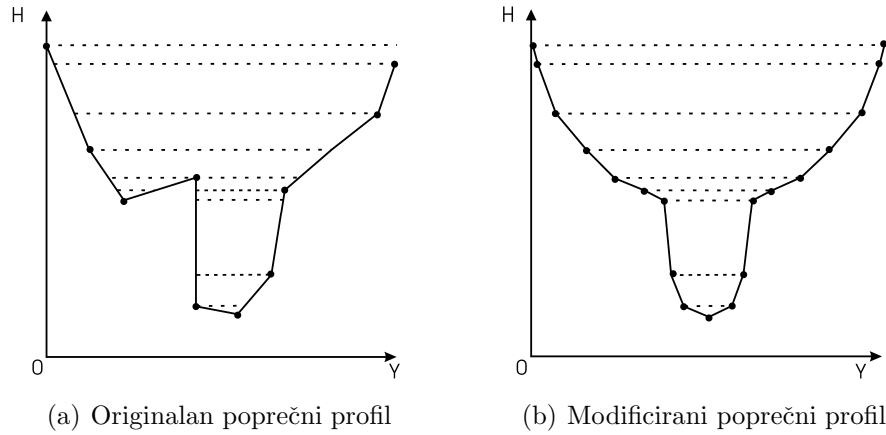
Tablica 5.1: Matrica pridružena modificiranom profilu

h	B	P	A	I_1
0	B_0	P_0	0	0
h_1	B_1	P_1	A_1	I_{11}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
h_n	B_n	P_n	A_n	I_{1n}

često imaju geometriju koja nije glatka pa ćemo uzeti prirodnu pretpostavku da se kanal sastoji od linearnih segmenata. Zbog komplicirane strukture, evaluacija potrebnih parametara može biti zahtjevna ako se koristi originalni profil. Bez gubitka točnosti možemo konstruirati ekvivalentan simetričan profil koji je pogodniji za interpolaciju i evaluaciju.

Originalan profil na slici 5.1 podijelimo na neuniformne slojeve kao na slici 5.2(a), tako da je derivacija širine kanala $\frac{\partial B}{\partial h}$ konstanta na svakom sloju. Na taj način smo dobili particiju h_0, \dots, h_m profila kanala po dubini. Svakom sloju $[h_{k-1}, h_k]$ možemo pridružiti odgovarajući simetrični trapezni sloj, koji ima jednake širine $B = B(h, x)$ i jednaku površinu kao polazni sloj. Kada svaki sloj zamijenimo ekvivalentnim trapeznim slojem, tada dobijemo po dijelovima simetrični trapezni profil kao na slici 5.2(b). Modificirani profil zadržava sve informacije o dubini $h = h(A, x)$ i širini kanala, a zbog trapezne i simetrične forme omogućuje jednostavno određivanje članova $A(h, x)$ i $I_1(h, x)$. Ako za svaki sloj zapamtimo i vrijednost perimetra i Manningovog koeficijenta trenja, tada zbog pretpostavke linearnosti funkcija, moguće je lako i točno izračunati sve važne informacije o geometriji kanala.

Da bi se ubrzala numerička evaluacija vrijednosti parametara mogu se



Slika 5.2: Pojednostavljenje poprečnog profila

spremiti u matricu čiji se oblik može vidjeti u tablici 5.1. Matrica sadrži sve bitne podatke o originalnom profilu na karakterističnim dubinama h_0, \dots, h_m . Konačno, kanal opisujemo s konačno mnogo poprečnih presjeka koje zapisujemo u matričnom obliku 5.1. Sve ostale potrebne informacije o geometriji kanala možemo dobiti interpolacijom.

5.3 Visoki red točnosti

U poglavlju 5.1 opisali smo semiimplicitnu metodu koja se može smatrati dijelom WENO klase, ali u tom slučaju nije bilo potrebe za složenom prostornom rekonstrukcijom. Sada ćemo u nastavku za postizanje visokog reda točnosti u prostornom operatoru koristiti algoritam WENO rekonstrukcije vektora stanja \mathbf{u} , koji je objašnjen u poglavlju 4.2.

Rekonstrukcija vektora stanja može se napraviti po komponentama vektora stanja ili po karakterističnim poljima. U nastavku ćemo detaljnije opisati rekonstrukciju po karakterističnim poljima. Vektor stanja najprije projiciramo u lokalno karakteristično polje, zatim primijenimo WENO rekonstrukciju te rezultat rekonstrukcije vratimo u fizikalne varijable. Postupak rekonstrukcije detaljno je opisan u radu [53].

Za obje vrste rekonstrukcije koristit ćemo zajednički izraz:

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm} = \sum_{s=s_{min}^{\pm}}^{s_{maks.}^{\pm}} \boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u}) \sum_{k=0}^{r-1} a_{r,s,k}^{\pm} \bar{\mathbf{u}}_{i-r+1+s+k}. \quad (5.19)$$

U slučaju rekonstrukcije po komponentama, matricu $\boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u})$ možemo za-

pisati u obliku:

$$\mathbf{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u}) = \text{diag}[\omega_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(u^{(1)}), \dots, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(u^{(m)})],$$

dok u slučaju rekonstrukcije po karakterističnim poljima najprije moramo odrediti lokalno karakteristično polje. Neka je $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i+1})$ Roeva lineari-zacija Jacobijeve matrice fluksa (4.6) koja osigurava postojanje baze lijevih i desnih svojstvenih vektora. Uz uobičajene oznake za lijeve i desne vektore, matrica $\mathbf{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u})$ u izrazu (5.19) za slučaj rekonstrukcije po karakterističnim poljima glasi

$$\mathbf{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u}) = \sum_{p=1}^m \omega_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,\pm}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{l}}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}) \left(\hat{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \otimes \hat{\mathbf{l}}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \right),$$

gdje je \otimes oznaka za tenzorski produkt vektora.

Nakon što odredimo aproksimacije $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ na rubu numeričke ćelije, primijenit ćemo metodu konačnih volumena s Roevom aproksimacijom fluksa (4.7) Detaljniji opis ovih izraza moguće je pronaći u radu [65].

Kod aproksimacije izvornog člana \mathbf{s}_i ćemo rastavit na sljedeći način:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i+\frac{1}{2}}^{-} + \mathbf{s}_{i-\frac{1}{2}}^{+} + \mathbf{s}_{i,C}.$$

Prva dva člana numeričke aproksimacije izvornog člana predstavljaju „upwind” dekompozicijom izvornog člana te ih možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{s}_{i+\frac{1}{2},\pm} = \frac{1}{2} \left(I \pm \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} |\mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}} \right) \mathbf{s}_{i+\frac{1}{2}}.$$

Članovi $\mathbf{s}_{i+\frac{1}{2}}$ i $\mathbf{s}_{i,C} = \mathbf{s}(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^{+}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{-})$ određuju se tako da \mathbf{s}_i bude aproksimacija visokog reda točnosti u i -toj ćeliji. Na ovaj način moguće je dobiti balansiranu WENO metodu, pri čemu evaluacija pojedinih članova metode ovisi o odabranom modelu [65, 16, 58, 49].

5.3.1 Vremenska diskretizacija

Za vremensku integraciju koristit ćemo SDIRK metode iz poglavlja 4.3.2, koje su detaljnije opisane u [19]. Direktnom primjermom SDIRK metode, u svakom stadiju Runge–Kutta metode trebali bismo riješiti nelinearni sustav jednadžbi. Nelinearni sustav moguće je riješiti uobičajenim numeričkim postupcima poput Newtonovih iteracija. Zbog nepoznatih nelinearnih težina koje se pojavljuju u WENO rekonstrukciji, rješavanje ovog nelinearnog sustava postaje vrlo zahtjevno.

Linearizacija oblika (5.8) koja je korištena za semiimplicitnu metodu prvog reda prikladna je i u ovom slučaju. Preciznije, na svakom koraku RK metode koristimo Taylorov razvoj:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(j),\pm} &\approx \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(j-1),\pm} + \mathbf{J}_{f,i+\frac{1}{2}}^{(j-1),\pm} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j),\pm} - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j-1),\pm} \right) \\ \mathbf{v}_{i+1/2}^{(j)} &\approx \mathbf{v}_{i+1/2}^{(j-1)} + \mathbf{J}_{v,i+1/2}^{(j-1)} \left(\mathbf{u}_{i+1/2}^{(j)} - \mathbf{u}_{i+1/2}^{(j-1)} \right) \\ \mathbf{s}_{i+1/2}^{(j)} &\approx \mathbf{s}_{i+1/2}^{(j-1)} + \mathbf{J}_{s,i+1/2}^{(j-1)} \left(\mathbf{u}_{i+1/2}^{(j)} - \mathbf{u}_{i+1/2}^{(j-1)} \right),\end{aligned}$$

pri čemu su $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j),\pm}$ aproksimacije vektora stanja na rubovima ćelija, a $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}$ označava aritmetičku sredinu rubnih vrijednosti $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j),-}$ i $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{(j),+}$. Također, za linearizaciju je bitno da se za WENO rekonstrukciju nepoznatog stanja koriste nelinearne težine bazirane na vrijednostima iz prethodnog stadija RK metode. Nužno je napomenuti da ovim aproksimacijama red točnosti nije narušen jer su za glatka rješenja nelinearne težine WENO rekonstrukcije jednake idealnim težinama koje pak ne ovise o vrijednostima vektora stanja. Konačno, linearni sustav koji se mora riješiti za svaki stadij RK metode možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(j)} &= \mathbf{u}^{(0)} + \Delta t \sum_{l=1}^{j-1} \kappa_{lj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}) + \Delta t \kappa_{jj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(j-1)}) \\ &+ \Delta t \kappa_{jj} \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(j-1)})(\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)}), \quad j = 1, \dots, s.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Matrica $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(j-1)})$ je blok $(2r+1)$ -dijagonalna, čiji su blokovi $m \times m$ matrice koji će biti opisani u nastavku. Iz (5.20) slijedi da za svaki stadij RK metode moramo riješiti linearni sustav

$$(\mathbf{I} - \Delta t \kappa_{jj} \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(j-1)})) \Delta \mathbf{u}^{(j)} = RHS, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.21)$$

gdje je $\Delta \mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)}$ i

$$RHS = - \sum_{l=1}^{j-1} \Delta \mathbf{u}^{(l)} + \Delta t \sum_{l=1}^{j-1} \kappa_{lj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(l)}) + \Delta t \kappa_{jj} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(j-1)}). \quad (5.22)$$

Primijetimo da se na desnoj strani izraza (5.22) svi članovi mogu odrediti iz rješenja prijašnjih stadija SDIRK metode.

Radi kraćeg zapisa blok matrice $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ uvodimo članove

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{i+1/2}^{\pm} &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\mathbf{J}_{f,i+1/2}^{\pm} \mp \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} |\mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} |\mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{J}_{v,i+1/2} \right)\end{aligned}$$

i

$$\mathbf{S}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{I} \pm \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} |\mathbf{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}| \mathbf{L}_{i+\frac{1}{2}} \right) \mathbf{J}_{s,i+1/2}.$$

Konačno, blokove matrice $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ možemo zapisati izrazom:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{i,i-r+1+k} &= \sum_{s=0}^r \left(a_{r,s,k-s}^- (\mathbf{G}_{i+\frac{1}{2}}^- - \mathbf{S}_{i+1/2}^-) \mathbf{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,-} \right. \\ &\quad + a_{r,s,k-s}^+ (\mathbf{G}_{i+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{S}_{i+1/2}^+) \mathbf{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}^{r,s,+} \\ &\quad - a_{r,s,k-s+1}^- (\mathbf{G}_{i-\frac{1}{2}}^- + \mathbf{S}_{i-1/2}^+) \mathbf{\Omega}_{i-\frac{1}{2}}^{r,s,-} \\ &\quad \left. - a_{r,s,k-s+1}^+ (\mathbf{G}_{i-\frac{1}{2}}^+ + \mathbf{S}_{i-1/2}^+) \mathbf{\Omega}_{i-\frac{1}{2}}^{r,s,+} \right), \\ &k = 0, \dots, 2r, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Blokovi $\mathbf{K}_{i,i-r+1+k}$, $k = 0, \dots, 2r$ su pridruženi i -toj jednadžbi sustava (4.2). Broj blok-dijagonala u matrici sustava ovisi o parametru r WENO rekonstrukcije, tj. o veličini uzorka koji je potreban za rekonstrukciju vrijednosti $\mathbf{u}_{i\pm 1/2}^{\pm}$.

Propozicija 5.2 *Za dovoljno mali vremenski korak Δt matrica sustava (5.21) je regularna te je rješenje sustava jedinstveno.*

Dokaz. Matricu sustava možemo zapisati u obliku $\mathbf{I} - \Delta t \kappa_{jj} \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(j-1)})$. Za dovoljno mali Δt matrica je dijagonalno dominantna pa slijedi tvrdnja.

□

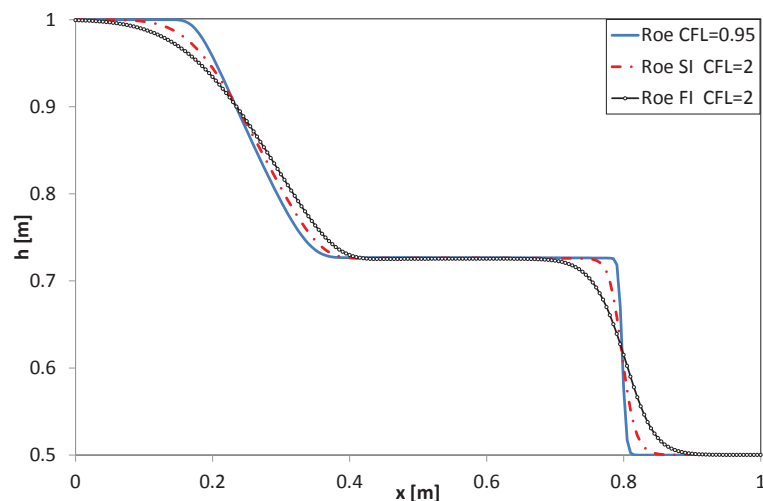
U numeričkim testovima koristit ćemo oznaku

$$\text{WENO}(s, k, r), \quad (5.23)$$

za numeričke metode kod kojih se prostorni uzorak korištene WENO rekonstrukcije sastoji od $2r - 1$ numeričkih ćelija te se pritom koristi vremenska integracija k -tog reda točnosti sa s -stadija.

5.4 Numerički testovi

U ovom ćemo poglavlju analizirati ponašanje semiimplicitne numeričke metode na zakonima ravnoteže i očuvanja koje smo opisali u poglavlju 2.



Slika 5.3: TEST 5.4.1 – Usporedba dubine vode eksplicitne, implicitne i semiimplicitne metode u trenutku $t = 0.1$ s.

5.4.1 Pucanje brane

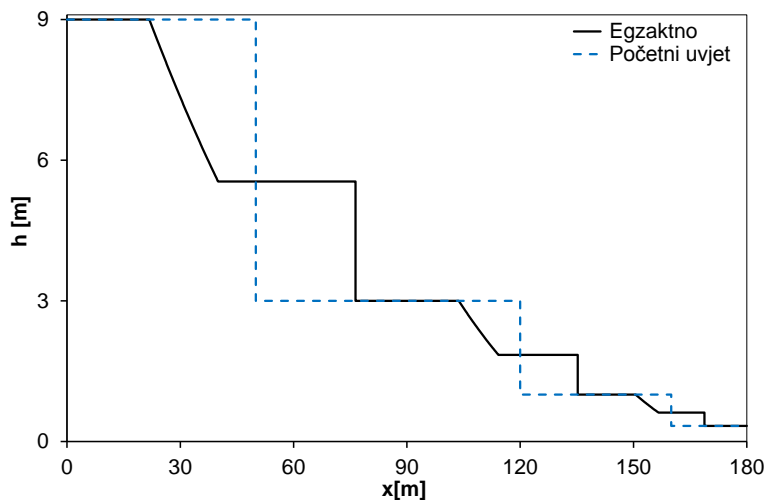
Poznato je da se implicitne metode većinom koriste za stacionarne probleme. U ovom testu želimo ispitati ponašanje semiimplicitne metode prvog i drugog reda točnosti na tipičnoj tranzijentnoj pojavi za jednadžbe plitkih voda. Promatramo ravan, pravokutan kanal konstantne širine. Duljina kanala je jedan metar i cijelom duljinom zadan je Manningov koeficijent trenja $n = 0.03$. Kanal je diskretiziran sa 200 numeričkih ćelija. Početni uvjet je mirna voda sa zamišljenom branom na sredini kanala:

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.5, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Na početku trenutačno nestaje zamišljena brana i započinje propagacija vala razrjeđenja i šok vala. U trenutku $t = 0.1$ s usporedimo rješenje dobiveno eksplicitnom metodom za $CFL = 0.95$, semiimplicitnom (SI) metodom za $CFL = 2$, odnosno $\theta = 0.5$ te punom implicitnom metodom (FI) za $CFL = 2$ i $\theta = 1$. Rezultati se vide na slici 5.3. Rezultati dobiveni implicitnim metodama iz poglavlja 5.1 pokazuju da implicitne metode vrlo precizno prate frontu šok vala, ali za razliku od eksplicitnih metoda unose više numeričke difuzije.

5.4.2 Višestruko pucanje brane

Svrha ovog testa je ispitati ponašanje eksplicitnih i implicitnih metoda u slučaju višestrukih i šokova različite veličine koji propagiraju unutar numeričke domene.



Slika 5.4: TEST 5.4.2 – Početni uvjet i egzaktno rješenje u trenutku $t = 3$ s.

Promatramo 180 m dugačak ravan kanal pravokutnog poprečnog presjeka konstantne širine. U trenutku $t = 0$ voda je u mirovanju, a zatim trenutačno nestaju zamišljene brane koje su održavale dubinu vode

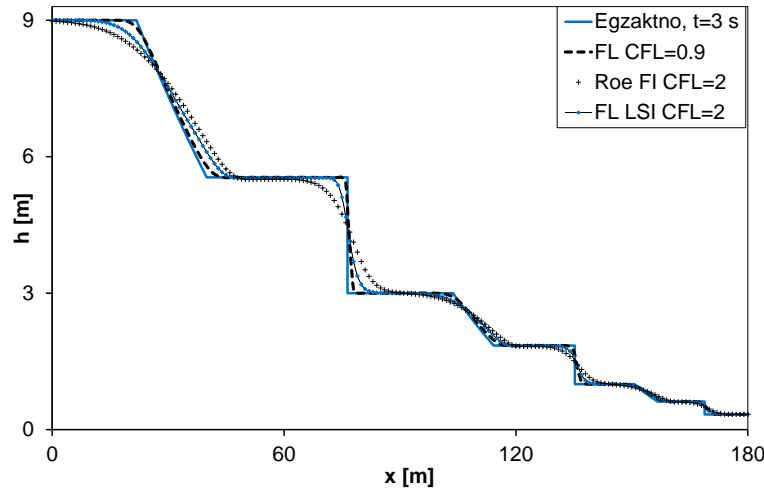
$$h(x, 0) = \begin{cases} 9, & 0 \leq x < 50 \\ 3, & 50 \leq x < 120 \\ 1, & 120 \leq x < 160 \\ \frac{1}{3}, & 160 \leq x \leq 180 \end{cases} .$$

Da bismo mogli odrediti egzaktno rješenje ovoga problema, trenje ćemo zanemariti. Slika 5.4 prikazuje rješenje nakon tri sekunde. Rješenje se sastoji od tri vala razrjeđenja i tri šok vala. Numeričke rezultate na 180 numeričkih ćelija usporedit ćemo s analitičkim rješenjem.

Implicitna Roeva i Fluks limitirana metoda

Rezultati na slikama 5.5–5.8 dobiveni su upotrebom eksplicitnih i implicitnih metoda iz poglavlja 5.1 za različite vrijednosti CFL broja.

Na slici 5.5 vidi se konzistentno ponašanje semiimplicitnih metoda za $CFL = 2$. Sve razmatrane metode dobro prate frontu šok valova i valova razrjeđenja, ali se razlikuju po količini numeričke difuzije koju unose u rješenje. Rezultati koji su dobiveni punom implicitnom metodom (Roe FI) imaju najveće odstupanje zbog pretjerane numeričke difuzije, a fluks limitirana lokalno semiimplicitna (FL LSI) daje najtočnije rezultate. Rezultati dobiveni FL LSI metodom za $CFL = 0.9$ jednaki su rezultatima doobivenim eksplicitnom fluks limitiranom metodom.



Slika 5.5: TEST 5.4.2 – Usporedba rezultata dobivenih eksplicitnim i implicitnim metodama s analitičkim rješenjem.

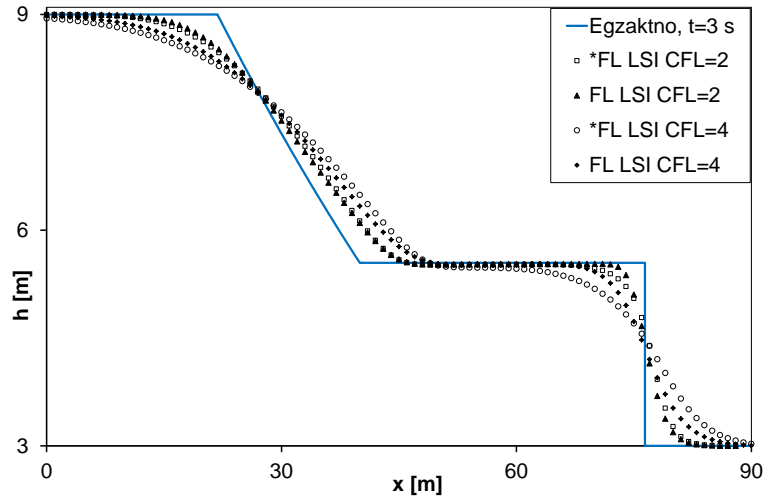
Tablica 5.2: TEST 5.4.2 - L^1 pogreške za fluks limitirane metode s modificiranim limiterom (5.5) i nemodificiranim limiterom (4.9).

		CFL	2	3	4
Modificirana FL metoda	FI		32.41	37.83	41.63
	SI		18.45	25.86	31.53
	LSI		17.46	24.99	30.60
Standardna FL metoda	FI		34.85	43.855	50.365
	SI		21.43	32.78	40.65
	LSI		20.52	32.20	39.98

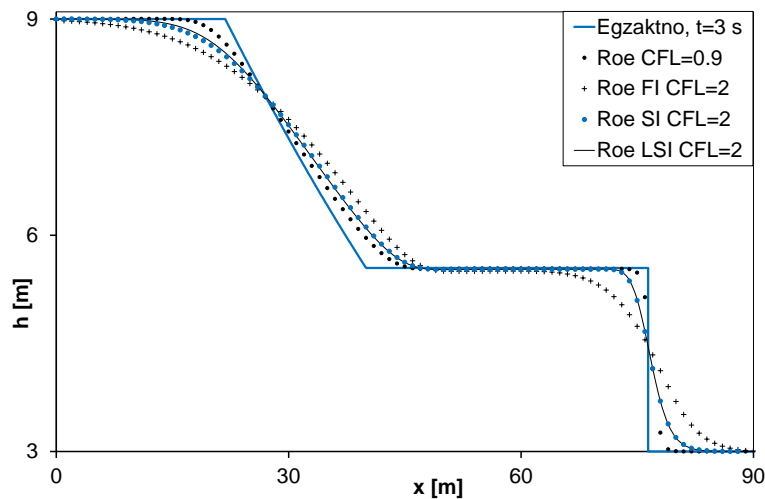
Na slici 5.6 istaknut je detalj najvećeg šoka kako bi se usporedila rješenja fluks limitirane implicitne metode uz upotrebu dva različita oblika limitera. FL će označavati modificirani limiter (5.5), a oznaka *FL limiter (4.9). Očito je da je kod modificiranog limitera postignuta oštrija rezolucija šok vala. Za veće CFL brojeve, razlika između starog i novog limitera je bitno izraženija. Ovi rezultati jasno se vide u tablici 5.2 koja prikazuje L^1 pogreške za fluks limitirane metode. U tablici 5.2 vidljivo je da, od svih promatranih metoda, lokalno semiimplicitna daje najbolje rješenje.

Na slici 5.7 mogu se usporediti rezultati eksplicitne, pune implicitne, semiimplicitne i lokalno semiimplicitne Roeve metode na najvećem od tri vala. Na vrhu vala razrjeđenja vidi se da nakon eksplicitne, lokalno semiimplicitna metoda daje najtočnije rezultate. Ovakvo ponašanje je tipično za umjereno velike vrijednosti CFL broja dok je za veće CFL brojeve razlike teže uočiti.

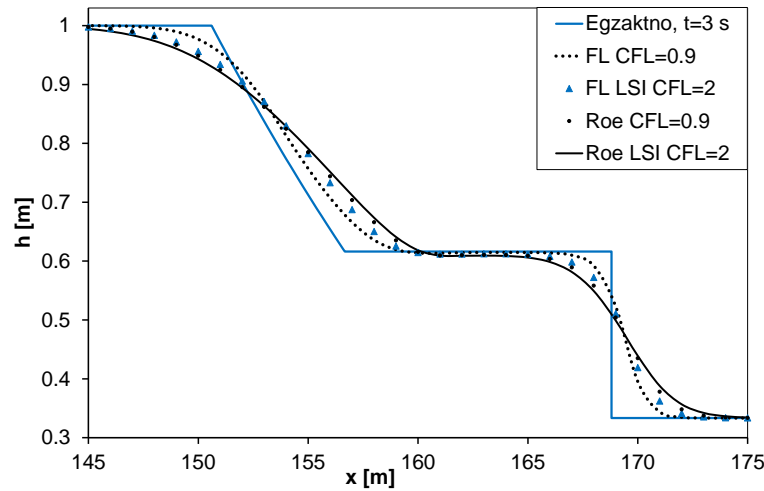
Slika 5.8 prikazuje rješenje za najmanji od tri šoka. Uspoređena su



Slika 5.6: TEST 5.4.2 – Usporedba fluks limitiranih implicitnih metoda za različite limitere.



Slika 5.7: TEST 5.4.2 – Usporedba implicitne, semiimplicitne i lokalno semi-implicitne Roeve metode.



Slika 5.8: TEST 5.4.2 –Usporedba eksplicitnih i implicitnih metoda na najmanjem skoku.

Tablica 5.3: TEST 5.4.2 - L^1 pogreške implicitnih i eksplicitnih metoda na cijeloj domeni i restrikciji domene.

x	[0, 180)	[145, 180)
FL CFL=0.9	6.06	0.62
FL FI CFL=2	32.41	1.19
FL SI CFL=2	18.45	0.89
FL LSI CFL=2	17.46	0.89
Roe CFL=0.9	11.22	1.039
Roe FI CFL=2	33.00	1.43
Roe SI CFL=2	19.21	1.17
Roe LSI CFL=2	18.21	1.17

rješenja dobivena eksplicitnom, implicitnom Roevom i fluks limitiranom metodom. Na ovom najmanjem skoku možemo uočiti da je lokalno fluks limitirana semiimplicitna metoda za $CFL = 2$ točnija od eksplicitne Roeve metode. Isto zaključujemo iz drugog stupca tablice 5.3 u kojem su prikazane pogreške na dijelu domene koja obuhvaća samo valove najmanjeg skoka. Na ovom primjeru vidi se da LSI metode imaju bitno bolju rezoluciju manjih skokova sa zanemarivim povećanjem zahtjevnosti algoritma što može biti značajan argument za njihovo korištenje. Na realnim domenama, kada se modeliraju prirodni vodotoci, LSI metode imaju prednost u odnosu na standardne metode čak i za veće vrijednosti CFL broja.

Zaključujemo da za umjereno velike CFL brojeve, semiimplicitne metode dobro prate frontu šok vala uz prihvatljivu količinu numeričke difuzije.

Implicitna WENO metoda

Usporedit ćemo ponašanje različitih SDIRK WENO metoda kod kojih ćemo koristiti oznaku (5.23). Na slici 5.9 a) istaknut je najveći od tri šoka na kojem su uspoređena rješenja dobivena metodama različite prostorne točnosti s parametrima (8, 4, 2) i (8, 4, 5) za $CFL = 3.5$. U oba slučaja rezultati se izvrsno poklapaju s analitičkim rješenjem iako se za viši red rekonstrukcije mogu uočiti blage oscilacije.

Slike 5.9 b) i c) prikazuju najmanji od tri šoka. Na slici 5.9 b) prikazani su rezultati za različite vremenske integracije i prostorne rekonstrukcije. Numerički rezultati pokazuju da implicitne WENO metode vrlo dobro prate frontu šok vala. Jasno je vidljivo konzistentno ponašanje numeričkih metoda s istom prostornom rekonstrukcijom, ali različitim metodama vremenske integracije. Možemo zaključiti da rezolucija šokova bitno ovisi o redu WENO rekonstrukcije, a ne o odabranoj metodi vremenske integracije.

Na slici 5.9 c) uspoređeni su rezultati eksplicitne i semiimplicitne metode istoga reda prostorne točnosti. Pritom je za eksplicitnu WENO metodu korištena oznaka SSPERK. Za eksplicitne metode korišten je $CFL = 0.65$, a za implicitne metode $CFL = 2.35$. Uočava se izvrsno poklapanje rezultata dobivenih eksplicitnim i implicitnim metodama.

5.4.3 Nestacionarno strujanje u kanalu promjenljive širine

Ovaj numerički test je izvorno predložen u [42], kako bi se analiziralo ponašanje numeričkih metoda za male perturbacije stacionarnog stanja mirne vode za jednadžbe otvorenih vodotoka (3.6). U ovom testu može se vidjeti jesu li sile koje nastaju zbog varijabilne širine kanala ispravno tretirane u numeričkoj metodi.

Pravokutni ravni kanal dugačak je 500 m. Širina kanala $B(x)$ je varijabilna

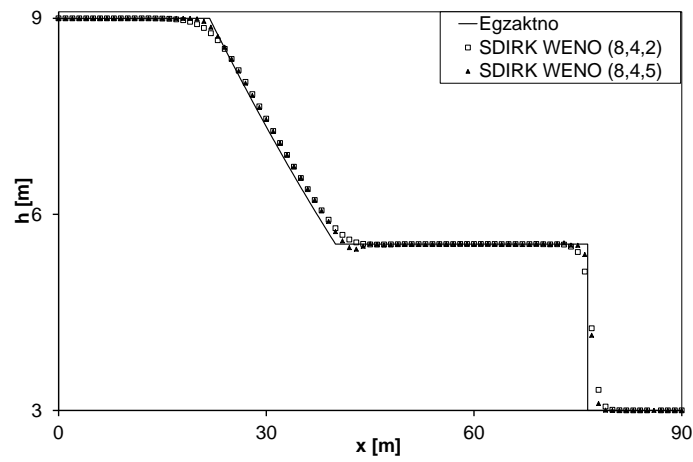
$$B(x) = \begin{cases} 5 - 0.7065 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{x-250}{300} + 1\right)\right) & , \text{ ako je } |x - 250| < 150 \\ 5 & , \text{ inače} \end{cases} .$$

Zadan je početni uvjet:

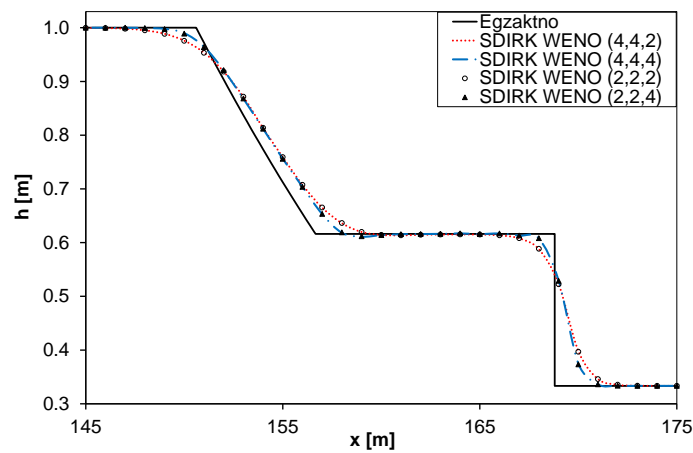
$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \begin{cases} 2.0 + \epsilon & , \text{ ako je } 100 < x < 200 \\ 2.0 & , \text{ inače} \end{cases} \\ v(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Promatrat ćemo dva različita slučaja, kada je $\epsilon = 10^{-3}$ i $\epsilon = 10^{-4}$.

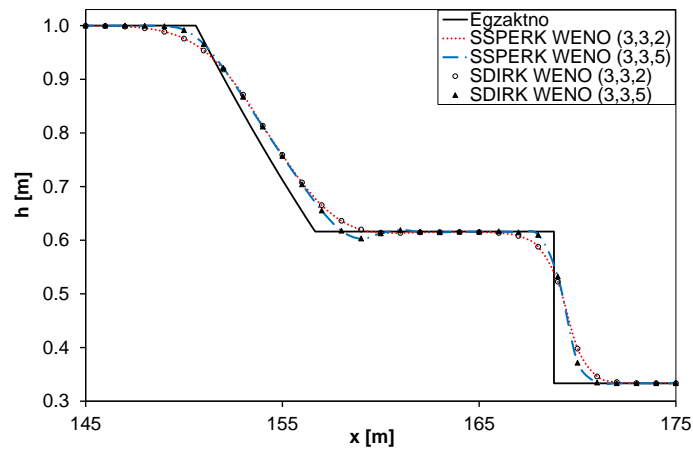
Usporedit ćemo numeričke rezultate dobivene semiimplicitnom WENO metodom s rezultatima eksplicitne WENO metode. Na slici 5.10 rezultati



(a)



(b)



(c)

Slika 5.9: TEST 5.4.2 – Usporedba rezultata za eksplicitne i semiimplicitne WENO metode u trenutku $t = 3$ s.

su dobiveni metodama istoga reda točnosti. Čak i za visoke vrijednosti CFL broja rezultati semiimplicitne i eksplicitne metode se vrlo dobro poklapaju. Numerički rezultati na slici 5.11 potvrđuju da su semiimplicitne metode vrlo stabilne i daju rješenja usporediva s eksplicitnim metodama za CFL brojeve unutar preporučenih granica stabilnosti. Također, primijetimo da se povećanjem broja stadija povećava stabilnost metode.

5.4.4 Stacionarno strujanje preko izbočine

Za testiranje efikasnosti numeričkih metoda na problemima traženja stacionarnih rješenja koristit ćemo test koji je uveden u radu [37]. Kanal dužine 3 m, varijabilne širine i varijabilnog dna zadajemo funkcijama:

$$z(x) = \begin{cases} 0.1 \cos^2(\pi(x - 1.5)) & , \text{ ako je } |x - 1.5| < 0.5 \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases} ,$$

i

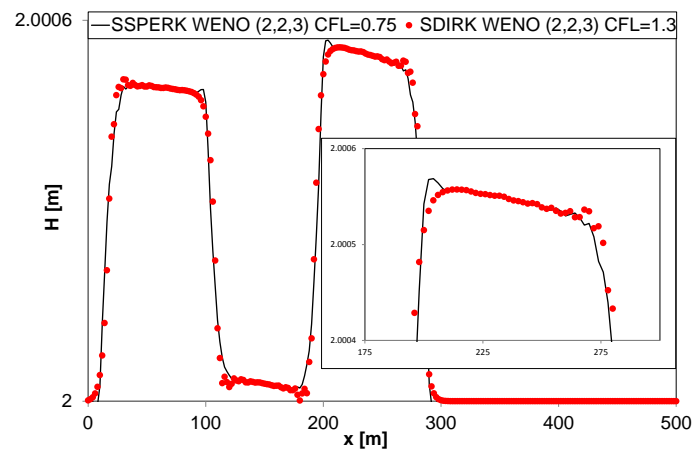
$$B(x) = \begin{cases} 1 - 0.1 \cos^2(\pi(x - 1.5)) & , \text{ ako je } |x - 1.5| < 0.5 \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases} .$$

Zbog kompleksne geometrije koja se može vidjeti na slikama 5.12, koristit ćemo jednadžbe za otvorene vodotoke (3.6).

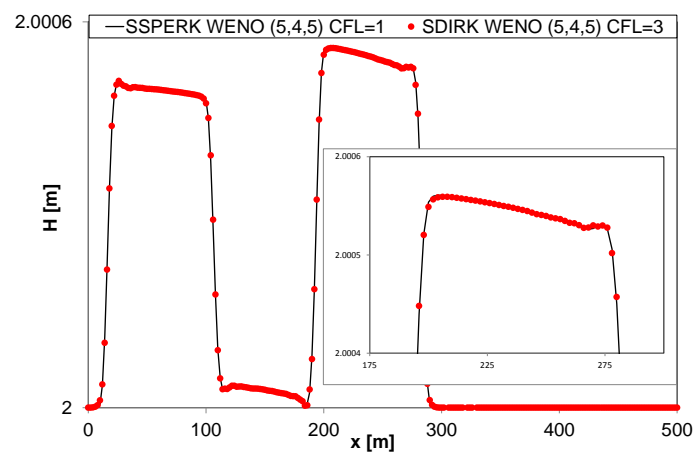
Potkritični tok

Na uzvodnoj strani kanala nametnemo konstantan protok $Q = 1.566 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, a na nizvodnom kraju domene konstantnu dubinu vode $h = 1 \text{ m}$. Ovako definirani rubni uvjeti imaju za posljedicu potkritičan tok na cijeloj domeni. Rješenje postavljenog problema moguće je odrediti analitički. Na slici 5.13 prikazana je konvergencija eksplicitne i semiimplicitne WENO metode te lokalno semiimplicitne Roeve metode. Rješenja dobivena eksplicitnom i implicitnom WENO metodom su vrlo slična. Na slikama je jasno vidljivo da implicitne metode na ovom testu konvergiraju znatno brže od eksplicitnih. Roeva LSI metoda konvergira približno jednako brzo kao i SDIRK WENO, s tim da postiže znatno manju razinu pogreške. Na slici 5.14 prikazane su oscilacije u protoku koje su prisutne kod eksplicitnih i implicitnih WENO metoda pa zaključujemo da su one posljedica prostorne rekonstrukcije, a ne vremenske integracije. Oscilacije u protoku su veće za viši red rekonstrukcije WENO metode. Na slikama 5.13 vidi se da metode trećega reda u odnosu na sedmi red točnosti postižu bitno manju konačnu pogrešku. Pogreška koja je prisutna nakon što rješenje WENO metodom dostigne stacionarno stanje posljedica je oscilacija u protoku.

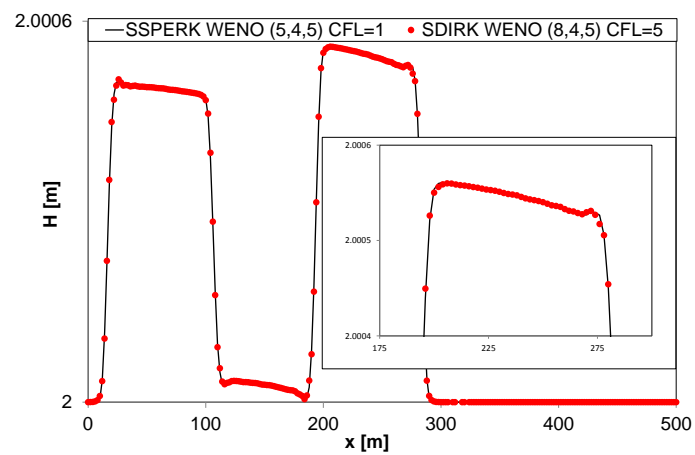
U tablici 5.4 prikazane su L^∞ pogreške različitih WENO metoda. Sve prikazane WENO metode imaju sličnu veličinu pogreške.



(a)

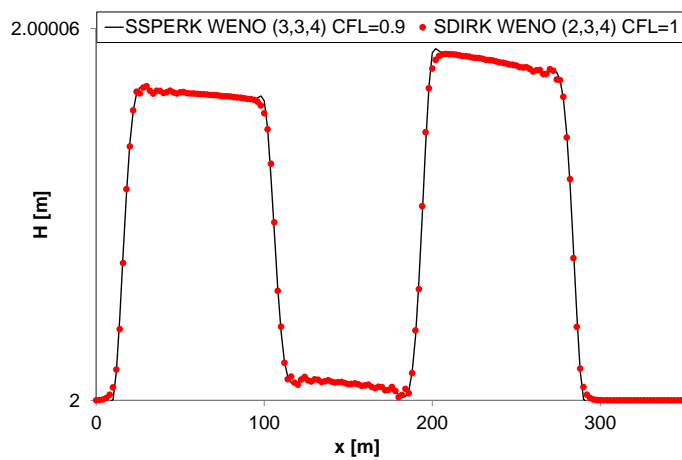


(b)

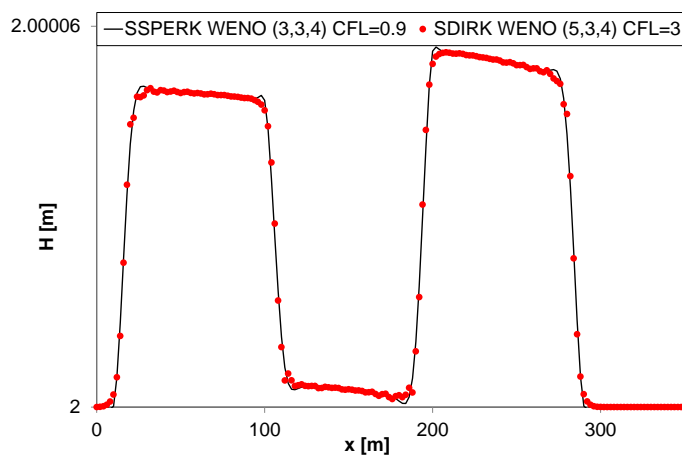


(c)

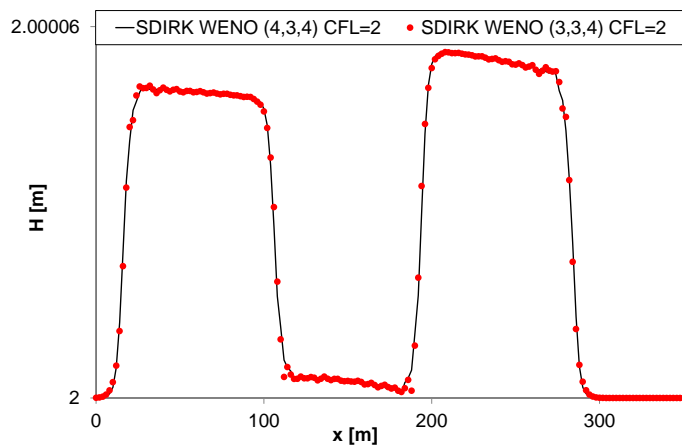
Slika 5.10: TEST 5.4.3 – Usporedba semiimplicitne i eksplicitne WENO metode, $\epsilon = 0.001$.



(a)

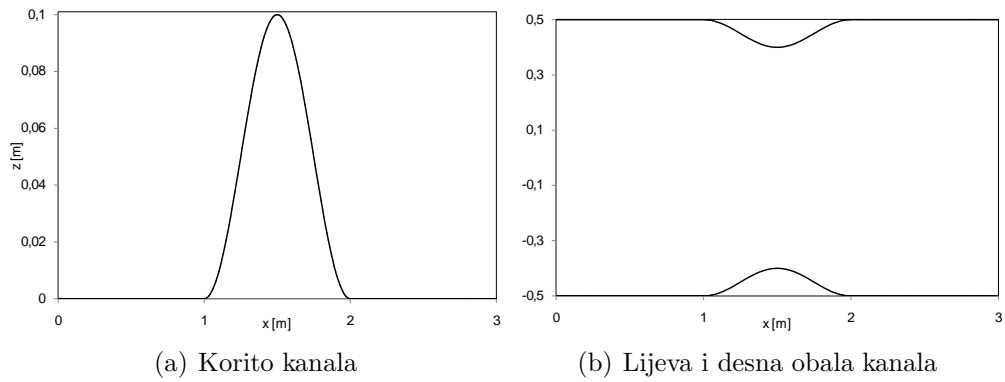


(b)



(c)

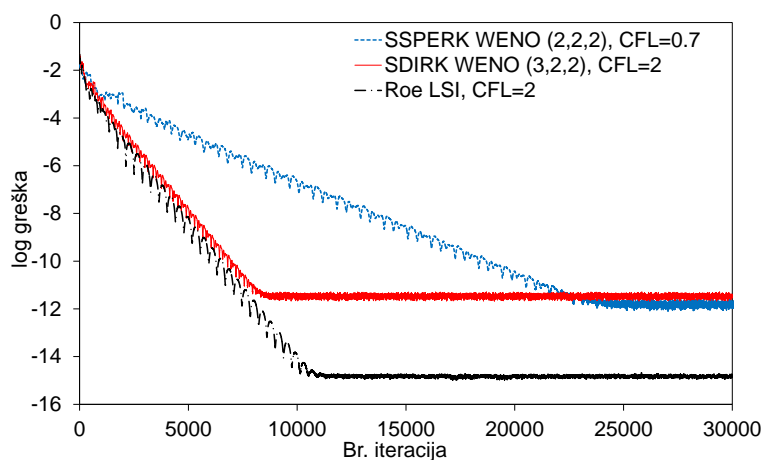
Slika 5.11: TEST 5.4.3 – Usporedba semiimplicitne i eksplicitne WENO metode, $\epsilon = 0.0001$.



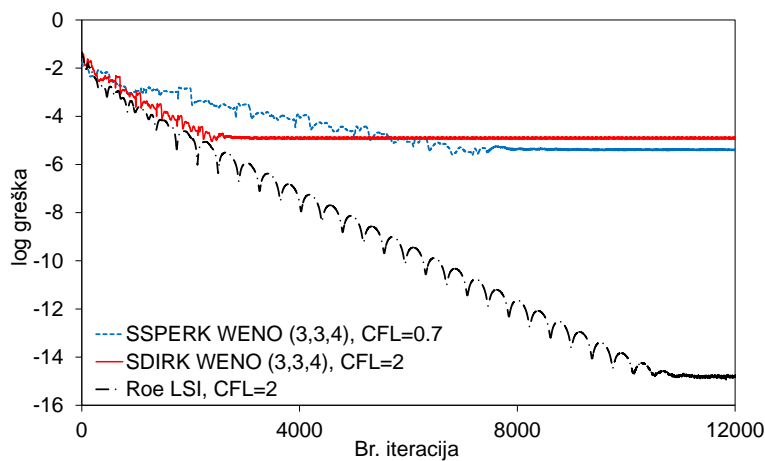
Slika 5.12: TEST 5.4.4 Geometrija kanala

Tablica 5.4: Test 5.4.4 - potkritični tok. L^∞ pogreške u protoku za različite numeričke metode.

Numerička metoda	CFL	L^∞ pogreška	$\log L^\infty$ pogreška
SSPERK WENO (3,3,3)	0.8	6.7E-07	-6.17
SDIRK WENO (3,2,2)	2	1.1E-05	-4.96
SDIRK WENO (3,3,3)	3	6.8E-07	-6.17
SDIRK WENO (4,3,4)	3	3.8E-07	-6.42
SDIRK WENO (5,4,5)	3	2.5E-07	-6.59
SDIRK WENO (8,4,5)	5	4.8E-07	-6.32

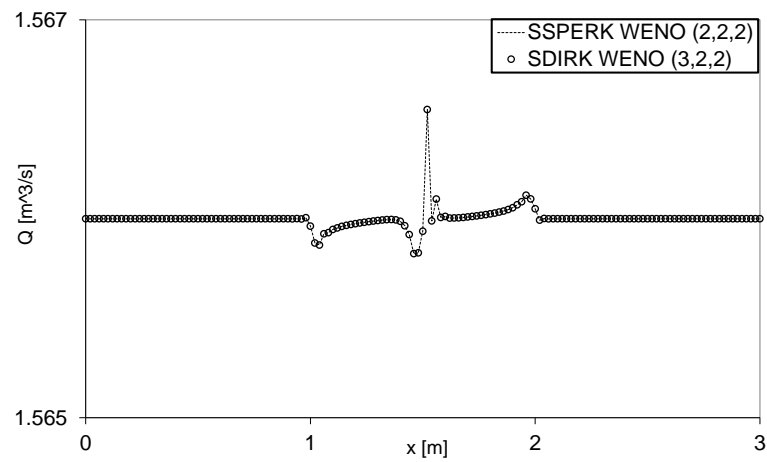


(a)

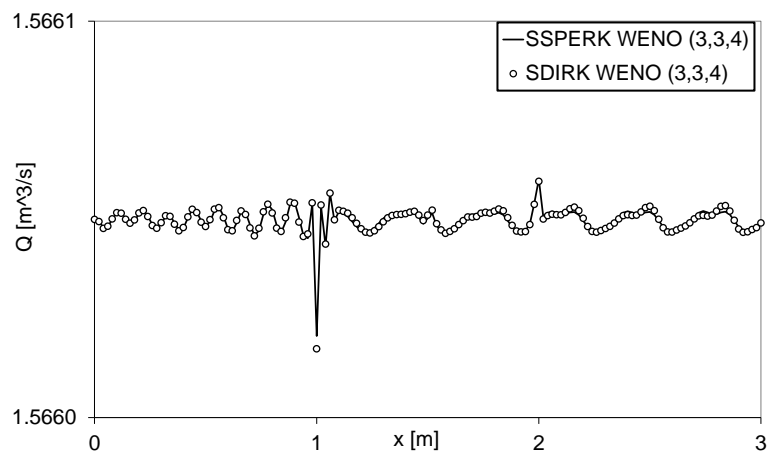


(b)

Slika 5.13: TEST 5.4.4, potkritični tok – Konvergencija za eksplicitnu, semi-implicitnu WENO metodu i lokalno semiimplicitnu Roevu metodu.



(a)



(b)

Slika 5.14: TEST 5.4.4, potkritični tok – Oscilacije u protoku.

Natkritični tok s hidrauličkim skokom

Za zadani kanal promatramo slučaj kada je na uzvodnom kraju nametnut protok $Q = 1.88 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ i razina vode $H = 1 \text{ m}$ na nizvodnom kraju. Zbog kanala varijabilne širine i visine uz zadane rubne uvjete, tok postane natkritičan na mjestu najvećeg suženja kanala, a zatim se nizvodno vraća u podritičan tok. Zbog prijelaza toka, iz natkritičnog u potkritični, nastaje hidraulički skok na kojem gotovo sve poznate numeričke metode daju loše rezultate i velike numeričke pogreške. Na slici 5.15 prikazani su rezultati eksplicitne i semiimplicitne WENO metode istoga reda zajedno s analitičkim rješenjem. Rezultati za razinu vode dobro su usklađeni s analitičkim rješenjem. Kod eksplicitne metode prisutne su numeričke oscilacije u protoku koje nisu prisutne kod rješenja dobivenog novom semiimplicitnom WENO metodom.

5.4.5 Stacionarni transkritični tok s hidrauličkim skokom

MacDonald'sov test [48] s egzaktnim rješenjem koristi se kako bi se ocijenila točnost i efikasnost balansirane metode na problemima transkritičnog toka. Širina otvorenog kanala pravokutnog poprečnog presjeka zadana je izrazom:

$$B(x) = 10 - 5e^{-10\left(\frac{x}{200} - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

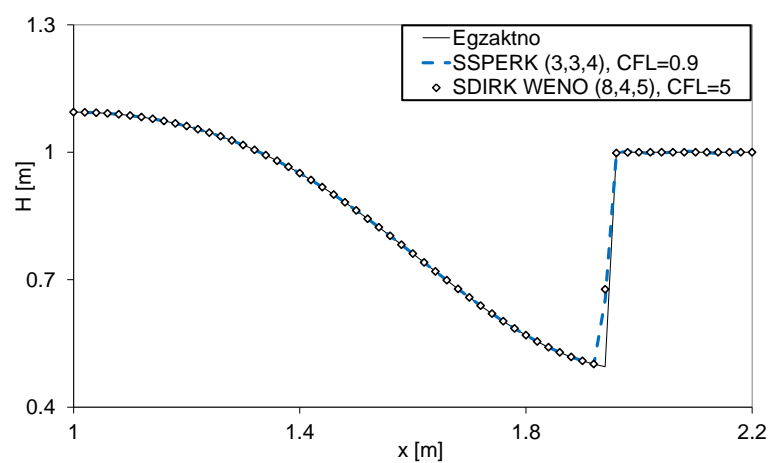
Na ovom kanalu varijabilne širine i korita poznato je stacionarno egzaktno rješenje koje sadrži hidraulički skok na prijelazu iz natkritičnog u podritični tok. Protok u kanalu je $20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ i analitički zadana dubina vode:

$$h(x) = \begin{cases} 0.7 + 0.3 \left(e^{\frac{x}{200}} - 1 \right) & x \leq 120 \\ e^{-0.1(x-120)} \left(-0.154375 - 0.108189 \left(\frac{x-120}{80} \right) - 2.01431 \left(\frac{x-120}{80} \right)^2 \right) + 1.5e^{-0.1\left(\frac{x}{200}-1\right)} & \text{inače} \end{cases}.$$

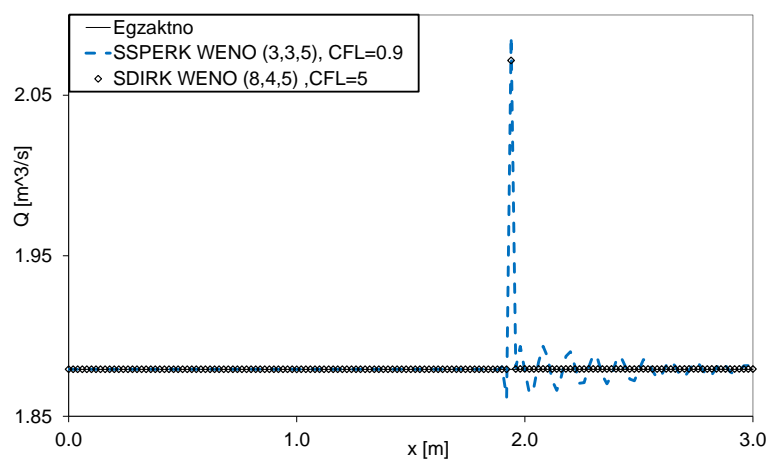
Na uzvodnoj strani kanala zadajemo protok $20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, a na nizvodnoj strani dubinu vode $h = 1.5 \text{ m}$. Kanal je dugačak 200 m sa zadanim Manningovim koeficijentom trenja $n = 0.03$. Domena je podijeljena na 200 numeričkih ćelija.

Diferencijalna jednačina iz koje je moguće odrediti dno kanala dobije se iz jednačine plitkih voda u poglavlju 2.8:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= - \left(1 - \frac{Q^2 B(x)}{g (h(x) B(x))^3} \right) h'(x) \\ &- \frac{Q^2 n(x)^2 (B(x) + 2h(x))^{4/3}}{(h(x) B(x))^{10/3}} + \frac{Q^2 B'(x)}{g h(x)^2 B(x)^3}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

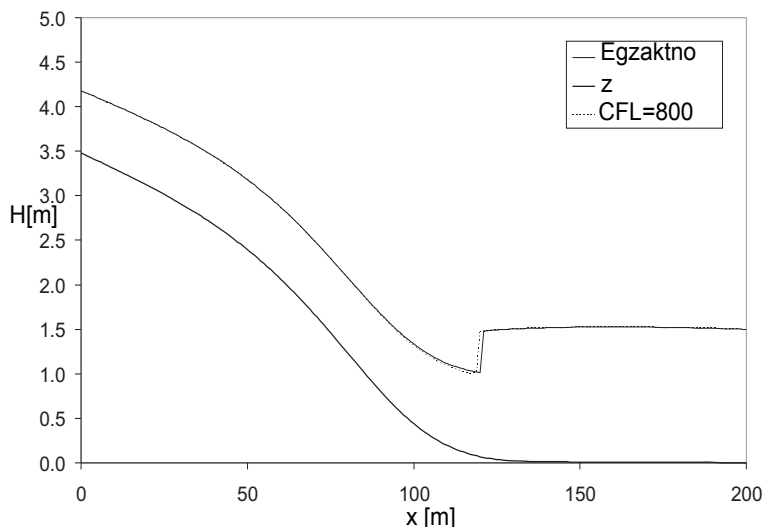


(a) Razina vode



(b) Protok

Slika 5.15: TEST 5.4.4, transkritični tok – Numerički rezultati za semiimplicitnu i eksplicitnu WENO metodu.



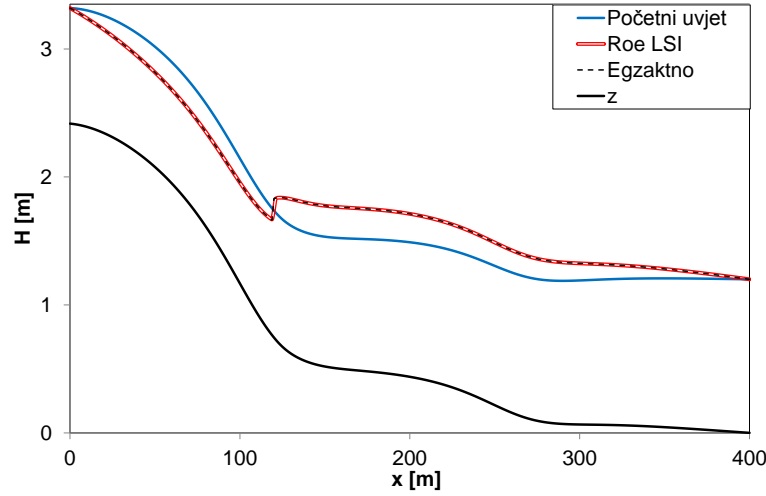
Slika 5.16: TEST 5.4.5 –Usporedba analitičkog rješenja i rezultata balansirane semiimplicitne metode za razinu vode.

Na ovom testu bilo je moguće koristiti ekstremno visoke vrijednosti CFL broja. Na slici 5.16 vidljivo je dobro podudaranje analitičkog i numeričkog rješenja za $CFL = 800$. Rješenje dobiveno eksplicitnom metodom za $CFL = 0.95$ nije prikazano na slici jer se poklapa s rješenjem implicitnom metodom. Na stacionarnim problemima vidi se visoka efikasnost implicitne metode jer je potrebno proračunsko vrijeme bilo skoro 200 puta kraće.

5.4.6 Stacionarni transkritični tok s hidrauličkim skokom na trapeznom kanalu

MacDonald'sov numerički test [48] s analitičkim rješenjem koristi se za testiranje točnosti i efikasnosti balansiranih metoda za transkritični stacionarni tok u kanalu trapeznog poprečnog presjeka. Nagib stranice kanala je $S = \tan(\alpha) = 2$, gdje je α kut između bočne stranice i korita kanala. Mannin-gov koeficijent trenja je konstantan na cijelom kanalu $n = 0.03$. Varijabilna širina dna kanala zadana je izrazom:

$$B_0(x) = 10 - 5 \left(e^{-50 \left(\frac{x}{400} - \frac{1}{3} \right)^2} + e^{-50 \left(\frac{x}{400} - \frac{2}{3} \right)^2} \right),$$



Slika 5.17: TEST 5.4.6 – Egzaktno, približno rješenje i početni uvjet za stacionarni problem.

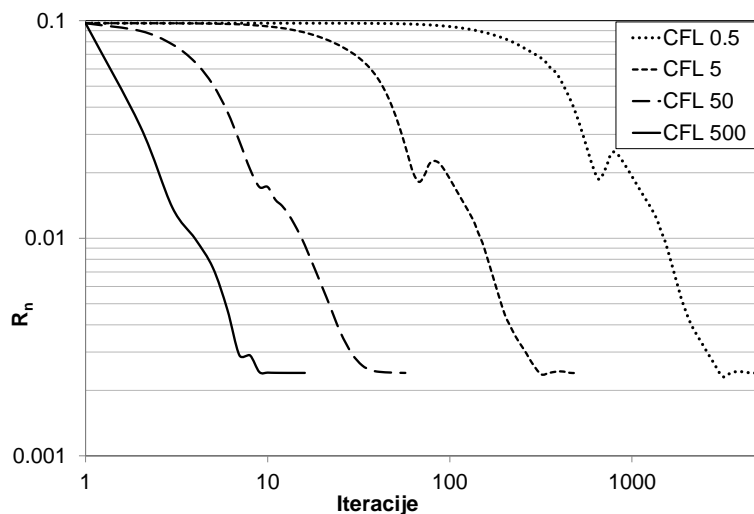
a dubina vode

$$h(x) = \begin{cases} 0.9 + 0.25 \left(e^{-\frac{x}{40}} + e^{15\left(\frac{x}{40} - \frac{3}{10}\right)} - 1 \right), & x \leq 120 \\ \left(-0.183691 + 1.519577 - 18.234429 \left(\frac{x-120}{280} \right)^2 \right) e^{-0.09(x-120)} + 1.5e^{0.16\left(\frac{x}{400}-1\right)} - 0.3e^{2\left(\frac{x}{400}-1\right)}, & x > 120 \end{cases}$$

Na uzvodnoj strani kanala zadan je konstantan protok $Q(0, t) = 20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, a na nizvodnoj strani konstantna dubina vode $h(400, t) = 1.2 \text{ m}$. Iz zadanog stacionarnog rješenja moguće je izračunati nagib kanala iz zadane širine $B_0(x)$, bočnog nagiba kanala S , Manningovog koeficijenta n , zadane dubine i konstantnog protoka. Diferencijalna jednadžba iz koje je moguće odrediti dno kanala dobije se iz jednadžbe plitkih voda (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = & - \left(1 - \frac{Q^2 (B_0(x) + 2S h(x))}{g h(x)^3 (B_0(x) + S h(x))^3} \right) h'(x) \\ & - \frac{Q^2 n(x)^2 (B_0(x) + 2h(x)\sqrt{1+S^2})^{4/3}}{(h(x) (B_0(x) + S h(x)))^{10/3}} + \frac{Q^2 B_0'(x)}{g h(x)^2 (B_0(x) + S h(x))^3}. \end{aligned}$$

Dno kanala, početni uvjeti i rješenje su prikazani na slici 5.17.



Slika 5.18: TEST 5.4.6 – Konvergencija prema stacionarnom rješenju za različite CFL brojeve.

Numerički rezultati Roevom eksplicitnom i Roevom LSI metode dobro se poklapaju s analitičkim rješenjem. Rezultati eksplicitne metode za CFL = 0.5 identični su semiimplicitnoj metodi za CFL = 500 uz dramatičnu razliku u vremenu potrebnom za dostizanje stacionarnog rješenja.

Da bismo ocijenili efikasnost semiimplicitnih metoda, koristit ćemo test konvergencije kod kojeg se pogreška promatra u ovisnosti o broju iteracija. Standardnu relativnu pogrešku za svaki vremenski korak ćemo računati izrazom

$$R_n = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{h_i^n - h(x_i)}{h(x_i)} \right)^2},$$

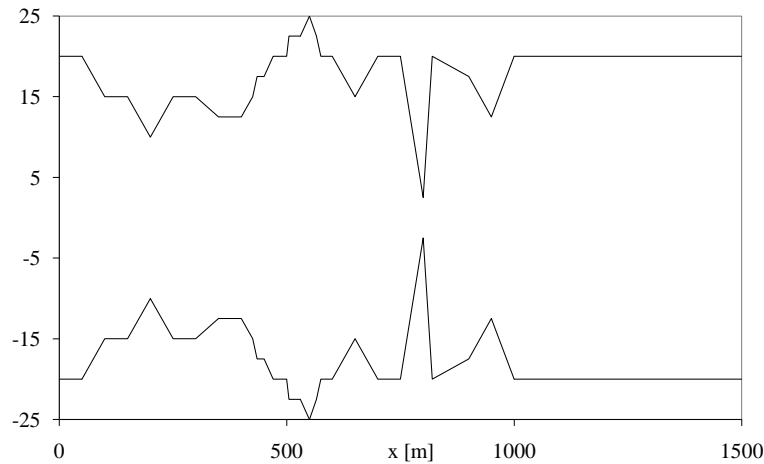
gdje se $h(x_i)$ odnosi na stacionarnu dubinu vode u čvoru x_i . Početni uvjet na slici 5.17 zadan je daleko od rješenja stacionarnog problema. Proračun se provodi dok se ne postigne zadana točnost rješenja. Rezultati za različite vrijednosti CFL broja prikazani su na slici 5.18. Broj iteracija Roeve LSI metode linearno ovisi o CFL broju.

5.4.7 Kanal s izrazito nepravilnom geometrijom

Numeričke metode koje nisu balansirane gotovo su neupotrebljive na kanalima s vrlo nepravilnom geometrijom. Jedan od takvih kanala je predložen u [31]. Lijeva i desna obala kanala prikazane su na slici 5.19, a dno kanala je zadano tablicom 5.5.

Tablica 5.5: TEST 5.4.7 Dno kanala

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400	425
$z(x)$	0	0	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8
x	435	450	470	475	500	505	530	550	565	575
$z(x)$	9	9	9	9.1	9	9	6	5.5	5.5	5
x	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
$z(x)$	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0	0



Slika 5.19: TEST 5.4.7 -Lijeva i desna obala kanala.

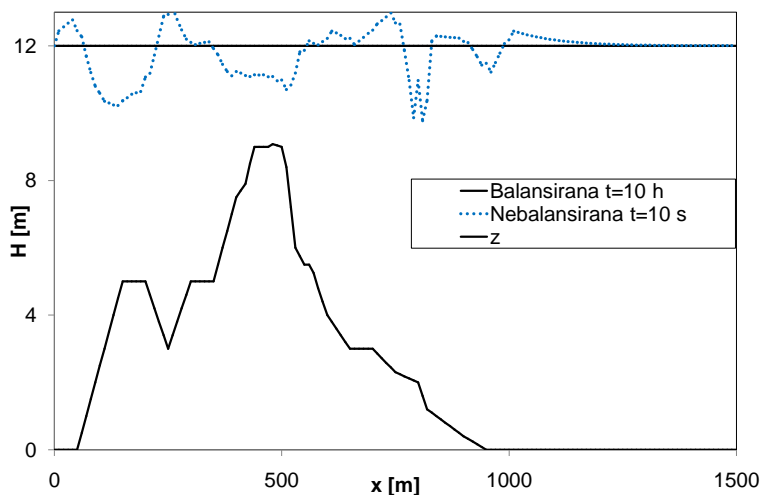
U originalnom testu kanal je pravokutan, dok ćemo mi koristiti trapezni kanal s nagibom stranice $S = 2$. Proračun će se izvoditi na uniformnoj mreži širine $\Delta x = 2.5$ m za $CFL = 800$.

Mirna voda

U slučaju mirne vode semiimplicitna Roeva metoda je imala pogrešku u protoku veličine 10^{-12} , a pogreška u dubini vode je reda veličine 10^{-20} . Usporedba rezultata razine vode dobivene balansiranim i nebalansiranim metodom prikazana je na slici 5.20. Roeva implicitna metoda koja nije balansirana, kod koje je izvorni član jednostavno evaluiran u nekoj točki, proizvela je neprihvatljivo velike pogreške. Balansirana Roeva semiimplicitna metoda ne pokazuje znakove nestabilnosti niti za ekstremno velike vrijednosti CFL broja.

Plimni val u kanalu

U ovom testu promatrat ćemo nestacionarni problem propagacije plimnog vala. U početku je zadana mirna voda na razini $H = 12$ m. Plimni val je



Slika 5.20: TEST 5.4.7 – Razina vode za balansiranu i nebalansiranu semi-implicitnu metodu.

Tablica 5.6: TEST 5.4.7 Plimni val –Proračunsko vrijeme i relativno ubrzanje za simulacije do trenutka $t = 10800$ s.

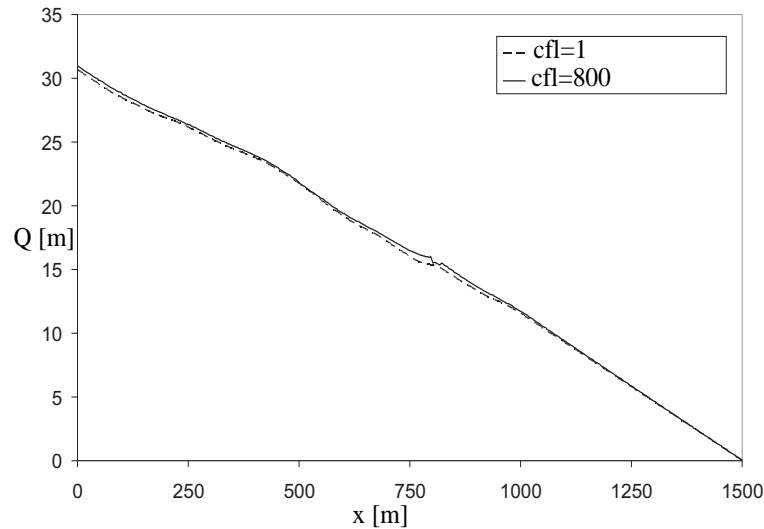
Metoda	CFL	Vrijeme	Rel. ubrzanje
EksPLICITNA	0.95	308	
Semiimplicitna	0.95	797	0.44
	2	411	0.74
	10	73	4.2
	100	8	38.5

zadan rubnim uvjetom na lijevoj strani domene

$$h(0, t) = 16 + 4 \sin\left(\frac{(t - 10800)\pi}{21600}\right). \quad (5.25)$$

Na nizvodnoj stani kanala zadan je rubni uvjet zida, tj. $Q(1500, t) = 0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Slika 5.21 prikazuje protok nakon tri sata propagacije plimnog vala dobiven balansiranom semiimplicitnom Roevom metodom. Upotreba balansirane metode nužna je zbog izrazito nepravilne geometrije. Rezultat dobiven za $\text{CFL} = 800$ vrlo malo odstupa od rezultata dobivenog za $\text{CFL} = 1$. Razlika u protoku u \mathbf{L}^1 normi je reda veličine 10^{-4} , a u razini vode je reda veličine 10^{-6} .

Osim kvalitete rezultata za ovaj nestacionarni slučaj, u tablici 5.6 vidljiva je ušteda računalnog vremena implicitnih metoda u odnosu na eksplisitnu.



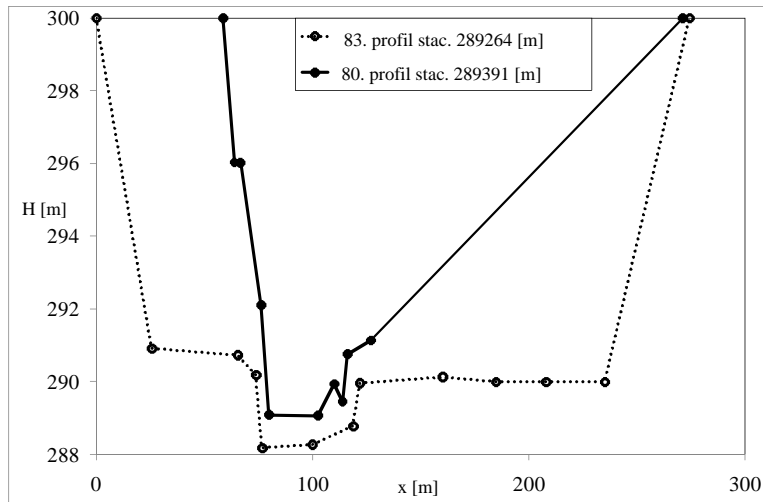
Slika 5.21: TEST 5.4.7 Plimni val–Protok za balansiranu shemu za različite CFL brojeve

5.4.8 Prirodni vodotok rijeke Kupe

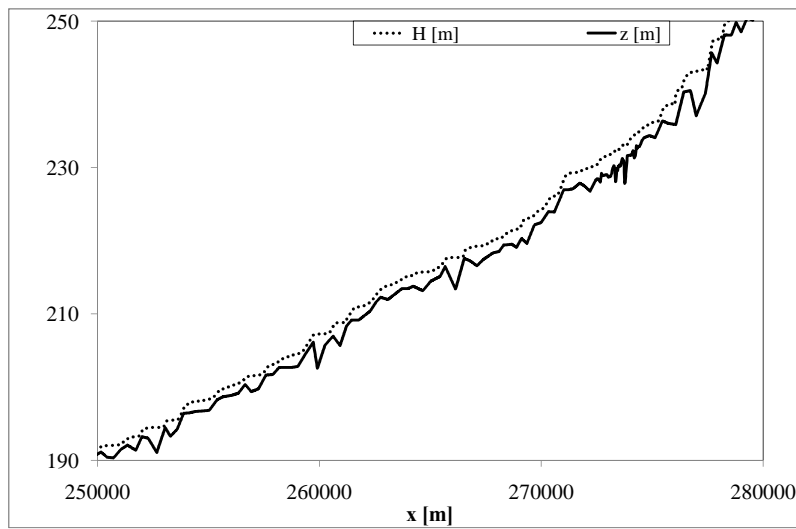
Cilj ovog numeričkog testa je pokazati robusnost, efikasnost numeričkih metoda na realnom vodotoku složene geometrije s općenitim poprečnim presjecima. Analizirani segment rijeke Kupe dugačak je 67 000 m. Geometrija kanala opisana je sa 354 izmjerena poprečna profila. Geometrija kanala je vrlo nepravilna te je stoga vrlo zahtjevna za numeričke metode. Kanal sadrži poplavne doline i kanjone. Dva tipična poprečna profila prikazana su na slici 5.22. Manningovi koeficijenti trenja variraju ovisno o terenu u rasponu od 0.03 do 0.1.

Inicijalno, zadamo protok $Q(x, 0) = 60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ i dubinu vode koja odgovara stacionarnom stanju. Na uzvodnoj strani kanala nametnemo rubni uvjet protoka koji se u vremenu od 10 000 s linearno povećava sa $Q = 60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ na $Q = 120 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Ovakav protok simulira poplavni val na rijeci Kupi. Ni-zvodno zadajemo konstantnu dubinu vode $h(67\,000, t) = 0.59 \text{ m}$. Prostorni korak je $\Delta x = 20$.

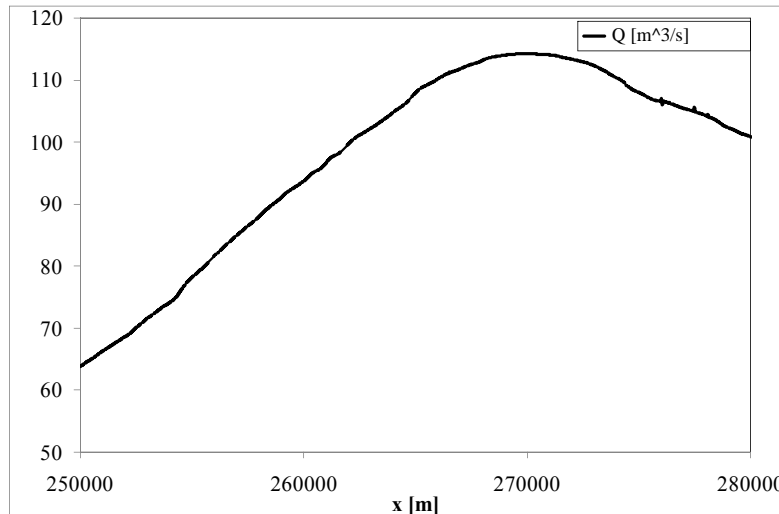
Na slikama 5.23 i 5.24 prikazani su razina vode i protok nakon pet sati simulacije poplavnog vala. Za simulacije su korištene različite vrijednosti CFL broja da bi se ocijenio njegov utjecaj na kvalitetu rezultata i proračunsko vrijeme. Računalno vrijeme implicitne i semiimplicitne Roeve metode uspoređeno je s eksplicitnom Roevom metodom za $\text{CFL} = 0.9$. Rezultati su prikazani u tablici 5.7 u vidu ubrzanja u odnosu na eksplicitnu metodu. Rezultati pokazuju da implicitne i semiimplicitne metode mogu znatno uštedjeti potrebno proračunsko vrijeme. Za velike vrijednosti CFL broja kvaliteta rezultata je i



Slika 5.22: TEST 5.4.8 – Dva poprečna profila na rijeci Kupi.



Slika 5.23: TEST 5.4.8 – Razina vode nakon 5 h propagacije.



Slika 5.24: TEST 5.4.8 – Protok nakon 5h propagacije poplavnog vala.

Tablica 5.7: TEST 5.4.8 – Relativno ubrzanje za implicitne metode u odnosu na Roevu eksplicitnu metodu.

	CFL	0.9	1.5	3	4.5	6
Ubrzanje	FI	0.76	1.24	2.44	3.71	4.92
	SI	0.78	1.20	2.47	3.67	4.86
	LSI	0.99	1.28	2.51	3.77	5.08

dalje zadovoljavajuća.

Da bi se vidjela kvaliteta rezultata, svi rezultati implicitnih metoda su uspoređeni s eksplicitnom balansiranom Roevom metodom na vrlo gustoj mreži. U tablicama 5.8 i 5.9 prikazane su pogreške u obliku maksimalnog i srednjeg odstupanja. Zaključujemo da su pogreške zadovoljavajuće s obzirom na vrlo zahtjevnu geometriju koja uključuje brojne hidrauličke skokove.

5.4.9 Testiranje reda točnosti

Ovaj test koristi se kako bi se numerički procijenio red točnosti WENO metoda na Eulerovom modelu (2.7). Na numeričkoj domeni $[-1, 1]$ zadan je početni uvjet

$$\begin{aligned}\rho(x, 0) &= 1 + 0.2 \sin(\pi x) \\ v(x, t) &= 1 \\ p(x, t) &= 1.\end{aligned}$$

Tablica 5.8: TEST 5.4.8 – Pogreška u dubini vode za implicitne Roeve metode.

Pogreška	CFL	0.9	1.5	3	4.5	6
Maks. . h(mm)	FI	8.48	14.27	29.26	45.01	50.16
	SI		4.66	24.16	34.38	46.73
	LSI		2.80	14.56	29.56	45.34
Rel. Maks. h(%)	FI	$< 10^{-2}$	1.04	2.05	2.98	3.32
	SI		0.36	1.72	2.37	3.10
	LSI		0.16	1.07	2.07	3.00
Sred. h(mm)	FI	0.10	0.19	0.39	0.59	0.87
	SI		0.06	0.33	0.46	0.69
	LSI		0.05	0.22	0.41	0.66
Rel. Sred. h(%)	FI	$< 10^{-2}$	0.01	0.03	0.04	0.06
	SI		$< 10^{-2}$	0.02	0.03	0.05
	LSI		$< 10^{-2}$	0.01	0.03	0.04

Tablica 5.9: TEST 5.4.8 – Pogreška u protoku za implicitne Roeve metode.

Pogreška	CFL	0.9	1.5	3	4.5	6
Maks. Q(m ³ /s)	FI	0.05	0.08	0.15	0.23	0.36
	SI		0.03	0.14	0.20	0.28
	LSI		0.03	0.11	0.18	0.28
Rel. Maks. Q(%)	FI	0.05	0.09	0.16	0.23	0.50
	SI		0.03	0.13	0.19	0.27
	LSI		0.03	0.11	0.17	0.27
Sred. Q(m ³ /s)	FI	0.01	0.02	0.04	0.06	0.09
	SI		0.01	0.03	0.05	0.07
	LSI		0.01	0.02	0.04	0.07
Rel. Sred. Q(%)	FI	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10
	SI		0.01	0.04	0.05	0.08
	LSI		0.01	0.03	0.05	0.08

Tablica 5.10: TEST 5.4.9 – Numerički red točnosti za različite semiimplicitne WENO metode.

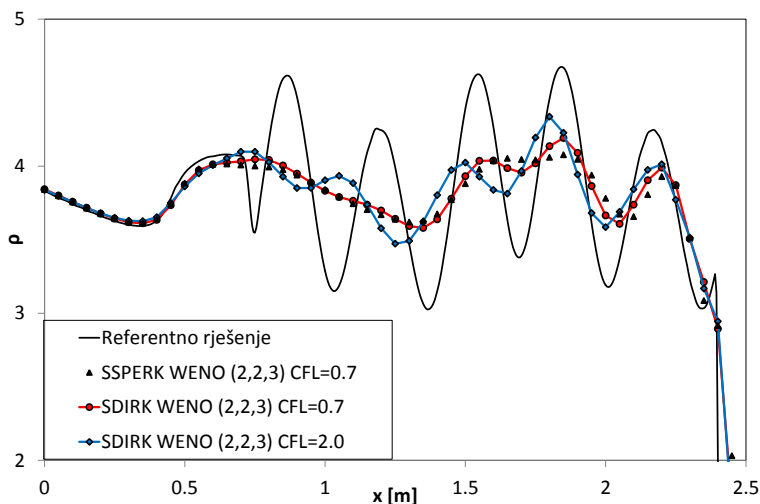
Num. metoda	N	L ¹ pogreška	red
SDIRK WENO (3,3,2)	10	7.38×10^{-5}	
	20	1.76×10^{-6}	2.06
	40	4.57×10^{-6}	1.95
	80	1.15×10^{-6}	1.99
	160	2.80×10^{-7}	2.04
SDIRK WENO (2,2,3)	10	7.77×10^{-6}	
	20	1.76×10^{-7}	5.46
	40	7.46×10^{-9}	4.57
	80	9.70×10^{-10}	2.94
	160	2.17×10^{-10}	2.16
SDIRK WENO (8,4,4)	10	9.37×10^{-7}	
	20	1.77×10^{-8}	5.72
	40	3.51×10^{-9}	2.34
	80	8.62×10^{-10}	2.03
	160	2.14×10^{-10}	2.01

Na rubovima domene postavljeni su periodički rubni uvjeti. Vremenski korak je određen na način da pogreška vremenske diskretizacije odgovara veličini pogreške prostorne diskretizacije. Rješenje računamo do trenutka $t = 0.001$ te usporedimo s egzaktnim rješenjem $\rho(x, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x-t))$, $v(x, t) = 1$ i $p(x, t) = 1$. U L¹ normi odredimo pogrešku rješenja dobivena numeričkom metodom na N numeričkih ćelija. Pogreška ima oblik $R_n = C(n)\Delta x^p$, gdje je p red točnosti numeričke metode. Rješenje za istu numeričku metodu možemo odrediti za više mreža različitih gustoća. Mi ćemo uzeti da je svaka sljedeća mreža dvostruko gušća od prethodne. Iz omjera pogrešaka moguće je procijeniti red točnosti:

$$p \approx \log_2 \left(\frac{R_n}{R_{2n}} \right) + \log_2 \left(\frac{C(2n)}{C(n)} \right) \approx \log_2 \left(\frac{R_n}{R_{2n}} \right)$$

U tablici 5.10 prikazane su pogreške i numerički red točnosti odabranih semiimplicitnih WENO metoda.

Numerički određeni red točnosti je manji od teoretski predviđenog reda. Za $r = 4$ red točnosti je znatno manji od formalnog reda WENO rekonstrukcije. Primijetimo da postoji barijera u određivanju točnosti za pogreške reda veličine 10^{-10} . Barijera se pojavljuje zbog premalog broja znamenki u koeficijentima korištene SDIRK metode iz članka [19].



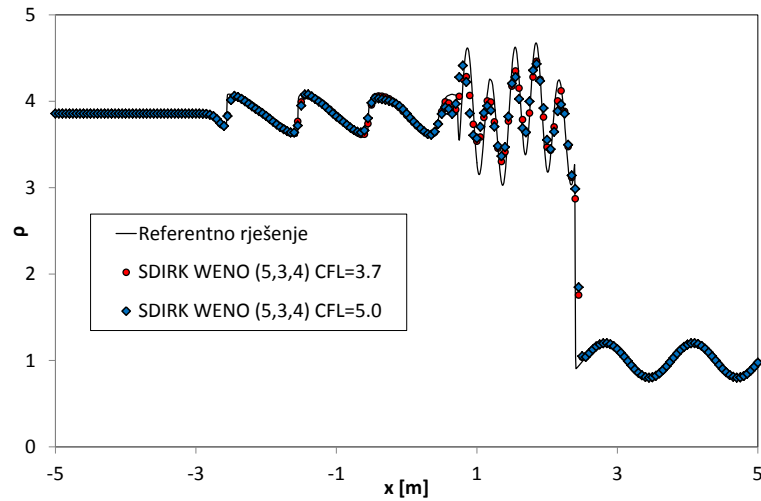
Slika 5.25: TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO (2,2,3) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.

5.4.10 Mach 3 test

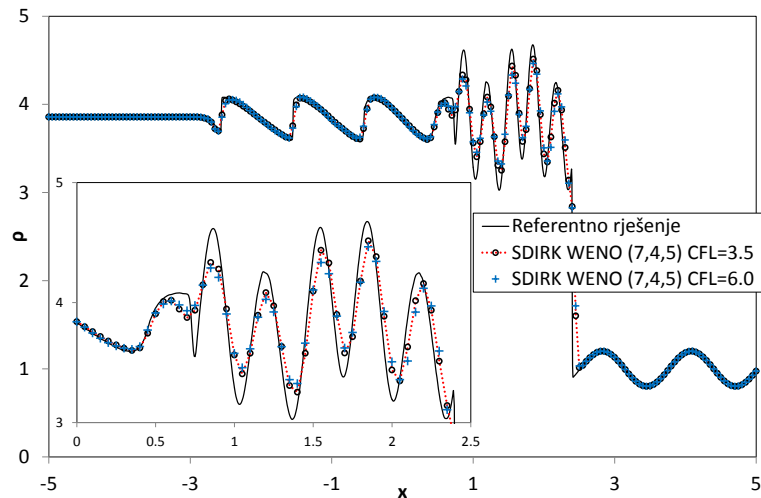
U ovom testu promatra se interakcija šoka sa sinusnim valovima [54]. Početni uvjet je opisan jednačbom:

$$(\rho, v, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333) & , \quad x < -4, \\ (1 + \epsilon \sin(\pi x), 0, 1) & , \quad x \geq -4. \end{cases}$$

Analiziramo ponašanje semiimplicitnih metoda na primjeru interakcije šoka sa složenom strukturom sinusnog vala. Rezultate uspoređujemo s referentnim rješenjem koje je dobiveno SSPERK WENO (3,3,4) metodom na vrlo gustoj mreži na 10^4 numeričkih ćelija. Referentno rješenje je razumna aproksimacija egzaktnog rješenja koje nam nije poznato. Rezultati SDIRK WENO (5,3,4) metode za $CFL = 3.7$ i $\Delta x = 0.005$ su prikazani na slici 5.26. Također, se na slikama 5.25, 5.27 mogu se vidjeti i ostali rezultati. Dobiveni rezultati dobro se slažu s referentnim rješenjem.



Slika 5.26: TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO(5,3,4) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.



Slika 5.27: TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO (7,4,5) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.

6 NOVI WENO ALGORITAM

6.1 Interpolacija

Neka je $a = x_1 < \dots < x_N = b$ particija intervala $[a, b]$ i neka su $v_i = v(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ vrijednosti funkcije $v(x)$ u čvorovima mreže. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da čvor x pripada intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ i da se mreža može proizvoljno proširiti pomoćnim virtualnim čvorovima. Standardna WENO interpolacija, koja aproksimira funkciju $v(x)$ racionalnom funkcijom, opisana je u nastavku.

6.1.1 Standardna WENO interpolacija

Neka je funkcija $v(x)$ dovoljno glatka da interpolacijski polinom postiže visoki red točnosti na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Uzmimo da je $p(x)$ polinom stupnja r , $r \geq 1$ tako da vrijedi:

$$p(x) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{r+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (6.1)$$

Možemo odrediti r različitih interpolacijskih polinoma $p^s(x)$, $s = 0, \dots, r-1$ koji zadovoljavaju red točnosti (6.1). Svaki polinom $p^s(x)$ interpolira $v(x)$ u $(r+1)$ čvorova mreže $\{x_{i-r+1+s}, \dots, x_{i+s+1}\}$, odnosno:

$$p^s(x_j) = v_j, \quad j = i - r + 1 + s, \dots, i + s + 1.$$

Najmanji interval koji sadrži sve čvorove $\{x_{i-r+1+s}, \dots, x_{i+s}\}$ koji opisuju polinom $p^s(x)$ označit ćemo sa:

$$S_{r,s}(i) = [x_{i-r+s+1}, x_{i+s+1}], \quad s = 0, \dots, r-1. \quad (6.2)$$

Svaki interval $S_{r,s}(i)$ definiran sa (6.2) nužno sadrži čvorove x_i i x_{i+1} . Za svaki $S_{r,s}(i)$, $s = 0, \dots, r-1$, može se odrediti aproksimacija glatke funkcije $v(x)$ reda točnosti $(r+1)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Uniju svih intervala $S_{r,s}(i)$, koja sadrži $2r$ čvorova mreže, označimo:

$$\mathcal{T}(i) = \bigcup_{s=0}^{r-1} S_{r,s}(i).$$

Slijedeći isti postupak kao i za intervale $S_{r,s}(i)$, intervalu $\mathcal{T}(i)$ možemo pridružiti interpolacijski polinom $q(x)$ stupnja $2r - 1$. Ako je $v(x)$ glatka na intervalu $\mathcal{T}(i)$, tada je $q(x)$ njena aproksimacija reda $2r$. Može se pokazati da postoje funkcije $C_{r,s}(x)$, tako da vrijedi:

$$q(x) = \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x)p^s(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (6.3)$$

$C_{r,s}(x)$ su polinomi stupnja $(r - 1)$ koje se često u literaturi naziva idealnim težinama i za koje (vidi [10, 47]) vrijedi:

$$C_{r,s}(x) \geq 0 \text{ i } \sum_{s=0}^{r-1} C_{r,s}(x) = 1, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Iz (6.3) i svojstava idealnih težinskih faktora slijedi da u proizvoljnoj točki s koordinatom $x \in [x_i, x_{i+1}]$ možemo odrediti približnu vrijednost funkcije $v(x)$ reda točnosti $2r$ kao konveksnu kombinaciju približnih vrijednosti reda točnosti $(r+1)$. Opisani postupak dat će interpolacijski polinom visokog reda točnosti kada je funkcija $v(x)$ glatka. U slučaju funkcije koja nije dovoljno glatka kod interpolacijskog polinoma mogu se pojaviti oscilacije.

WENO interpolacija je poboljšanje prethodno opisanog algoritma te može dati interpolacijsku krivulju s boljim svojstvima. Poboljšanje počiva na ideji izbjegavanja oscilacija koje nastaju u slučajevima kada funkcija $v(x)$ nije glatka. Zapravo, $v(x)$ čak može imati i funkcijske skokove. Osnovna ideja je da umjesto polinoma $q(x)$ uzmemo konveksnu kombinaciju oblika

$$v_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \omega_{r,s}(x)p^s(x),$$

pri čemu su $\omega_{r,s}(x)$ nelinearne težinske funkcije koje zadovoljavaju ista svojstva kao u slučaju standardne WENO rekonstrukcije (4.21). Ključni korak za određivanje neoscilirajuće interpolacije leži u odabiru težinskih funkcija. Ako su podaci glatki na intervalu $S_{r,s}(i)$, tada funkcije $\omega_{r,s}(x)$ ne smiju previše odstupati od idealnih težina $C_{r,s}(x)$ tj.

$$\omega_{r,s}(x) = C_{r,s}(x) + \mathcal{O}(\Delta x^r), \quad s = 0, \dots, r - 1. \quad (6.4)$$

Prema [53], ako je uvjet (6.4) zadovoljen, tada je $v_r(x)$ aproksimacija reda $2r$. Ako se funkcijski skok pojavi u intervalu $S_{r,s}(i)$ za neki s , tada težina $\omega_{r,s}(x)$ mora biti vrlo mala tako da umanjiti utjecaj polinoma koji sadrži oscilacije. Tako se dobije neoscilirajuća interpolacija.

Preciznije, težine $\omega_{r,s}(x)$ odabrati ćemo na isti način kao u (4.22), tj.

$$\omega_{r,s}(x) = \frac{\alpha_{r,s}(x)}{\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{r,j}(x)}, \quad (6.5)$$

pri čemu je

$$\alpha_{r,s}(x) = \frac{C_{r,s}(x)}{\epsilon + SI_{r,s}^2}. \quad (6.6)$$

Parametar ϵ uvodi se da bismo izbjegli nulu u nazivniku i često se uzima $\epsilon = 10^{-15}$. Ovdje, kao i u [21], koristimo izraz (6.6) iako se u literaturi često koristi i

$$\alpha_{r,s}(x) = \frac{C_{r,s}(x)}{(\epsilon + SI_{r,s})^2}.$$

Indikator glatkoće $SI_{r,s}$ koji se pojavljuje u (6.6) predstavlja mjeru oscilacija interpolacijskog polinoma $p^s(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Slično kao u slučaju standardne rekonstrukcije (4.23) koristimo:

$$SI_{r,s} = \sum_{l=1}^r \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l p^s(x)}{dx^l} \right)^2 dx.$$

Detaljniji opis svojstava indikatora glatkoće i WENO procedure može se naći u [21, 53, 52, 47].

6.1.2 BWENO interpolacija

WENO algoritam koji je opisan u poglavlju 6.1.1 koristi se za aproksimaciju visokog reda kada je funkcija $v(x)$ glatka i kao neoscilirajuća aproksimacija u blizini funkcijskih skokova. Međutim, u nekim situacijama WENO algoritam ne može izbjeći oscilacije. WENO aproksimacija je napravljena uz pretpostavku da su funkcijski skokovi izolirani i da između njih nema interakcije. Uzmimo za primjer dva funkcijska skoka koja se nalaze relativno blizu. Ako između dva diskontinuiteta ima manje od r čvorova mreže, tada će svi interpolacijski polinomi stupnja r ili više oscilirati u tom području. Opisana WENO procedura koja, koristi konveksnu kombinaciju tih polinoma neće moći izbjeći oscilacije. Ovaj problem može se ublažiti ako se u konstrukciji koriste polinomi nižeg stupnja.

Konstrukciju opisanu u poglavlju 6.1.1 promijenit ćemo na takav način da se u konstrukciji koriste polinomi nižeg stupnja (vidi [11]). Nova procedura zadržava osnovna svojstva standardnog algoritma te nudi fleksibilniju konstrukciju koja pritom omogućuje neka poboljšanja.

Cilj je odrediti aproksimaciju $p_r(x)$ funkcije $v(x)$, koja interpolira $v(x)$ barem u čvorovima x_i i x_{i+1} . Ako je funkcija $v(x)$ dovoljno glatka, $p_r(x)$ može postići red točnosti $2r$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, odnosno:

$$p_r(x) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^m), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad 2 \leq m \leq 2r.$$

Zahtijevat ćemo da je $p_r(x)$ neoscilirajući polinom ili racionalna funkcija. Osim toga, aproksimacija mora omogućiti oštru rezoluciju funkcijskih skokova.

Kod novog se algoritma funkcija $p_r(x)$ definira rekurzivno. Funkcije $p_{r,k,l}(x)$, $k = 1, \dots, 2r$, $l = 1, \dots, 2r - k + 1$, određuju se iz rekurzivnog binarnog stabla:

$$\begin{aligned} p_{r,1,l}(x) &= v_{i-r+l}, \\ p_{r,k,l}(x) &= \omega_{r,k,l}(x) p_{r,k-1,l}(x) + (1 - \omega_{r,k,l}(x)) p_{r,k-1,l+1}(x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Konačno, uzimamo

$$p_r(x) = p_{r,2r,1}(x).$$

Ovdje su $\omega_{r,k,l}(x)$ težinske funkcije koje odgovaraju nelinearnim težinama u WENO interpolaciji, dok su $p_{r,k,l}(x)$ funkcije koje ovise o čvorovima u intervalu:

$$S_{r,k,l}(i) = [x_{i-r+l}, x_{i-r+l+k-1}]. \quad (6.8)$$

te vrijedi: $S_{r,k,l}(i) = S_{r,k-1,l}(i) \cup S_{r,k-1,l+1}(i)$.

Odabir težinskih funkcija $\omega_{r,k,l}(x)$ ključan je za opisanu binarnu WENO konstrukciju koju ćemo skraćeno označavati sa BWENO. Prije nego konačno opišemo algoritam, treba primijetiti da u slučaju kada su funkcije $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ interpolacijski polinomi na intervalima $S_{r,k-1,l}(i)$ i $S_{r,k-1,l+1}(i)$, odabirom težinskih funkcija $\omega_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x)$, gdje je

$$C_{r,k,l}(x) = \frac{x - x_{i-r+l+k-1}}{x_{i-r+l} - x_{i-r+l+k-1}}, \quad (6.9)$$

korak ove rekurzije postaje jednak Nevilleovom algoritmu konstrukcije interpolacijskog polinoma. U tom slučaju, funkcija $p_{r,k,l}(x)$ definirana s (6.7) postaje interpolacijski polinom na čvorovima intervala $S_{r,k,l}(i)$.

BWENO algoritam konačno će biti opisan nakon definiranja težinske funkcije $\omega_{r,k,l}(x)$. Prije toga moramo definirati indikatore glatkoće:

$$SI_{r,k,l} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta x^{2j-1} \left(\frac{d^j p_{r,k,l}(x)}{dx^j} \right)^2 dx. \quad (6.10)$$

Indikatori mjere oscilacije funkcija $p_{r,k,l}(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

U nastavku ćemo opisati dvije vrste BWENO interpolacije koje se razlikuju u težinskoj funkciji.

Racionalna BWENO interpolacija

Težinsku funkciju definiramo sa

$$\omega_{r,k,l}(x) = \begin{cases} k \geq 4, \\ R_{r,k,l}(x), & l > \max \{0, r + 2 - k\}, \\ & l < r + \min \{0, r + 2 - k\}, \\ C_{r,k,l}(x), & \text{inače,} \end{cases} \quad (6.11)$$

$$R_{r,k,l}(x) = \frac{C_{r,k,l}(x)(\epsilon + SI_{r,k-1,l+1}^{\alpha_{r,k,l}})}{\epsilon + C_{r,k,l}(x)SI_{r,k-1,l+1}^{\alpha_{r,k,l}} + (1 - C_{r,k,l}(x))SI_{r,k-1,l}^{\alpha_{r,k,l}}}, \quad (6.12)$$

pri čemu su $C_{r,k,l}(x)$ idealne linearne težine definirane u (6.9), a $SI_{r,k-1,l+1}$ i $SI_{r,k-1,l}$ indikatori glatkoće definirani u (6.10). $R_{r,k,l}(x)$ je monotona racionalna funkcija na intervalu $S_{r,k,l}(i)$, koja se koristi kako bi se povećao utjecaj „gladnih“ funkcija u interpolacijskom postupku. Neke eksponente $\alpha_{r,k,l} \geq 0$ možemo odabrati slobodno kako bismo dobili aproksimaciju sa željenim svojstvima. Ako odaberemo $\alpha_{r,k,l} = 0$, tada težinska funkcija postaje jednaka idealnoj težini, tj. $R_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x)$.

Iz (6.11) slijedi da je za neke indekse težinska funkcija racionalna ako su odgovarajući eksponenti $\alpha_{r,k,l}$ strogo pozitivni. Iz tog razloga ovaj algoritam nazivamo racionalna BWENO interpolacija.

Ideja korištenja takvih težinskih funkcija dolazi od klasične WENO interpolacije kod koje se r polinoma reda točnosti r kombinira pomoću težinskih funkcija (6.5) i (6.6) kako bi se dobila neoscilirajuća aproksimacija visokog reda točnosti $2r$. U novom algoritmu težinska funkcija $\omega_{r,k,l}(x)$ kombinira dva susjedna polinoma na razini $k-1$ kako bi se dobila njihova neoscilirajuća kombinacija na razini k koja može postići red točnosti $k+1$.

Ako promotrimo indekse koji se pojavljuju u definiciji (6.11), uočimo da ako intervali $S_{r,k-1,l}(i)$ i $S_{r,k-1,l+1}(i)$ ne sadrže središnji interval $[x_i, x_{i+1}]$, tada se uzima $\omega_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x)$. To znači da su težine odabrane na način da ako su $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ interpolacijski polinomi od kojih barem jedan ne sadrži interval $[x_i, x_{i+1}]$. U tom slučaju slijedi da je težinska funkcija jednaka idealnoj te je (u skladu sa zaključkom iz prethodnog poglavlja) $p_{r,k,l}(x)$ interpolacijski polinom na uniji intervala $S_{r,k,l}(i)$ višeg reda točnosti.

Prema tome sve su funkcije $p_{r,k,l}(x)$ za $k < 4$ interpolacijski polinomi. Funkcija $p_{r,4,r-1}(x)$ kojoj pripada interval $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ prva je funkcija u rekurziji koja se dobije težinskom racionalnom kombinacijom interpolacijskih polinoma $p_{r,3,r-1}(x)$ i $p_{r,3,r}(x)$. Budući da oba polinoma sadrže centralni interval $[x_i, x_{i+1}]$ moguće je odrediti njihove indikatore glatkoće i koristiti racionalnu težinsku funkciju $R_{r,4,r-1}(x)$. Ista diskusija vrijedi za sve slučajeve kada $S_{r,k-1,l}(i)$ i $S_{r,k-1,l+1}(i)$ sadrže interval $[x_i, x_{i+1}]$. Racionalna težinska funkcija (6.12) koristi se da bi se funkcije $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ neoscilirajuće kombinirale. Uočimo da sve funkcije na višim razinama, tj. za $k > 4$, koje su konstruirane korištenjem racionalne težinske funkcije, nužno sadrže $p_{r,4,r-1}(x)$ u rekurziji. To je vidljivo u tablici 6.1 gdje je prikazano binarno stablo na primjeru $r = 4$. U nastavku navodimo neka svojstva težinskih funkcija $\omega_{r,k,l}(x)$ i interpolacijskih funkcija $p_{r,k,l}(x)$.

Lema 6.1 *Za proizvoljan r , $k = 1, \dots, 2r$ i $l = 1, \dots, 2r - k + 1$ funkcije $\omega_{r,k,l}(x)$ i $p_{r,k,l}(x)$ definirane sa (6.8)-(6.12) zadovoljavaju:*

- a) $0 \leq \omega_{r,k,l}(x) \leq 1$, $x \in S_{r,k,l}(i)$,
- b) $\omega_{r,k,l}(x)$, $p_{r,k,l}(x) \in C^\infty([x_{i-1}, x_{i+2}])$,
- c) $p_{r,k,l}(x_{i-r+l+j}) = v_{i-r+l+j}$, $j = 0, \dots, k-1$,
- d) Ako su $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ interpolacijski polinomi i $v'(x) \neq 0$, tada je $p_{r,k,l}(x)$ aproksimacija glatke funkcije $v(x)$ reda točnosti k za $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Dokaz.

a), b) Ako intervali $S_{r,k-1,l}(i)$ i $S_{r,k-1,l+1}(i)$ ne sadrže $[x_i, x_{i+1}]$, tada je $\omega_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x)$. Tvrdnja a) slijedi iz činjenice da idealne linearne težine zadovoljavaju uvjet $0 \leq C_{r,k,l}(x) \leq 1$ za $x \in S_{r,k,l}(i)$. U tom slučaju $p_{r,k,l}(x)$ je interpolacijski polinom na intervalu $S_{r,k,l}(i)$ pa direktno slijedi tvrdnja b). Isti argumenti vrijede ako samo jedan interval sadrži $[x_i, x_{i+1}]$.

U slučaju kada oba intervala $S_{r,k-1,l}(i)$ i $S_{r,k-1,l+1}(i)$ sadrže $[x_i, x_{i+1}]$, $\omega_{r,k,l}(x)$ može biti racionalna funkcija definirana izrazom (6.12). Pretpostavimo da tvrdnje a) i b) vrijede za sve funkcije na razini $k-1$. Iz pretpostavke $p_{r,k-1,l}(x), p_{r,k-1,l+1}(x) \in C^\infty([x_{i-1}, x_{i+2}])$ slijedi da su $SI_{r,k-1,l}$ i $SI_{r,k-1,l+1}$ pozitivni brojevi. Također, n -ta derivacija funkcije $\omega_{r,k,l}(x)$ jednaka je:

$$\frac{d^n \omega_{r,k,l}(x)}{dx^n} = \frac{Q_n(x)}{(\epsilon + C_{r,k,l}(x)SI_{r,k-1,l+1} + (1 - C_{r,k,l}(x))SI_{r,k-1,l})^{2^n}}, \quad (6.13)$$

gdje je $Q_n(x)$ polinom. Budući da je $0 \leq C_{r,k,l}(x) \leq 1$ za $x \in [x_{i-r+l}, x_{i-r+l+k-1}]$ nazivnik u izrazu (6.13) je veći od ϵ . Slijedi da je

$$\frac{d^n \omega_{r,k,l}(x)}{dx^n} \in C^\infty([x_{i-r+l}, x_{i-r+l+k-1}]). \quad (6.14)$$

Ako je $p_{r,k,l}(x)$ diferencijabilna, tada se i indikator $SI_{r,k,l}$ može odrediti. Da bismo pokazali tvrdnju b) možemo iskoristiti rekurziju (6.7). U slučaju polinoma dokaz je očit pa je dovoljno pokazati da je $p_{r,k,l}(x) \in C^\infty([x_{i-1}, x_{i+2}])$ u racionalnom slučaju. Bez gubitka općenitosti uzmimo da je $\alpha_{r,4,r-1} > 0$. $k = 4$ je najniža razina na kojoj se može koristiti racionalna kombinacija. Neovisno o r , sve racionalne funkcije sadrže $p_{r,4,r-1}(x)$ u svojoj rekurziji.

Funkcije $p_{r,3,r-1}(x)$ i $p_{r,3,r}(x)$ su polinomi pa se indikatori $SI_{r,3,r-1}$ i $SI_{r,3,r}$ mogu odrediti. Također, lako se pokaže da je $0 \leq \omega_{r,4,r-1}(x) \leq 1$. Iz rekurzije (6.7) i (6.14) slijedi da je $p_{r,4,r-1}(x) \in C^\infty([x_{i-1}, x_{i+2}])$. Dakle, tvrdnje a) i b) vrijede za funkciju $p_{r,4,r-1}(x)$, a indukcijom slijedi i za sve promatrane k , l i r .

c) Iz definicije (6.12) slijedi da za proizvoljan r , k i l vrijedi $\omega_{r,k,l}(x_{i-r+l}) = 0$ i $\omega_{r,k,l}(x_{i-r+l+k-1}) = 1$. Uzmimo da $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ zadovoljavaju c). Tada iz rekurzije (6.7) slijedi da je c) zadovoljeno za $p_{r,k,l}(x)$. Tvrdnja c) očito vrijedi za $k = 1$ i indukcijom za sve promatrane k , l i r .

d) Za interpolacijske polinome $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ koji su aproksimacija $v(x)$ reda točnosti $(k-1)$ za $x \in [x_i, x_{i+1}]$ i $v'(x) \neq 0$, indikatori (6.10) imaju oblik $D(1 + \mathcal{O}(\Delta x^{k-1}))$ i vrijedi $\omega_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{k-1})$ [38, 53]. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
 p_{r,k,l}(x) - v(x) &= (\omega_{r,k,l}(x) - C_{r,k,l}(x))p_{r,k-1,l}(x) \\
 &+ (C_{r,k,l+1}(x) - \omega_{r,k,l+1}(x))p_{r,k-1,l+1}(x) + \mathcal{O}(\Delta x^k) \\
 &= (\omega_{r,k,l}(x) - C_{r,k,l}(x))(p_{r,k-1,l}(x) - v(x)) \\
 &+ (C_{r,k,l+1}(x) - \omega_{r,k,l+1}(x))(p_{r,k-1,l+1}(x) - v(x)) + \mathcal{O}(\Delta x^k) \\
 &= \mathcal{O}(\Delta x^k) + \mathcal{O}(\Delta x^{2k-2}) = \mathcal{O}(\Delta x^k).
 \end{aligned}$$

□

Teorem 6.1 *Za proizvoljan r , funkcija $p_r(x)$ definirana sa (6.7)-(6.12) zadovoljava:*

- a) $p_r(x) \in C^\infty([x_{i-1}, x_{i+2}])$,
- b) $p_r(x_{i-r+j}) = v_{i-r+j}$, $j = 1, \dots, 2r$.

Teorem slijedi iz leme 6.1.

Važno je naglasiti da iz teorema slijedi da je $p_r(x)$ glatka interpolacijska funkcija na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

Izrazi (6.7)-(6.12) opisuju BWENO algoritam koji rezultira racionalnom aproksimacijom. U tablici 6.1 prikazano je binarno stablo aproksimacijskih funkcija za $r = 4$. U tablici su naglašene racionalne interpolacijske funkcije, dok su ostale funkcije interpolacijski polinomi. Uočimo da se kod klasičnog WENO algoritma, koristi $r - 1$ racionalnih funkcija, dok se kod BWENO algoritma koristi do $(r - 1)^2$ racionalnih funkcija. Prikazani primjer daje BWENO aproksimaciju koja je najviše osmoga reda točnosti ako su podaci glatki. Ako podaci nisu glatki, tada će algoritam pokušati povećati utjecaj one funkcije koja manje oscilira. Kao što je već naglašeno, u blizini diskontinuiteta (funkcijskog skoka) korištenje polinoma visokog stupnja može izazvati neželjene oscilacije. BWENO algoritam u tim slučajevima koristi polinome nižeg stupnja od klasične WENO procedure.

Na promatranom primjeru za $r = 4$ možemo vidjeti da je standardni WENO algoritam jednostavniji. WENO koristi polinome $p^0(x), \dots, p^3(x)$

Tablica 6.1: Konstrukcija BWENO interpolacijske funkcije na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ za $r = 4$

x_{i-3}	$p_{4,1,1}$								
		$p_{4,2,1}$							
x_{i-2}	$p_{4,1,2}$		$p_{4,3,1}$						
		$p_{4,2,2}$		$p_{4,4,1}$					
x_{i-1}	$p_{4,1,3}$		$p_{4,3,2}$		$p_{4,5,1}$				
		$p_{4,2,3}$		$p_{4,4,2}$		$p_{4,6,1}$			
x_i	$p_{4,1,4}$		$p_{4,3,3}$		$p_{4,5,2}$		$p_{4,7,1}$		
		$p_{4,2,4}$		$p_{4,4,3}$		$p_{4,6,2}$		$p_{4,8,1}$	
x_{i+1}	$p_{4,1,5}$		$p_{4,3,4}$		$p_{4,5,3}$		$p_{4,7,2}$		
		$p_{4,2,5}$		$p_{4,4,4}$		$p_{4,6,3}$			
x_{i+2}	$p_{4,1,6}$		$p_{4,3,5}$		$p_{4,5,4}$				
		$p_{4,2,6}$		$p_{4,4,5}$					
x_{i+3}	$p_{4,1,7}$		$p_{4,3,6}$						
		$p_{4,2,7}$							
x_{i+4}	$p_{4,1,8}$								

kao građevne elemente za aproksimaciju višeg reda. Ti se polinomi konveksno se kombiniraju kako bi dobili racionalnu aproksimacijsku funkciju. Ako su diskontinuiteti prisutni, tada će WENO smanjiti utjecaj polinoma koji sadrže diskontinuitete u svojim intervalima. To nije uvijek moguće pa će u nekim slučajevima algoritam biti prisiljen koristiti oscilatorne polinome. Kada su u pitanju diskontinuiteti, očekujemo da BWENO može proizvesti manje oscilacije jer je moguće koristiti polinome nižeg stupnja. BWENO omogućuje da polinomi nižeg stupnja imaju jači utjecaj na aproksimacijsku funkciju. Ova prednost bit će izraženija za veći r .

Štoviše, BWENO interpolacija može se na neki način smatrati generalizacijom WENO interpolacije. Za slučaj kada je $r = 4$, ako odaberemo $\alpha_{r,k,l} = 0$ za $k \leq 5$, BWENO algoritam će dati interpolacijske polinome $p_{4,5,1}(x), \dots, p_{4,5,4}(x)$ koji odgovaraju polinomima $p^0(x), \dots, p^3(x)$. Ako još odaberemo $\alpha_{r,k,l} = 2$ za $k > 5$, BWENO će proizvesti interpolacijsku funkciju koja je po svojstvima i obliku vrlo slična funkciji dobivenoj klasičnim WENO interpolacijom.

Kod klasičnog WENO pristupa, kao i kod racionalnog BWENO pristupa, težinske funkcije su racionalne i ovise o indikatorima glatkoće. Korištenjem racionalnih težinskih funkcija, u konačnoj se aproksimacijskoj funkciji mogu pojaviti diskontinuiteti. U skladu s teoremom 6.1 ti se diskontinuiteti nalaze izvan intervala $[x_{i-1}, x_{i+2}]$. Bilo bi praktično imati aproksimaciju $p_r(x)$ koja nema diskontinuitete na cijelom svom pridruženom intervalu. Da bismo zadovoljili taj zahtjev, predlažemo korištenje polinomnih težinskih funkcija umjesto racionalnih.

Polinomna BWENO interpolacija

Za dobivanje polinomne BWENO interpolacije, koristi se linearizacija težinske funkcije $\omega_{r,k,l}(x)$ definirane sa (6.11). Stoga se umjesto (6.11) težinske se funkcije definiraju polinomom:

$$\omega_{r,k,l}(x) = \begin{cases} k \geq 4, \\ L_{r,k,l}(x), & l > \max\{0, r+2-k\}, \\ l < r + \min\{0, r+2-k\}, \\ C_{r,k,l}(x), & \text{inače,} \end{cases} \quad (6.15)$$

pri čemu je

$$L_{r,k,l}(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_{r,k,l}(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_{r,k,l}(x_{i+1}). \quad (6.16)$$

Posljedica korištenja (6.15) i (6.16) kao težinske funkcije je po dijelovima polinomna aproksimacija funkcije $v(x)$. Ovakvu aproksimaciju zvat ćemo polinomna ili linearizirana BWENO (LBWENO) aproksimacija.

Moramo pokazati da takva polinomna aproksimacija zadržava poželjna svojstva prethodno opisane racionalne aproksimacije.

Lema 6.2 *Za proizvoljan r , $k = 2, \dots, 2r$ i $l = 1, \dots, 2r - k + 1$, funkcije $\omega_{r,k,l}(x)$ i $p_{r,k,l}(x)$ definirane sa (6.8)-(6.10), (6.15), i (6.16) zadovoljavaju:*

- $0 \leq \omega_{r,k,l}(x) \leq 1$ za $x \in [x_i, x_{i+1}]$,
- $p_{r,k,l}(x)$ je polinom stupnja najviše $(k-1)$,
- $p_{r,k,l}(x_i) = v_i$ i $p_{r,k,l}(x_{i+1}) = v_{i+1}$ za $\max\{0, r+2-k\} \leq l \leq r + \min\{0, r+2-k\}$,
- Ako su $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ interpolacijski polinomi i $v'(x) \neq 0$, tada je $p_{r,k,l}(x)$ aproksimacija glatke funkcije $v(x)$ reda točnosti k za $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Dokaz.

a) Izraz (6.16) dobiven je linearnom interpolacijom izraza (6.11) na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Iz leme 6.1 znamo da su $0 \leq R_{r,k,l}(x_i) \leq 1$ i $0 \leq R_{r,k,l}(x_{i+1}) \leq 1$ pa iz (6.16) slijedi tvrdnja.

b) Nakon linearizacije, iz rekurzije (6.7) slijedi tvrdnja.

c) Dokaz slijedi indukcijom. Za $k < 4$, $p_{r,k,l}(x)$ su interpolacijski polinomi pa tvrdnja očito vrijedi. Isto vrijedi i za sve funkcije na razini $k = 4$ osim za $l = r - 1$. Za $l = r - 1$ uočimo da pridruženi intervali polinoma $p_{r,3,r-1}(x)$ i $p_{r,3,r}(x)$ sadrže interval $[x_i, x_{i+1}]$ iz čega slijedi $p_{r,4,r-1}(x_i) = v_i$

i $p_{r,4,r-1}(x_{i+1}) = v_{i+1}$. Kao što je već spomenuto, sve funkcije na višim razinama su interpolacijski polinomi ili sadrže $p_{r,4,r-1}(x)$ u rekurziji, čime je dokazana baza indukcije. Ako vrijedi $p_{r,k-1,l}(x_i) = p_{r,k-1,l+1}(x_i) = v_i$, tada vrijedi po rekurziji vrijedi $p_{r,k,l}(x_i) = v_i$. Analogno vrijedi za čvor x_{i+1} .

d) Dokaz je sličan onom u lemi 6.1. Neka $p_{r,k-1,l}(x)$ i $p_{r,k-1,l+1}(x)$ aproksimiraju glatku funkciju $v(x)$, $v'(x) \neq 0$ reda točnosti $(k-1)$ za $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Indikatori (6.10) su oblika $D(1 + \mathcal{O}(\Delta x^{k-1}))$. Tada po [38, 53], slijedi da je $\omega_{r,k,l}(x) = C_{r,k,l}(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{k-1})$. Ova oblik je očuvan i nakon linearizacije težinske funkcije. Analogno dokazu iz leme 6.1 slijedi d).

□

Teorem 6.2 *Za proizvoljan r funkcija $p_r(x) = p_{r,2r,1}(x)$ definirana sa (6.7)-(6.10), (6.15) i (6.16) zadovoljava:*

- a) $p_r(x)$ je polinom,
- b) $p_r(x_i) = v_i$ i $p_r(x_{i+1}) = v_{i+1}$.

Teorem slijedi iz leme 6.2.

Možemo zaključiti da dobivene polinomne aproksimacije $p_r(x)$ zadržavaju sva bitna svojstva racionalne BWENO aproksimacije. Postoje također i neke druge prednosti, npr. polinomi se sigurno i jednostavno evaluiraju te postoje poznati jednostavni matematički izrazi koji će olakšati aproksimaciju derivacija funkcije $v(x)$.

Valja uočiti da dobivena aproksimacija ne interpolira funkciju u svim čvorovima pridruženog intervala već samo u dva centralna čvora x_i i x_{i+1} .

6.2 Testovi i primjeri interpolacije

U ovom poglavlju analizirat ćemo ponašanje i red točnosti predloženih racionalnih i lineariziranih interpolacijskih algoritama. Da bismo usporedili BWENO interpolaciju sa standardnom WENO interpolacijom, potrebno je definirati eksponente indikatora glatkoće. Različiti eksponenti $\alpha_{r,k,l}$, koji se pojavljuju u izrazu (6.12) kod konstrukcije racionalne i u izrazu (6.16) kod konstrukcije linearizirane verzije BWENO metode mogu u konačno dati vrlo različite aproksimacije. Za $\alpha_{r,k,l} = 0$ za sve k i l dobijemo zapravo interpolacijski polinom. Za velik $\alpha_{r,k,l}$ aproksimacija će snažno reagirati na varijacije indikatora glatkoće pa će to smanjiti oscilacije, ali može i ometati točnost aproksimacije.

U numeričkim testovima koristit ćemo dvije različite familije numeričkih metoda.

Tablica 6.2: Eksponenti $\alpha_{r,k,l}$ za LBWENO interpolaciju za $r = 4$

$l \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	
3	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2		
4	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0				
6	0	0	0					
7	0	0						
8	0							

Oznake „BWENO”, odnosno „LBWENO” koristit ćemo za prvu familiju krivulja, koja koristi eksponente

$$\alpha_{r,k,l}(x) = \begin{cases} 2, & k = r + 2 \\ 1 - \frac{|r+2-k|}{r-1}, & \begin{aligned} & k \neq r + 2, \\ & \max\{0, r + 2 - k\} < l, \\ & l < r + \min\{0, r + 2 - k\} \end{aligned} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (6.17)$$

Interpolacija s koeficijentima (6.17) bit će konzervativna, tj. rezultat će aproksimacijom koja reducira oscilacije na štetu točnosti. To slijedi iz činjenice da polinomi najnižeg mogućeg stupnja neoscilirajuće kombiniraju u polinome višeg stupnja čime se može izgubiti red točnosti. U tablici 6.2 prikazani su eksponenti za primjer $r = 4$.

Oznake „BWENO2”, odnosno „LBWENO2” koristit ćemo za drugu familiju krivulja, koja koristi eksponente

$$\alpha_{r,k,l}(x) = \begin{cases} 2, & k = r + 2 \\ 2 \left(1 - \frac{|r+2-k|}{r-1}\right), & \begin{aligned} & k > r + 2, \\ & l < r + \min\{0, r + 2 - k\} \end{aligned} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (6.18)$$

Interpolacija s koeficijentima (6.18) na neki način treba oponašati standardnu WENO interpolaciju. U numeričkim ćemo primjerima vidjeti da se ova familija može koristiti umjesto standardne WENO interpolacije te da ima i neke značajne prednosti u odnosu na nju. U tablici 6.3 prikazani su eksponenti druge familije za primjer $r = 4$.

6.2.1 Red točnosti

Na nekim ćemo odabranim primjerima numerički procijeniti red točnosti interpolacijskog algoritma za glatku funkciju na konačnoj domeni $[-1, 1]$ u \mathbf{L}^∞ normi. Domena je podijeljena na N intervala jednake širine. Usporedit ćemo nove LBWENO i LBWENO2 algoritme interpolacije.

Tablica 6.3: Eksponenti $\alpha_{r,k,l}$ za LBWENO2 interpolaciju za $r = 4$

$l \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	0	0	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$	
3	0	0	0	0	0	2		
4	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0				
6	0	0	0					
7	0	0						
8	0							

Tablica 6.4: LBWENO interpolacija za funkciju e^{-x^2}

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	3.9E-02	9.0E-03	5.1E-03	2.7E-03	2.2E-03					
10	9.7E-03	5.1E-04	1.3E-04	4.1E-05	2.7E-05	2	4.1	5.3	6.1	6.3
20	2.5E-03	3.0E-05	2.4E-06	6.5E-07	4.5E-07	2	4.1	5.8	6	5.9
40	6.2E-04	1.8E-06	3.8E-08	1.1E-08	7.7E-09	2	4.1	6	5.9	5.9
80	1.6E-04	1.1E-07	5.9E-10	1.8E-10	1.3E-10	2	4	6	5.9	5.9

Kako interpolacijski algoritam koristi uzorak od $2r$ čvorova, domena je proširena pomoću $r - 1$ dodatnih intervala s obje strane domene. Domenu u prvom koraku podijelimo na pet intervala, a zatim ocijenimo pogrešku WENO interpolacije. U svakom sljedećem koraku udvostručimo broj intervala i mjerimo pogrešku i numerički red točnosti za različite vrijednosti parametra r .

Iako ćemo za interpolaciju odabrati glatke funkcije, poznato je da WENO algoritam sa standardnim indikatorima glatkoće gubi točnost u točkama u kojima derivacije iščezavaju. Također, treba naglasiti da za glatke funkcije bez kritičnih točaka klasična WENO interpolacija postiže red točnosti $2r$ [52].

Red točnosti za funkciju e^{-x^2}

U ovom testu aproksimirat ćemo funkciju e^{-x^2} interpolacijskom WENO krivuljom. Iako je e^{-x^2} glatka, na zadanoj domeni ima maksimum koji nije imao osjetan utjecaj na red točnosti. U tablicama 6.4 i 6.5 prikazane su pogreške i konvergencija za LBWENO i LBWENO2 metodu. LBWENO metoda postiže maksimalno šesti red točnosti, ali korištenje većeg uzorka za ovu metodu i dalje ima smisla jer se pogreška smanjuje povećavanjem parametra r . LBWENO2 pak postiže očekivani red točnosti koji odgovara klasičnoj WENO metodi.

Tablica 6.5: LBWENO2 interpolacija za funkciju e^{-x^2}

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	3.9E-02	9.0E-03	5.1E-03	1.3E-03	1.1E-03					
10	9.7E-03	5.1E-04	1.2E-04	6.3E-06	1.1E-06	2.0	4.1	5.5	7.7	10.0
20	2.5E-03	3.0E-05	2.1E-06	2.0E-08	1.4E-09	2.0	4.1	5.8	8.3	9.7
40	6.2E-04	1.8E-06	3.4E-08	7.3E-11	1.5E-12	2.0	4.1	6.0	8.1	9.8
80	1.6E-04	1.1E-07	5.3E-10	2.8E-13	1.5E-15	2.0	4.0	6.0	8.0	9.9

Tablica 6.6: LBWENO interpolacija za funkciju $\sin^4(\pi x/2)$

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	1.1E-01	1.2E-01	9.0E-02	8.0E-02	7.6E-02					
10	4.3E-02	1.3E-02	6.3E-03	3.5E-03	2.5E-03	1.4	3.2	3.8	4.5	4.9
20	1.2E-02	8.4E-04	2.9E-04	1.8E-04	1.3E-04	1.8	3.9	4.5	4.3	4.3
40	3.1E-03	6.6E-05	2.3E-05	1.4E-05	1.0E-05	2	3.7	3.7	3.6	3.7
80	7.7E-04	4.7E-06	1.5E-06	9.3E-07	6.4E-07	2	3.8	3.9	3.9	4

Red točnosti za funkciju $\sin^4(\pi x/2)$

U ovom ćemo testu aproksimirati funkciju $\sin^4(\pi x/2)$ interpolacijskom WENO krivuljom. Iako je $\sin^4(\pi x/2)$ glatka, na zadanoj domeni ima maksimum. U tablicama 6.6 i 6.7 prikazane su pogreške i konvergencija. Za razliku od rezultata u tablicama 6.4 i 6.5, u ovom slučaju je lokalni ekstrem imao utjecaj na točnost LBWENO i LBWENO2 metode. Red LBWENO metode nešto je veći od četiri, a LBWENO2 metode prelazi devet.

Red točnosti za funkciju e^x

U ovom testu namjeravamo aproksimirati funkciju e^x različitim WENO interpolacijama. U tablicama 6.8, 6.9 i 6.10 prikazane su pogreške i numerički red točnosti u L^∞ normi za različite algoritme. Svi algoritmi osim LBWENO metode postizu očekivani red točnosti WENO interpolacije. LBWENO2 metoda pokazuje isti red točnosti kao i standardna WENO interpolacija, ali pogreške su bitno manje. Na ovom testu, s obzirom na točnost, LBWENO2 metoda predstavlja najbolji izbor.

Tablica 6.7: LBWENO2 interpolacija za funkciju $\sin^4(\pi x/2)$

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	1.1E-01	1.2E-01	9.6E-02	7.4E-02	7.6E-02					
10	4.3E-02	1.3E-02	4.7E-03	2.2E-03	1.1E-03	1.4	3.2	4.4	5.1	6.1
20	1.2E-02	8.4E-04	2.0E-04	2.0E-05	9.5E-06	1.8	3.9	4.6	6.8	6.9
40	3.1E-03	6.6E-05	1.4E-05	1.1E-07	1.6E-08	2	3.7	3.8	7.5	9.3
80	7.7E-04	4.7E-06	9.3E-07	3.8E-10	2.0E-11	2	3.8	3.9	8.2	9.6

Tablica 6.8: LBWENO interpolacija za funkciju e^x

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	6.7E-02	5.6E-04	3.2E-04	1.4E-04	1.0E-04					
10	1.5E-02	9.1E-05	4.6E-06	2.1E-06	1.5E-06	2.1	2.6	6.1	6.1	6.1
20	3.6E-03	6.4E-06	6.8E-08	3.1E-08	2.2E-08	2.1	3.8	6.1	6.1	6.1
40	8.7E-04	4.0E-07	1.0E-09	4.8E-10	3.4E-10	2.0	4.0	6.0	6.0	6.0
80	2.2E-04	2.5E-08	1.6E-11	7.4E-12	5.2E-12	2.0	4.0	6.0	6.0	6.0

Tablica 6.9: LBWENO2 interpolacija za e^x

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	6.7E-02	5.6E-04	9.9E-05	5.0E-07	1.0E-07					
10	1.5E-02	9.1E-05	1.1E-06	6.4E-09	9.2E-11	2.1	2.6	6.4	6.3	10.1
20	3.6E-03	6.4E-06	1.5E-08	2.9E-11	7.3E-14	2.1	3.8	6.3	7.8	10.3
40	8.7E-04	4.0E-07	2.2E-10	1.1E-13		2.0	4.0	6.1	8.0	
80	2.2E-04	2.5E-08	3.3E-12	4.0E-16		2.0	4.0	6.0	8.2	

Interpolacija glatke funkcije

Uzmimo primjer glatke funkcije koja ovisi o parametru ϵ :

$$f(x, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{erf}(A(2x - 1))}{\operatorname{erf}(A)} - (2x - 1) \right), \quad (6.19)$$

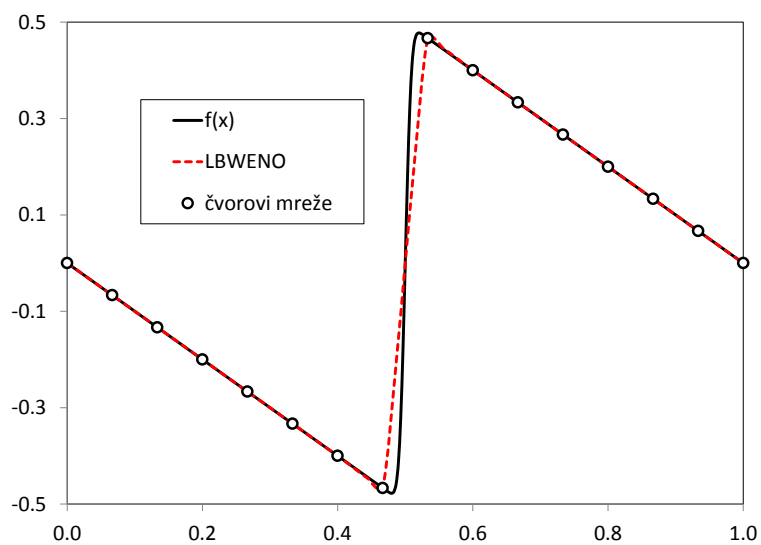
pri čemu je $A = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$. Iako je funkcija (6.19) glatka, kada $\epsilon \rightarrow 0$, $f(x, \epsilon)$ konvergira funkciji koja ima funkcijski skok za $x = 0.5$. Za $\epsilon = 10^{-4}$ funkcija $f(x, \epsilon)$ bit će glatka, ali u blizini $x = 0.5$ očekujemo oscilacije interpolacijske funkcije.

Poznato je da na ovom problemu klasična interpolacija neće dati dobre rezultate. Za razliku od toga BWENO interpolacija ima vrlo male pogreške i blage oscilacije. Na slikama 6.1 a) i b) vide se blage oscilacije interpolacijske funkcije. Oscilacije su bitno manje na gušćoj mreži što je vidljivo na slikama 6.2 a) i b). Oscilacije se u ovim slučajevima ne mogu izbjeći, ali se mogu znatno umanjiti ugušćavanjem mreže i odabirom većih vrijednosti eksponenta $\alpha_{r,k,l}$ u BWENO algoritmu.

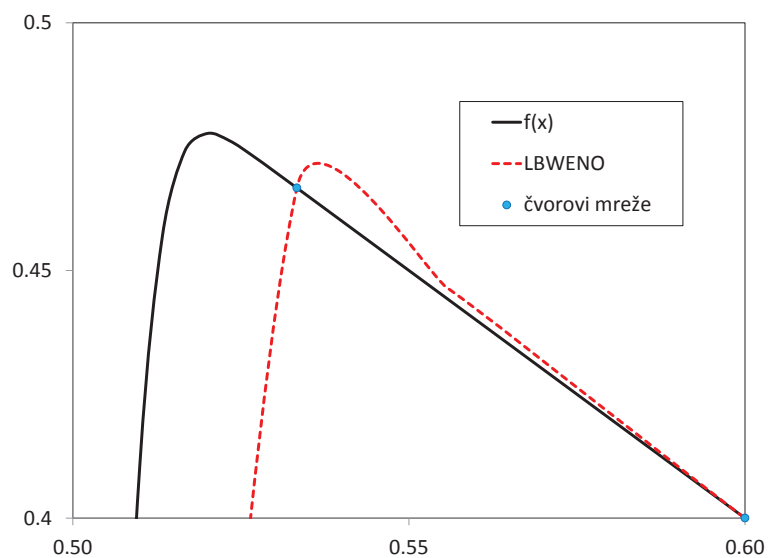
U tablici 6.11 vidi se numerički red konvergencije LBWENO interpolacijskog algoritma kod kojeg očekujemo peti red točnosti. Na ovom primjeru

Tablica 6.10: Standardna WENO interpolacija za e^x

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	3.9E-2	9.0E-3	5.1E-3	1.3E-3	1.1E-3					
10	9.7E-3	5.1E-4	1.2E-4	6.3E-6	1.1E-6	2	4.1	5.5	7.7	10
20	2.5E-3	3.E-5	2.1E-6	2.0E-8	1.4E-9	2	4.1	5.8	8.3	9.7
40	6.2E-4	1.8E-6	3.4E-8	7.3E-11	1.5E-12	2	4.1	6	8.1	9.8
80	1.6E-4	1.1E-7	5.3E-10	2.8E-13	1.5E-15	2	4	6	8	9.9

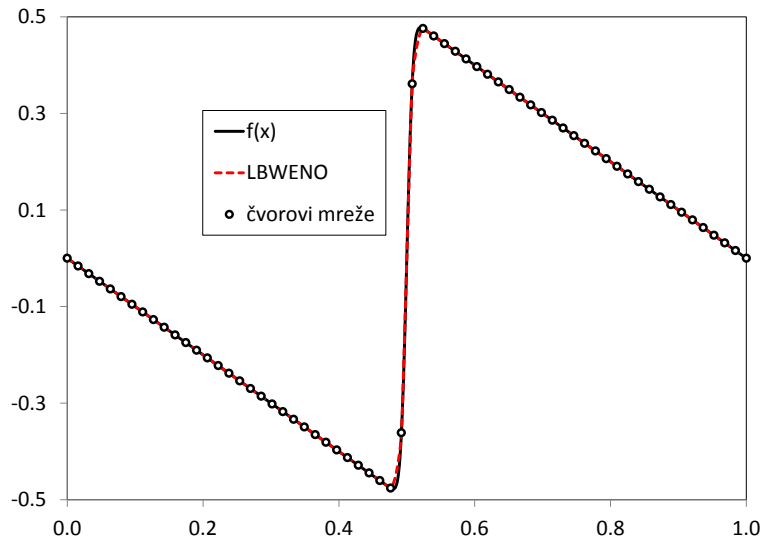


(a)

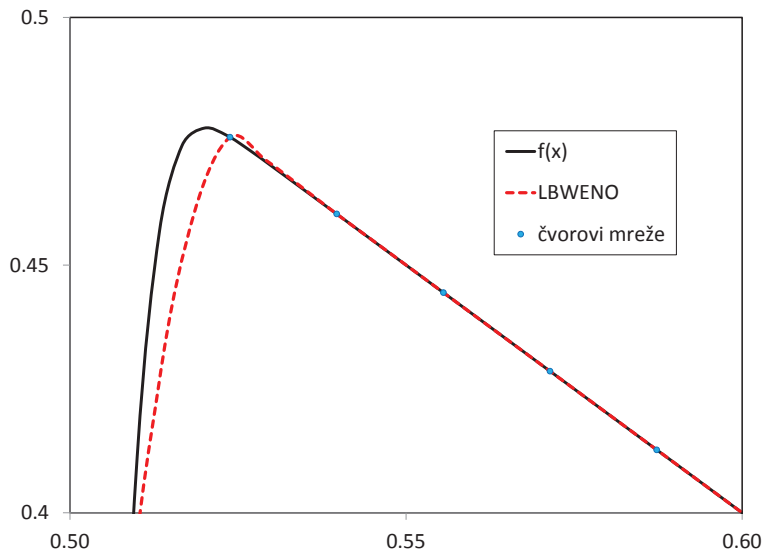


(b)

Slika 6.1: TEST 6.2.1. LBWENO interpolacija za $r = 3$ na 16 numeričkih čvorova.



(a)



(b)

Slika 6.2: TEST 6.2.1. LBWENO interpolacija za $r = 3$ na 64 numerička čvora.

Tablica 6.11: TEST 6.2.1. Numerički red točnosti LBWENO interpolacije za $r = 3$

N	L^1 pogreška	Red
16	1.0E-02	
32	2.5E-03	2.1
64	7.4E-04	1.7
128	1.4E-04	2.4
256	5.6E-06	4.7
512	1.6E-07	5.1

vidi se da red točnosti dostigne tek na gušćim mrežama. Problem s konvergencijom nastaje zbog prisutnosti ekstrema funkcije $f(x, \epsilon)$.

6.2.2 Primjeri interpolacije

U prošlom smo testu provjeravali točnost aproksimacije za različite WENO interpolacije na glatkim funkcijama. U ovom testu zanima nas ponašanje interpolacijskih algoritama na funkcijama koje sadrže diskontinuitete.

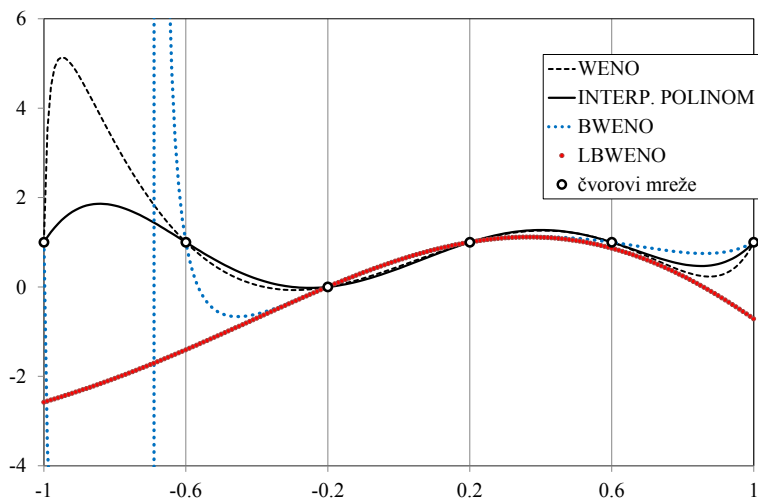
Cilj je pokazati neoscilirajuća svojstva WENO interpolacijske krivulje. Na domeni $[-1, 1]$ postavljamo niz jednako udaljenih točaka. Za odabrani r , domenu dijelimo na $2r - 1$ intervala sa $2r$ čvorova $x_i = -1 + \frac{2i}{2r-1}$, $i = 1, \dots, 2r - 1$. Promatrat ćemo aproksimaciju u središnjem intervalu $[-\frac{1}{2r-1}, \frac{1}{2r-1}]$.

BWENO i LBWENO usporedba

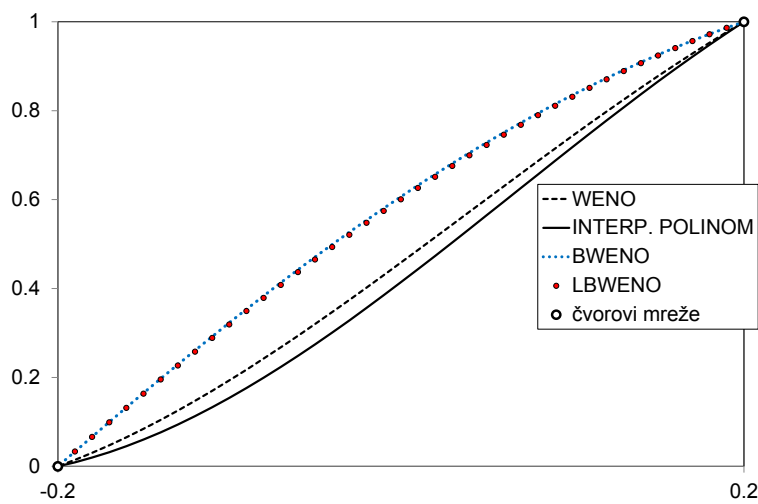
U prvom primjeru uspoređujemo WENO, BWENO i LBWENO algoritam za $r = 3$. Zadane su funkcijske vrijednosti:

$$\begin{aligned} v(x_i) &= 1, \quad i = 0, 1, 3, 4, 5 \\ v(x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Na slici 6.3 vidi se ponašanje WENO i BWENO algoritma. Iako WENO i BWENO krivulje imaju oscilacije, krivulje osciliraju izvan središnjeg intervala koji promatramo. LBWENO krivulja ne sadrži sve zadane točke već samo rubne točke središnjeg intervala $[-0.2, 0.2]$. Na slici 6.3 možemo vidjeti da je LBWENO interpolacija vrlo dobra aproksimacija BWENO interpolacije.



(a) Cijela domena



(b) Središnji interval

Slika 6.3: TEST 6.2.2. Usporedba različitih interpolacijskih algoritama za $r = 3$.

Različite WENO interpolacije za $r = 3$

U sljedećem primjeru uzmimo malo drukčije vrijednosti u čvorovima. Zadane su funkcijske vrijednosti:

$$\begin{aligned}v(x_i) &= 1, \quad i = 0, 1, 4, 5 \\v(x_i) &= 0, \quad i = 2, 3.\end{aligned}$$

Na slici 6.4, prikazano je ponašanje WENO, BWENO i LBWENO interpolacije. Valja naglasiti da na središnjem intervalu WENO i LBWENO imaju manje oscilacije od interpolacijskog polinoma.

Različite WENO interpolacije za $r = 5$

U ovom primjeru koristimo $r = 5$, što znači da na intervalu $[-1, 1]$ imamo 10 interpolacijskih čvorova. Zanima nas aproksimacija u središnjem intervalu $[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}]$. Zadane su funkcijske vrijednosti:

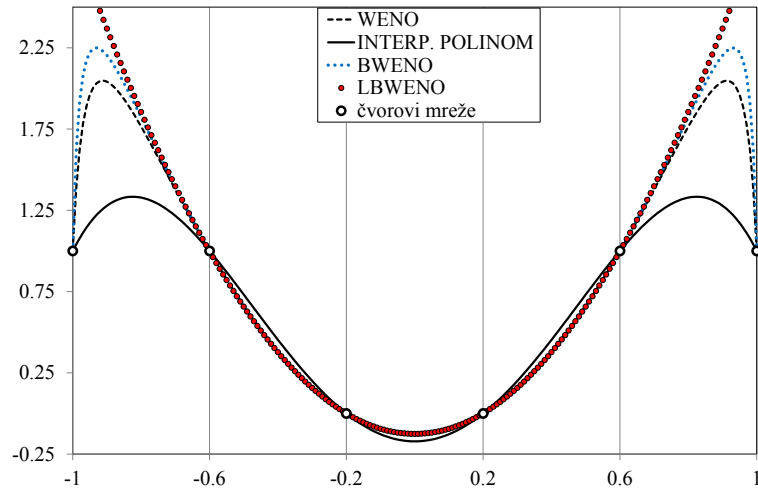
$$\begin{aligned}v(x_i) &= 1, \quad i = 0, 1, 2, 7, 8, 9 \\v(x_i) &= 0, \quad i = 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

Na slici 6.5 prikazana je interpolacija WENO i LBWENO algoritmom. Ako se koncentriramo na središnji interval, možemo primijetiti da WENO interpolacijska krivulja oscilira, iako bitno manje u odnosu na interpolacijski polinom. S druge strane LBWENO krivulja nema oscilacija, tj. krivulja je gotovo konstantna. Razlog leži u činjenici da LBWENO u konstrukciji koristi polinome niskog stupnja dok WENO koristi konveksnu kombinaciju interpolacijskih polinoma petog stupnja. Svi interpolacijski polinomi petog stupnja imaju jake oscilacije što potom rezultira oscilacijama u WENO interpolacijskoj krivulji. Na ovom primjeru možemo vidjeti prednosti novog algoritma.

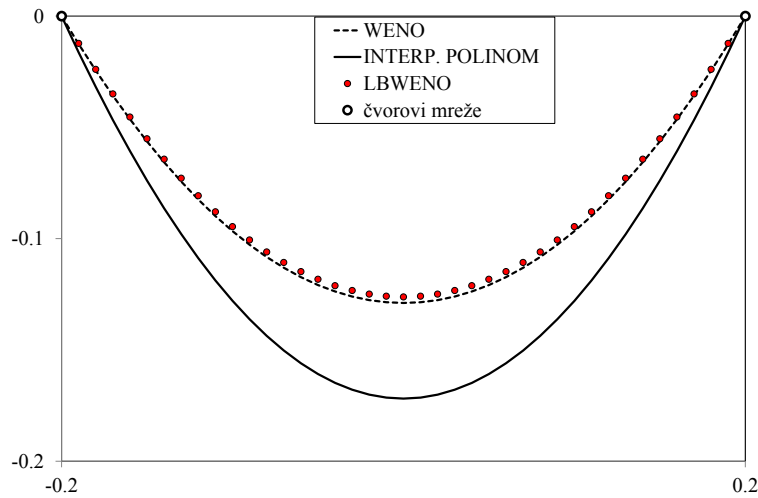
6.3 Rekonstrukcija

6.3.1 Modificirana WENO rekonstrukcija

Problem rekonstrukcije i njegovo rješenje pomoću WENO algoritma opisan je u poglavlju 4.2. Međutim, klasična WENO rekonstrukcija ima neke nedostatke. Jedan od važnih problema su diskontinuiteti koji se javljaju unutar ćelije u kojoj želimo u odabranim točkama rekonstruirati vrijednosti funkcije. Ovaj problem može se riješiti modifikacijom WENO metode koja zadržava sva poželjna svojstva WENO pristupa i povećava robusnost i stabilnost metode.

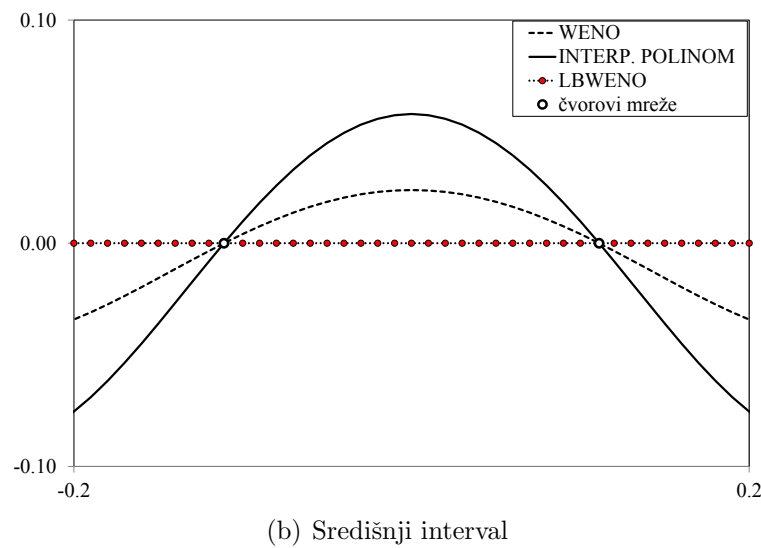
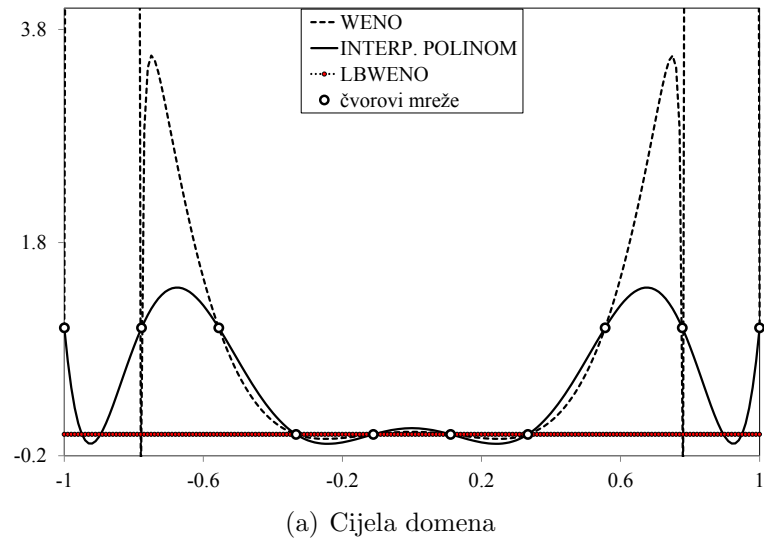


(a) Cijela domena



(b) Središnji interval

Slika 6.4: TEST 6.2.2. Usporedba WENO interpolacije za $r = 3$.

Slika 6.5: TEST 6.2.2. Usporedba WENO interpolacije za $r = 5$.

WENO rekonstrukcija je usko povezana s problemom WENO interpolacije. Da bi se riješio problem rekonstrukcije funkcije $v(x)$, može se rješavati interpolacijski problem za primitivnu funkciju $V(x)$ definiranu u (4.14).

Slijedimo isti postupak koji smo opisali za standardnu WENO rekonstrukciju tj. konstruiramo interpolacijske polinome $P^s(x)$ koji interpoliraju primitivnu funkciju $V(x)$ čije su vrijednosti poznate u rubovima ćelija. Kod standardne WENO rekonstrukcije odredili bismo polinome $p^s(x) = (P^s(x))'$, a zatim bismo napravili neoscilirajuću konveksnu kombinaciju polinoma $p^s(x)$ čime se dobije neoscilirajuća racionalna funkcija koja rješava problem rekonstrukcije. S druge strane, kod novog modificiranog algoritma koristimo neoscilirajuću konveksnu kombinaciju polinoma $P^s(x)$ čime se dobije interpolacijska racionalna neoscilirajuća funkcija $P(x)$.

Funkcija $P(x)$ je glatka na centralnom intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ i interpolira $V(x)$ u čvorovima $x_{i-r+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+r+\frac{1}{2}}$. Konačno, zbog diferencijabilnosti funkcije $P(x)$ moguće je odrediti $p(x) = P'(x)$. Racionalna funkcija $p(x)$ rješava problem rekonstrukcije za funkciju $v(x)$.

U nekim čvorovima evaluacija racionalne funkcije $p(x)$ može postati zahtjevna, ali za razliku od klasične WENO rekonstrukcije ne postoji problem polova.

6.3.2 BWENO rekonstrukcija

Rješenje problema rekonstrukcije koju smo opisali u poglavlju 6.3.1 možemo poopćiti po uzoru na predloženi BWENO algoritam interpolacije.

Najprije moramo napraviti neoscilirajuću interpolaciju za primitivnu funkciju $V(x)$ slijedeći BWENO ili LBWENO proceduru opisanu u poglavlju 6.1. Time možemo dobiti aproksimaciju $P_r(x)$ visokog reda točnosti za $V(x)$. $P_r(x)$ interpolira $V(x)$ barem u čvorovima $x_{i-\frac{1}{2}}$ i $x_{i+\frac{1}{2}}$ centralne ćelije I_i . Konačno, funkcija $p_r(x) = P_r'(x)$ zadovoljava uvjete (4.10) i (4.11).

Za rješenje problema rekonstrukcije dovoljno je osigurati diferencijabilnost funkcije $P_r(x)$ određene BWENO ili LBWENO procedurom za $x \in I_i$. Već smo pokazali u poglavlju 6.1 da je u oba slučaja $P_r(x)$ dovoljno glatka. Također, u oba slučaja možemo dobiti i visoki red točnosti. Kako bi se zadovoljila neoscilirajuća svojstva rekonstrukcijske funkcije, indikatori (6.10) se moraju računati tako da suma kreće od indeksa $j = 2$.

Ovime smo završili opis BWENO rekonstrukcije te ćemo u nastavku dati neke komentare o novopredloženom algoritmu.

Napomenimo da je racionalna BWENO interpolacija vrlo zahtjevna, tj. eksplicitne formule za evaluaciju racionalne funkcije $P_r'(x)$ postaju vrlo složene. Zbog diskontinuiteta u interpolacijskoj funkciji, određivanje viših derivacija može postati nestabilno. Ovi problemi se ne javljaju kod LBWENO procedura jer je aproksimacijska funkcija $P_r(x)$ polinom.

Kada usporedimo BWENO i LBWENO rekonstrukciju sa standardnom WENO procedurom vidljivo je da su aproksimacijske funkcije bitno različite. Razlika se pojavljuje i zbog razine na kojoj se neoscilirajuće težinske funkcije koristi. Kod WENO procedure određuju se interpolacijski polinomi i njihove se derivacije neoscilirajuće kombiniraju. U slučaju BWENO i LBWENO procedure, cijela interpolacija provodi se na primitivnoj funkciji, a zatim se rekonstrukcijska funkcija dobije kao derivacija interpolacijske funkcije.

Pozitivnost težina je vrlo bitna za stabilnost standardnog WENO algoritma, a više o tom problemu može se pronaći u [47, 52]. Zbog korištenja neoscilirajuće interpolacije ovaj problem ne pojavljuje se kod BWENO i LBWENO procedure.

6.4 Testovi i primjeri rekonstrukcije

6.4.1 Red točnosti

Ovaj je test predložen kako bi se numerički odredio red točnosti WENO algoritama za rekonstrukciju funkcije. U ovom ćemo primjeru aproksimirati glatku funkciju na domeni $[-1, 1]$. Domena je podijeljena na N intervala jednake širine. Usporedit ćemo red točnosti i konvergenciju LBWENO, LBWENO2 i modificirane WENO metode u L^∞ normi.

Da bismo odredili aproksimaciju u rubnim ćelijama, koristili smo dodatnih $r - 1$ ćelija sa svake strane domene kako bismo virtualno povećali domenu. Najprije računamo aproksimaciju na 5 numeričkih ćelija u domeni, a zatim udvostručimo broj numeričkih ćelija da bismo odredili numerički red konvergencije za različite vrijednosti parametra r .

Klasična WENO rekonstrukcija postiže red točnosti do $2r - 1$ na glatkim funkcijama [52]. Međutim i za glatke funkcije, ako u promatranom intervalu postoji ekstrem, postigne se manji red točnosti. Naime, poznato je da u slučajevima ekstrema, indikatori glatkoće gube neka poželjna svojstva koja su nužna za postizanje aproksimacije visokog reda točnosti.

Red točnosti za funkciju e^{-x^2}

Red točnosti ispitan je najprije na funkciji e^{-x^2} . U tablici 6.12 vidi se da je red točnosti niži od očekivanog reda točnosti 3.

U tablici 6.13 vidi se da je red točnosti u L^∞ normi nešto niži od formalnog reda, ali samo za parne r . Za sada nije jasno zašto se u neparnim slučajevima uspije postići puni red točnosti $2r - 1$.

Rezultati u tablici 6.14, koji se odnose na modificiranu WENO rekonstrukciju, vrlo su slični rezultatima LBWENO2 metode.

Tablica 6.12: TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. LBWENO rekonstrukcija za e^{-x^2}

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	1.7E-01	6.9E-02	2.6E-02	1.4E-02	9.5E-03	1.0	1.4	0.0	-0.9	-1.5
10	8.5E-02	2.6E-02	2.6E-02	2.6E-02	2.6E-02	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0
20	4.3E-02	6.6E-03	6.6E-03	6.6E-03	6.6E-03	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0
40	2.1E-02	1.7E-03	1.7E-03	1.7E-03	1.7E-03	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0
80	1.1E-02	4.0E-04	4.1E-04	4.2E-04	4.2E-04	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Tablica 6.13: TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. LBWENO2 rekonstrukcija za e^{-x^2}

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	1.7E-01	6.9E-02	1.0E-02	3.9E-03	2.0E-03	1.0	1.4	3.9	5.7	8.7
10	8.5E-02	2.6E-02	7.0E-04	7.7E-05	4.7E-06	1.0	2.0	4.9	6.4	8.8
20	4.3E-02	6.6E-03	2.4E-05	9.0E-07	1.1E-08	1.0	2.0	5.0	6.2	8.8
40	2.1E-02	1.7E-03	7.8E-07	1.2E-08	2.5E-11	1.0	2.0	5.0	6.2	8.8
80	1.1E-02	4.0E-04	2.5E-08	1.8E-10	5.1E-14	1.0	2.0	5.0	6.1	8.9

Tablica 6.14: TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. Modificirana WENO rekonstrukcija za e^{-x^2}

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	1.7E-01	6.9E-02	1.1E-02	3.3E-03	1.8E-03	1.0	1.4	3.9	5.3	8.5
10	8.5E-02	2.6E-02	6.9E-04	8.2E-05	5.0E-06	1.0	2.0	4.8	6.5	8.8
20	4.3E-02	6.6E-03	2.4E-05	9.3E-07	1.1E-08	1.0	2.0	5.0	6.2	8.8
40	2.1E-02	1.7E-03	7.8E-07	1.2E-08	2.5E-11	1.0	2.0	5.0	6.2	8.8
80	1.1E-02	4.2E-04	2.5E-08	1.8E-10	5.1E-14	1.0	2.0	5.0	6.1	8.9

Tablica 6.15: TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu WENO rekonstrukcija za funkciju e^x .

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	6.8E-01	8.0E-02	2.3E-03	7.7E-05	8.6E-07					
10	3.0E-01	9.3E-03	9.9E-05	6.2E-07	7.8E-09	1.2	3.1	4.5	6.9	6.8
20	1.4E-01	1.1E-03	3.2E-06	5.2E-09	1.7E-11	1.1	3.1	4.9	6.9	8.9
40	6.9E-02	1.3E-04	1.0E-07	4.1E-11	3.0E-14	1.0	3.1	5.0	7.0	9.1
80	3.4E-02	1.5E-05	3.1E-09	3.2E-13		1.0	3.0	5.0	7.0	

Tablica 6.16: TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu LBWENO rekonstrukcija za funkciju e^x .

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	6.8E-01	7.9E-02	1.5E-02	8.5E-03	5.9E-03					
10	3.0E-01	9.1E-03	1.6E-03	9.2E-04	6.4E-04	1.2	3.1	3.2	3.2	3.2
20	1.4E-01	1.0E-03	1.9E-04	1.1E-04	7.5E-05	1.1	3.1	3.1	3.1	3.1
40	6.9E-02	1.2E-04	2.3E-05	1.3E-05	9.2E-06	1.0	3.1	3.0	3.0	3.0
80	3.4E-02	1.5E-05	2.9E-06	1.6E-06	1.1E-06	1.0	3.0	3.0	3.0	3.0

Red točnosti za funkciju e^x

Red točnosti novih WENO rekonstrukcija promatramo na primjeru funkcije $v(x) = e^x$.

Numerički red točnosti prikazan je u tablicama 6.15–6.17. Kao što smo očekivali, red točnosti za modificiranu WENO i LBWENO2 numeričku metodu, približno je jednak $2r - 1$. U slučaju LBWENO metode u tablici 6.16 red točnosti ne prelazi 3. Kao i kod interpolacije, najniža razina na kojoj je upotrijebljen pozitivni eksponent $\alpha_{r,k,l}$ određuje maksimalan red točnosti koji se može postići.

6.4.2 Primjeri rekonstrukcije

Analizom algoritama za interpolacijske probleme pokazale su se neke prednosti novih algoritama u odnosu na standardni WENO algoritam. U slučaju rekonstrukcije, prednosti BWENO algoritma su jasne s obzirom da standardni algoritam stvori diskontinuitete prilikom rekonstrukcije funkcije.

Tablica 6.17: TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu LBWENO2 rekonstrukcija za funkciju e^x .

N/r	L^∞ pogreška					Red				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
5	6.8E-01	1.8E-02	5.9E-04	2.0E-05	7.3E-07					
10	3.0E-01	2.0E-03	1.6E-05	1.4E-07	1.2E-09	1.2	3.2	5.2	7.2	9.2
20	1.4E-01	2.4E-04	4.7E-07	1.0E-09	2.3E-12	1.1	3.1	5.1	7.1	9.1
40	6.9E-02	2.9E-05	1.4E-08	7.8E-12		1.0	3.0	5.0	7.0	
80	3.4E-02	3.6E-06	4.5E-10	6.0E-14		1.0	3.0	5.0	7.0	

U sljedećem testu napraviti ćemo rekonstrukciju funkcije $v(x)$ čije su prosječne vrijednosti jednake 1, osim u centralnoj ćeliji gdje je prosječna vrijednost 0. Usporedit ćemo WENO i LBWENO rekonstrukciju za slučaj $r = 3$.

Rezultati na slici 6.6 ukazuju na ozbiljan problem koji se pojavljuje kod korištenja standardne WENO metode. Vidljivo je da se diskontinuitet pojavljuje u centralnoj ćeliji u kojoj promatramo aproksimaciju. Ovi diskontinuiteti su nepoželjni kada se rekonstrukcija koristi za rješavanje hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Neke numeričke metode za zakone očuvanja zahtijevaju evaluaciju rekonstruirane funkcije na rubovima, a ponekad i u nekim unutarnjim točkama numeričke ćelije. Diskontinuiteti mogu izazvati numeričke nestabilnosti koje je teško tretirati.

Za razliku od toga, LBWENO algoritam daje stabilnu aproksimaciju koja se može koristiti u proizvoljnoj točki centralne ćelije. LBWENO i BWENO rekonstrukcije su znatno robusnije i sigurnije od standardne WENO metode.

Negativne težine WENO rekonstrukcije su glavni izvor nestabilnosti u centralnoj ćeliji. U [55] opisano je elegantno rješenje, odnosno modifikacija standardnog WENO algoritma. Spomenuta modifikacija smanjuje nestabilnosti i rješava problem negativnih težina. Ova modifikacija nažalost ne rješava sve probleme. Dobivena funkcija nije glatka i ne može se koristiti za aproksimaciju derivacija. Iako je točnost WENO metode očuvana na glatkim dijelovima domene, nestabilnosti su i dalje moguće u blizini diskontinuiteta.

U sljedećem testu odabran je $r = 4$ za WENO rekonstrukciju. Na intervalu $[-1, 1]$ zadajemo sedam jednako širokih numeričkih ćelija. Zadane su prosječne vrijednosti u ćelijama:

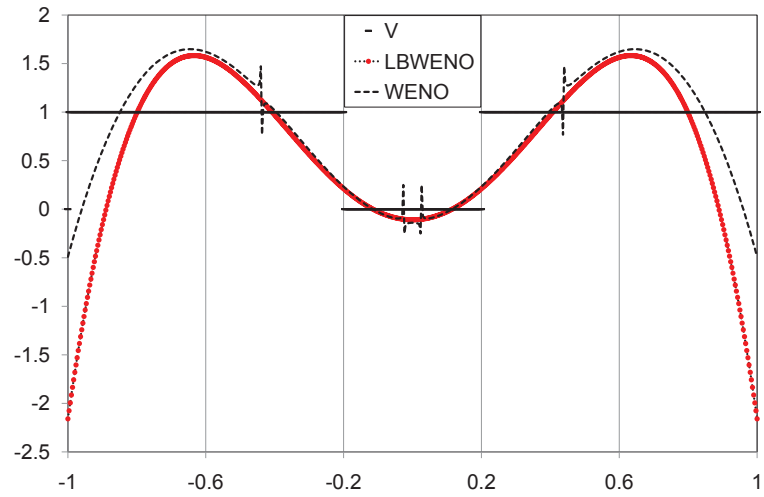
$$\begin{aligned}\bar{v}_i &= 1, \quad i = 0, 1, 2, 6 \\ \bar{v}_i &= 0, \quad i = 3, 4, 5.\end{aligned}$$

Rezultati prikazani na slici 6.7 prikazuju rekonstrukciju u centralnoj ćeliji. Rezultati označeni s WENO NW dobiveni su modifikacijom WENO algoritma za tretiranje negativnih težina kao u [55]. Oznaka MWENO koristi se za modificiranu WENO rekonstrukciju opisanu u poglavlju 6.3.1. Na ovoj se slici jasno vidi da LBWENO i MWENO nemaju nestabilnosti koje se pojavljuju u slučaju WENO i WENO NW krivulja.

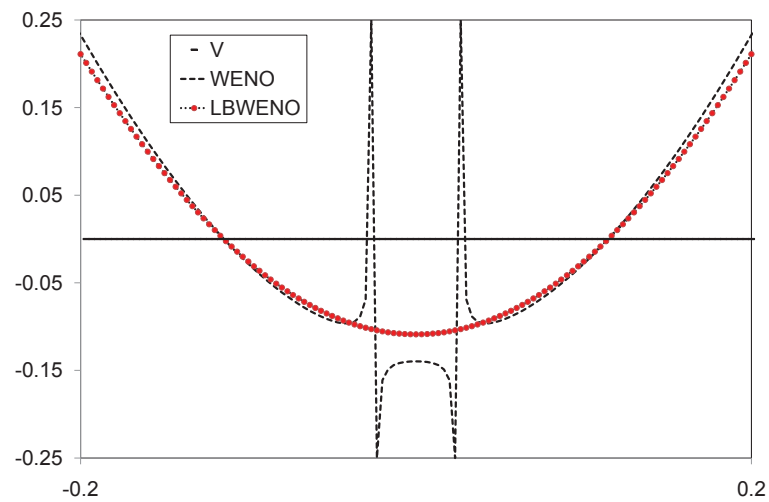
6.4.3 Shuov test za linearnu advekciju

U ovom ćemo testu koristiti novu WENO rekonstrukciju kao dio WENO numeričke sheme za hiperboličke zakone očuvanja.

U radu [38] predložen je numerički test za model linearne advekcije (2.5). Iako se radi o vrlo jednostavnom skalarnom modelu, ovaj test vrlo se često koristi kako bi se usporedilo ponašanje metoda visokog reda točnosti. Metode niskog reda točnosti unose velike količine numeričke difuzije, a metode

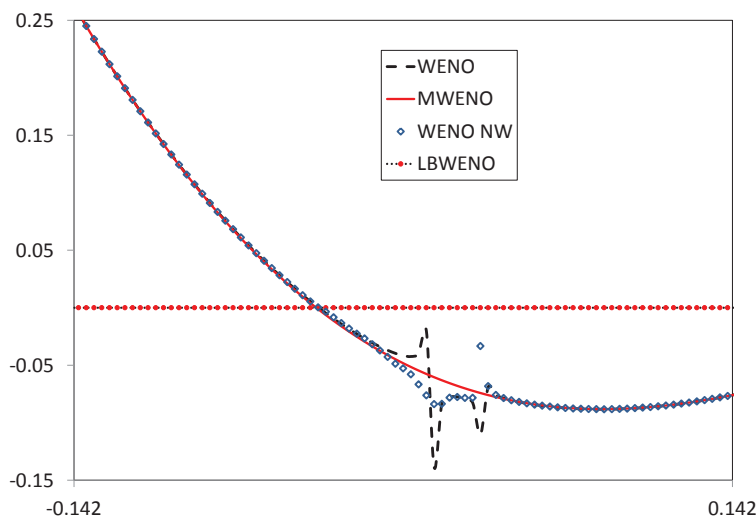


(a) Cijela domena



(b) Centralna ćelija

Slika 6.6: TEST 6.4.2. Usporedba klasične i nove rekonstrukcije za $r = 3$



Slika 6.7: TEST 6.4.2. Usporedba različitih rekonstrukcijskih algoritama za $r = 4$.

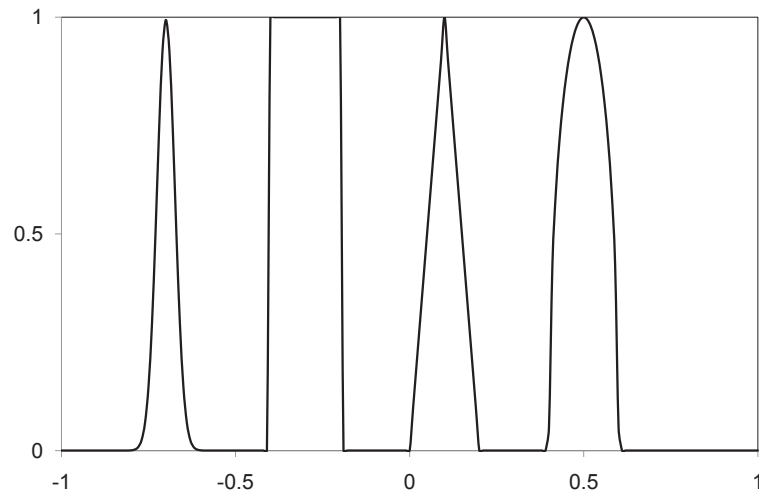
visokog reda točnosti mogu proizvesti oscilacije. Zadan je početni uvjet

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6} [G(x, z - \delta) + 4G(x, z) + G(x, z + \delta)], & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1, & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - |10(x - 0.1)|, & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6} [F(x, a - \delta) + 4F(x, a) + F(x, a + \delta)], & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

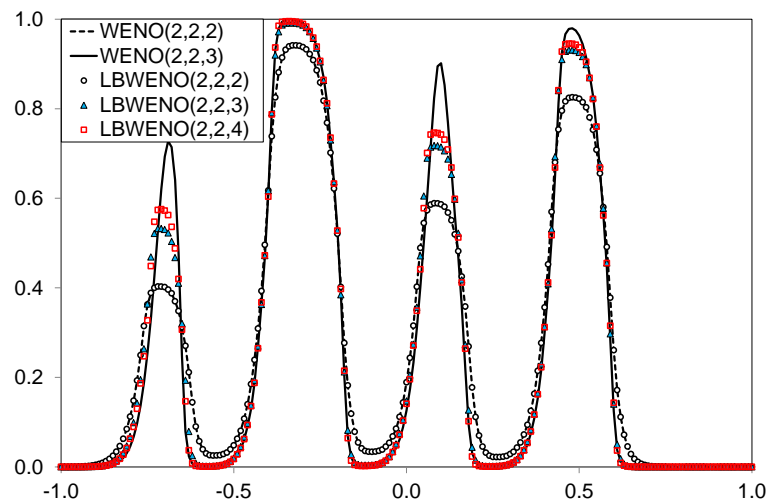
gdje je $G(x, z) = e^{-\beta(x-z)^2}$, $F(x, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)}$ i konstante su $a = 0.5$, $z = -0.7$, $\delta = 0.005$, $\alpha = 10$ i $\beta = \frac{\log 2}{36\delta^2}$. Početni uvjet na domeni $[-1, 1]$ prikazan je na slici 6.8. Numerički rezultati dobiveni su metodama konačnih volumena za klasični WENO algoritam i novi BWENO algoritam. Uspoređujemo rezultate eksplicitne WENO(s, k, r) metode. WENO(s, k, r) bi trebala biti reda točnosti k u vremenu i najviše $2r - 1$ u prostoru.

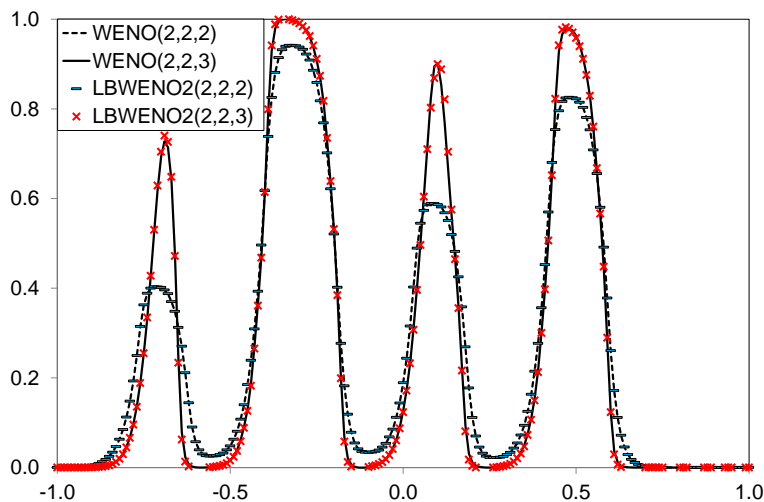
Rješenje ćemo računati do trenutka $t = 2s$ na $N = 200$ numeričkih čvorova za CFL = 0.6. Nakon $t = 2s$ analitičko rješenje je poznato i poklapa se s početnim uvjetom.

Na slikama 6.9 i 6.10 prikazana je usporedba rezultata WENO i LBWENO metoda za istu SSPERK integraciju, ali različitu prostornu rekonstrukciju. Na slikama je vidljiva numerička disipacija koja je prisutna u rješenju. LBWENO2 metoda daje gotovo identične rezultate kao i klasična WENO metoda što smo i očekivali. LBWENO($2, 2, r$) metode daju rezultate koji se po količini numeričke disipacije nalaze između WENO($2, 2, 2$) i WENO($2, 2, 3$) metode.



Slika 6.8: TEST 6.4.3. Početni uvjet za model linearne advekcije.

Slika 6.9: TEST 6.4.3. Usporedba WENO i LBWENO metoda za različite prostorne rekonstrukcije u trenutku $t = 2$ s.



Slika 6.10: TEST 6.4.3. Usporedba WENO i LBWENO2 metoda za različite prostorne rekonstrukcije u trenutku $t = 2$ s.

Tablica 6.18: TEST 6.4.4. L^1 pogreške i red točnosti za $u(x, 0) = \sin(\pi x)$.

N	LBWENO	Red	LBWENO2	Red	WENO	Red
10	1.3E-2		1.2E-3		1.8E-3	
20	1.8E-3	2.8	4.1E-5	4.9	4.8E-5	5.3
40	6.1E-4	1.5	1.2E-6	5.2	1.3E-6	5.2
80	1.5E-4	2.0	3.8E-8	4.9	3.7E-8	5.1
160	3.4E-5	2.1	1.1E-9	5.1	1.2E-9	5.0

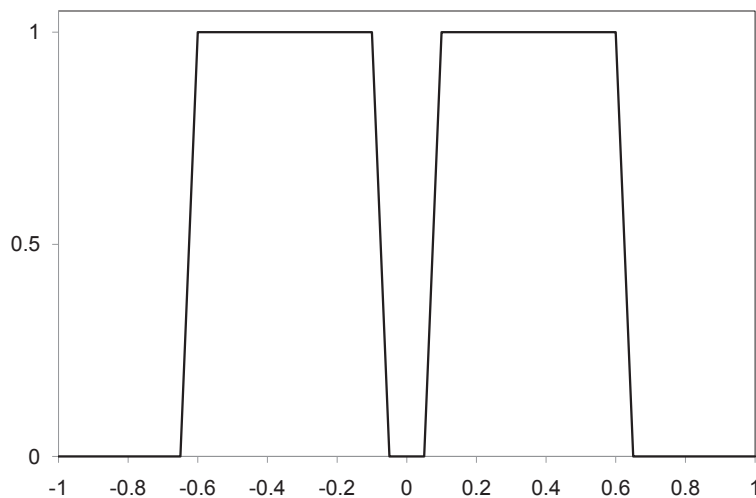
6.4.4 Red točnosti za linearnu advekciju

Kako bismo odredili numerički red točnosti metode konačnih volumena s novom LBWENO rekonstrukcijom, postavljena su dva testa za model linearne advekcije (2.5). U prvom testu zadan je početni uvjet $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, a u drugom testu početni uvjet je $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$. Drugi test je znatno zahtjevniji za testiranje reda točnosti WENO metode zbog višestruke nultočke prve derivacije. U oba slučaja domena je $[-1, 1]$ sa nametnutim periodičkim rubnim uvjetima. Rješenja su uspoređena u trenutku $t = 0.05$ s, pri čemu je vremenski korak određen tako da pogreška vremenske integracije bude usklađena s pogreškom prostorne diskretizacije.

Rezultati za LBWENO, LBWENO2 i standardnu WENO rekonstrukciju prikazani su u tablicama 6.18 i 6.19. WENO i LBWENO2 rekonstrukcija imaju smanjeni red točnosti u točkama ekstrema što je vidljivo u tablici 6.19 dok je isti efekt vidljiv u obje tablice za LBWENO rekonstrukciju. Očekivani peti red točnosti postiže se za LBWENO2 i WENO algoritam u tablici 6.19.

Tablica 6.19: TEST 6.4.4. L^1 pogreške i red točnosti za $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$.

N	LBWENO	Red	LBWENO2	Red	WENO	Red
10	4.8E-2		3.0E-2		3.2E-2	
20	6.8E-3	2.8	4.0E-3	2.9	4.2E-3	2.9
40	2.6E-3	1.4	4.9E-4	3.0	6.0E-4	2.8
80	6.3E-4	2.1	3.3E-5	3.9	4.2E-5	3.8
160	1.4E-4	2.2	1.4E-6	4.6	2.6E-6	4.0



Slika 6.11: TEST 6.4.5. Početni uvjet za Burgersov problem.

6.4.5 Interakcija šokova za Burgersovu jedandžbu

U ovom testu koristimo Burgersovu jednadžbu (2.10) s početnim uvjetom

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{ako } |x \mp 0.35| \leq 0.25 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Na numeričkoj domeni $[-1, 1]$ zadan je početni uvjet kao na slici 6.11. Na rubovima domene zadani su periodički rubni uvjeti.

Ovaj test koristimo da bismo provjerili stabilnost i TVD svojstva WENO rekonstrukcije na interakciji šokova. Rezultati su prikazani do trenutka $t = 0.5$ s na mreži $\Delta x = 0.05$ i $\text{CFL} = 0.9$.

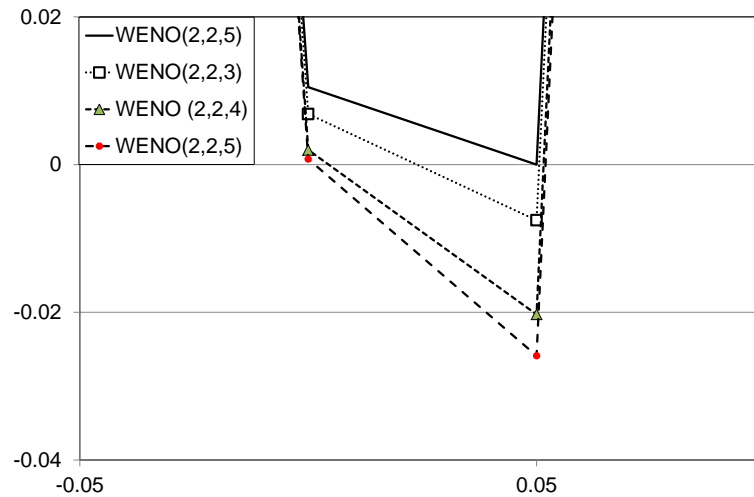
Na slikama 6.12(a) i 6.12(b) prikazan je rezultat nakon prvog koraka numeričke metode. Klasična WENO metoda daje nefizikalno rješenje. Rješenje u jednom čvoru je negativno zbog oscilirajućih polinoma visokog reda koji se pojavljuju u WENO algoritmu rekonstrukcije. Razlog tomu je što klasična WENO metoda ne može pronaći neoscilirajući polinom za neoscilirajuću prostornu rekonstrukciju između dva šoka koja se nalaze preblizu. Ovo ponašanje je posljedica prostorne rekonstrukcije i ne ovisi o odabranom CFL

broju. S druge strane sve LBWENO metode daju razumna fizikalna rješenja.

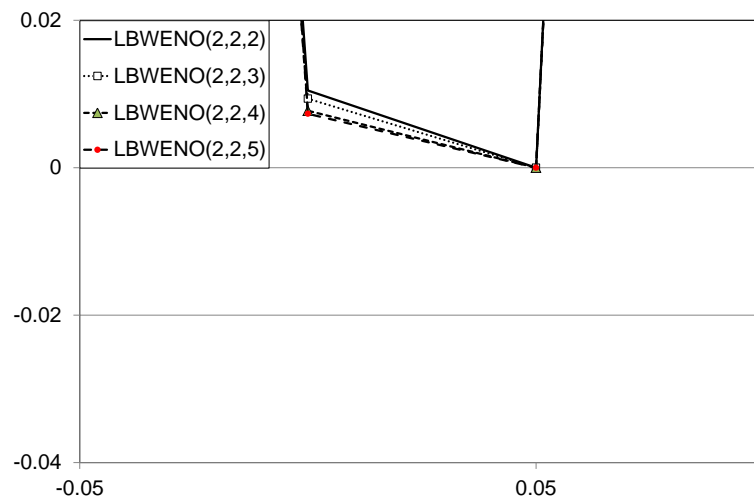
Slika 6.13 prikazuje usporedbu WENO, LBWENO i LBWENO2 metoda u blizini fronte šoka. LBWENO2 i WENO daju gotovo identične rezultate. Za odabrani CFL, WENO metoda ima tipične znakove nestabilnosti pa možemo zaključiti da TVD svojstvo više nije očuvano, što znači da bi se u ovom slučaju trebalo smanjiti CFL.

Jedan od ciljeva uvođenja LBWENO metode bilo je poboljšanje rezolucije fronte šoka i smirivanje oscilacija. Slika 6.14 pokazuje dobro ponašanje svih LBWENO $(2, 2, r)$ metoda u odnosu na klasičnu WENO $(2, 2, 4)$. Znakove oscilacija ne pokazuje ni LBWENO $(2, 2, 5)$ metoda koja koristi polinome do desetog stupnja.

Na slikama 6.15 i 6.16, prikazana je totalna varijacija WENO, LBWENO i LBWENO2 metoda. LBWENO metode imaju dobra TVD svojstva i konzistentno ponašanje dok se LBWENO2 ponaša slično kao klasična WENO metoda.

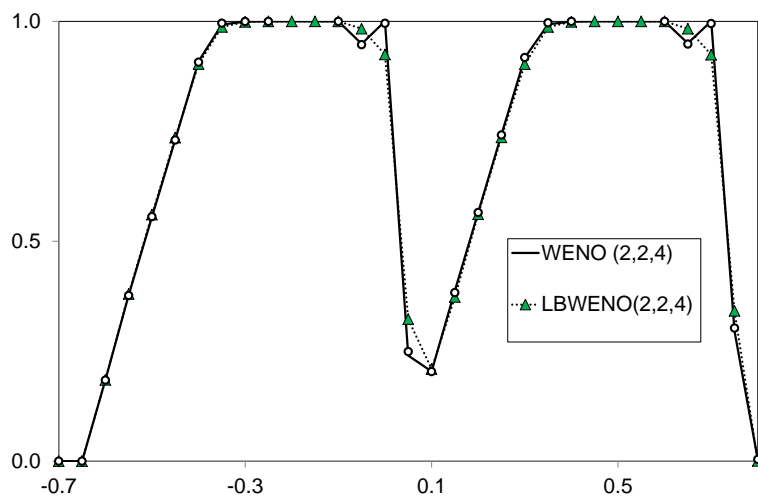


(a) WENO scheme

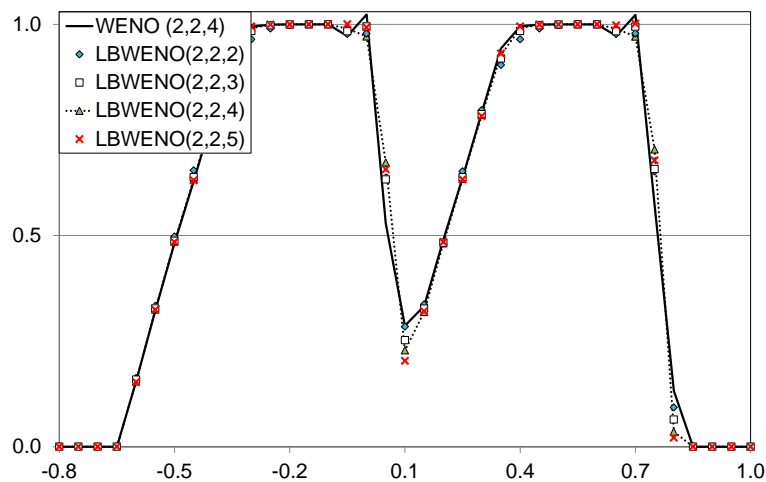


(b) LBWENO scheme

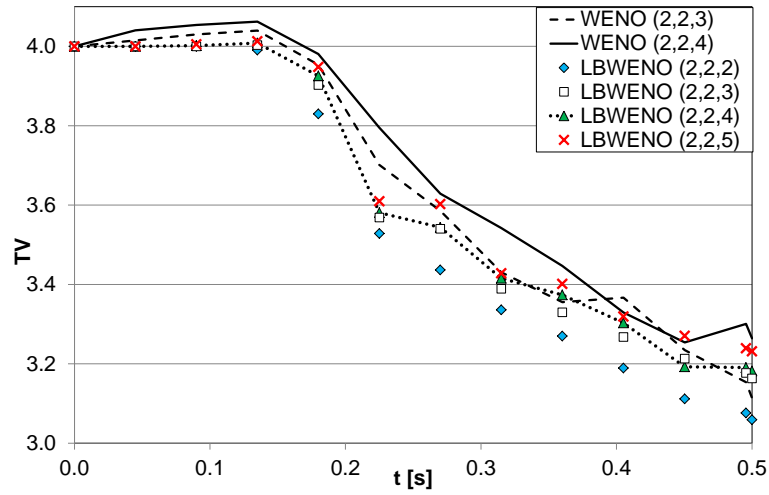
Slika 6.12: TEST 6.4.5. Središnji dio domene u trenutku $t = 0.045$ s.



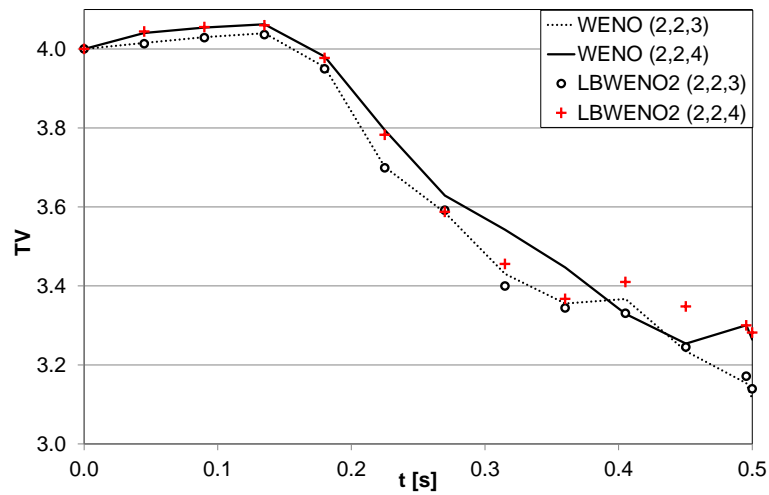
Slika 6.13: TEST 6.4.5. Usporedba WENO, LBWENO i LBWENO2 metoda za $t = 0.225$ s.



Slika 6.14: TEST 6.4.5. Uspredba WENO i LBWENO metoda u trenutku $t = 0.27$ s.



Slika 6.15: TEST 6.4.5. TV WENO i LBWENO metode za Burgersov test.



Slika 6.16: TEST 6.4.5. TV WENO i LBWENO2 metode za Burgersov test.

LITERATURA

- [1] F. Alcrudo, P. Garcia-Navarro, A. Priestley: An implicit method for water flow modelling in channels and pipes, *J. Hydr. Res.*, 32 (1994) 721–742
- [2] A. Bermúdez, M. E. Vázquez: Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms, *Comput. Fluids*, 23 (1994) 955–970
- [3] A. Bermúdez, A. Dervieux, A. Desideri, M. E. Vázquez: Upwind Schemes for the Two-Dimensional Shallow Water Equations with Variable Depth Using Unstructured Meshes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 (1998) 49–72
- [4] F. Bouchut: Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources, *Frontiers in Mathematics*, Birkhauser-Verlag, (2004)
- [5] R. Borgesa, M. Carmona, B. Costa, W. S. Don: An improved WENO scheme for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 227 (2008) 3191–3211
- [6] A. Bressan: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Oxford University Press, New York, (2000)
- [7] S. Bryson, D. Levy: High-order central WENO schemes for multi-dimensional Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 (2003) 1339–1369
- [8] J. Burguette, P. Garcia-Navarro: Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms: application to shallow water flows, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 37 (2001) 209–248
- [9] J. Burguette, P. Garcia-Navarro: Implicit schemes with large time step for non-linear equations: application to river flow hydraulics, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 46 (2004) 607–636

- [10] E. Carlini, R. Ferretti, G. Russo: A weighted essentially nonoscillatory, large time step scheme for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. of Sci. Comput.*, 27 (2005) 1071–1091
- [11] B. Crnković, N. Črnjarić-Žic: Binary weighted essentially nonoscillatory (BWENO) approximation, *Journal of computational and applied mathematics*, 236 (2012) 2431–2451
- [12] B. Crnković, N. Črnjarić-Žic, L. Kranjčević: Improvements of semi-implicit schemes for hyperbolic balance laws applied on open channel flow equations, *Comp. Math. with Appl.*, 58 (2009) 292–309
- [13] N. Črnjarić-Žic, B. Crnković: High order accurate semi-implicit WENO schemes for hyperbolic balance laws. *Applied Mathematics and Computation*, 217(21) (2011) 8611–8629
- [14] N. Črnjarić-Žic, B. Crnković, S. Maćešić: A numerical study of SSP time integration methods for hyperbolic conservation laws, *Mathematical communications.*, 15 (2010), 2, 613–633
- [15] N. Črnjarić-Žic, S. Maćešić, B. Crnković: Efficient implementation of WENO schemes to nonuniform meshes. *Annali dell'Università di Ferrara.*, 53 (2007) 199–215
- [16] N. Črnjarić-Žic, S. Vuković, L. Sopta: Balanced finite volume WENO and central WENO schemes for the shallow water and the open channel flow equations, *J. Comput. Phys.*, 200 (2004) 512–548
- [17] N. Črnjarić-Žic: Weno sheme za zakone ravnoteže, doktorska disertacija, Zagreb (2004)
- [18] G. Dal Maso, P. G. LeFloch, F. Murat: Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pures Appl.* 74 (1995) 483–548
- [19] L. Ferracina, M. N. Spijker: Strong stability of singly diagonally implicit Runge–Kutta methods, *Appl. Num. Math.*, 58 (2008) 1675–1686
- [20] P. García-Navarro, M. E. Vázquez-Cendon: On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations, *Comput. Fluids*, 29 (2000) 951–979
- [21] G. A. Gerolymos, D. Senechal, I. Vallet: Very-high-order WENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 228 (2009) 8481–8524
- [22] P. Goatin, P. G. LeFloch: The Riemann problem for a class of resonant nonlinear systems of balance laws, *Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non-linéaire*, 21 (2004) 881–902

- [23] E. Godlewski, P. -A. Raviart: Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Springer-Verlag New York, (1996)
- [24] E. Godlewski, P. -A. Raviart: Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, (1991)
- [25] S. K. Godunov: A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics, Mat. Sb., 47 (1959) 271–306
- [26] S. Gottlieb, C. -W. Shu, E. Tadmor: Strong stability-preserving high-order time discretization methods, SIAM Review, 43 (2001) 89–112
- [27] S. Gottlieb, C. -W. Shu: Total variation diminishing Runge–Kutta schemes, Math. Comp., 67 (1998) 73–85
- [28] S. Gottlieb, D. I. Ketcheson, C. W. Shu: High order strong stability preserving time discretizations, J. of Sci. Comp., 38 (2009) 251–289
- [29] S. Gottlieb, J. S. Mullen, S. J. Ruuth: A fifth order flux implicit WENO method, J. of Sci. Comp., 27 (2006) 271–287
- [30] J. M. Greenberg, A. Y. LeRoux: A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation, SIAM J. Numer. Anal., 33(1) (1996) 1–16
- [31] P. Goutal, F. Maurel: Proceedings of the 2nd Workshop on Dam–Break Wave Simulation, Technical Report HE-43/97/016A, Electricité de France, Département Laboratoire National d’Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale, 1997.
- [32] A. Harten: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 49 (1983) 357–393
- [33] A. Harten: On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984) 1–23
- [34] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy: Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III, J. Comput. Phys., 71 (1987) 231–303
- [35] A. Harten, S. Osher, B. Engquist, S. Chakravarthy: Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, Appl. Numer. Math., 2 (1986) 347–377

- [36] A. K. Henrick, T. A. Aslam, J. M. Powers: Mapped WENO schemes: achieving optimal order near critical points, *J. Comput. Phys.*, 207 (2005) 542–567
- [37] M. E. Hubbard, P. García-Navarro: Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradient, *J. Comput. Phys.*, 165 (2000) 89–125
- [38] G. –S. Jiang, C. –W. Shu: Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 126 (1996) 202–228
- [39] K. T. Joseph, P. G. LeFloch: Singular limits for the Riemann problem. General diffusion, relaxation, and boundary conditions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344 (2007) 59–64
- [40] D. I. Ketcheson, C. B. Macdonald, S. Gottlieb: Optimal implicit strong stability preserving Runge–Kutta methods, *Applied Num. Math.*, 59 (2009) 373–392
- [41] J. F. B. M. Kraaijevanger: Contractivity of Runge–Kutta methods, *BIT*, 31 (1991) 482–528
- [42] R. J. LeVeque: Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm, *J. Comput. Phys.*, 146 (1998) 346–365
- [43] R. J. LeVeque: *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge University Press (2002).
- [44] P. G. LeFloch, M. D. Thanh: The Riemann problem for the shallow water equations with discontinuous topography, *Comm. Math. Sci.*, 5 (2007) 865–885
- [45] P. G. LeFloch, M. D. Thanh: The Riemann problem for fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section. *Comm. Math. Sci.*, 1(4) (2003) 763–797
- [46] X. –D. Liu, S. Osher, T. Chan: Weighted essentially non-oscillatory schemes, *J. Comput. Phys.*, 115 (1994) 200–212
- [47] Y. Liu, C. –W. Shu, M. Zhang: On the positivity of linear weights in WENO approximations, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica.*, 25 (2009) 503–538
- [48] I. MacDonald: *Analysis and Computation of Steady Open Channel Flow*, Ph. D. thesis, University of Reading, Department of Mathematics (1996)

- [49] S. Noelle, N. Pankratz, G. Puppo, J. R. Natvig: Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows, *J. Comput. Phys.*, 213 (2006) 474–499
- [50] J. Qiu, C. -W. Shu: On the construction, comparison, and local characteristic decomposition for high order central WENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 183 (2002) 187–209
- [51] P. Roe: Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 43 (1981) 357–372
- [52] C. -W. Shu: High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems, *SIAM Review*, 51 (2009) 82–126
- [53] C. -W. Shu: Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, edited by B. Cockburn, C. Johnson, C. -W. Shu, E. Tadmor, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1697(1998) 325–432
- [54] C. -W. Shu, S. Osher: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II, *J. Comput. Phys.*, 83 (1989) 32–78
- [55] J. Shi, C. Hu, C. -W. Shu: A Technique of Treating Negative Weights in WENO Schemes, *J. Comput. Phys.*, 175 (2002) 108–127
- [56] R. J. Spiteri, S. J. Ruuth: A new class of optimal high order strong stability preserving time discretization method, *SIAM J. on Num. Anal.*, 40 (2002) 469–491
- [57] E. F. Toro: *Riemann solvers and numerical methods in fluid dynamics*, Springer (1999).
- [58] Y. Xing, C. -W. Shu: High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms, *J. Comput. Phys.*, 214 (2006) 567–598
- [59] Y. Xing, C. -W. Shu: High order well-balanced finite difference WENO schemes for a class of hyperbolic systems with source terms, *J. Sci. Comput.*, 27 (2006) 477–494
- [60] H. C. Yee: Linearised Form of Implicit TVD Schemes for the Multidimensional Euler and Navier-Stokes Equations, *Comput. Math. Appl.*, 12 (1986) 413–432

- [61] H. C. Yee: Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications, *J. Comput. Phys.*, 68 (1987) 151–179
- [62] H. C. Yee, R. F. Warming, A. Harten: Implicit Total Variation Diminishing Schemes (TVD) for Steady State Calculations, *J. Comput. Phys.*, 57(3) (1985) 327–360
- [63] S. Vuković and L. Sopta: Upwind schemes with exact conservation property for one-dimensional open channel flow equations, *SIAM J. Sci. Comp.*, 24(5) (2003) 1630–1649
- [64] S. Vuković, L. Sopta: ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations, *J. Comput. Phys.*, 179 (2002) 593–621
- [65] S. Vuković, N. Črnjarić-Žic, L. Sopta: WENO schemes for balance laws with spatially varying flux, *J. Comput. Phys.*, 199 (2004) 87–109
- [66] Y. -T. Zhang, C. -W. Shu: High-order WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes, *SIAM J. Sci. Comput.*, 24 (2003) 1005–1030
- [67] Y. -T. Zhang, C. -W. Shu: Third order WENO scheme on three dimensional tetrahedral meshes, *Commun. Comput. Phys.*, 5 (2009) 836–848

POPIS TABLICA

5.1	Matrica pridružena modificiranom profilu	60
5.2	TEST 5.4.2 - \mathbf{L}^1 pogreške za fluks limitirane metode s modificiranim limiterom (5.5) i nemodificiranim limiterom (4.9). . .	67
5.3	TEST 5.4.2 - \mathbf{L}^1 pogreške implicitnih i eksplicitnih metoda na cijeloj domeni i restrikciji domene.	69
5.4	Test 5.4.4 - potkritični tok. \mathbf{L}^∞ pogreške u protoku za različite numeričke metode.	75
5.5	TEST 5.4.7 Dno kanala	83
5.6	TEST 5.4.7 Plimni val –Proračunsko vrijeme i relativno ubrzanje za simulacije do trenutka $t = 10800$ s.	84
5.7	TEST 5.4.8 – Relativno ubrzanje za implicitne metode u odnosu na Roevu eksplicitnu metodu.	87
5.8	TEST 5.4.8 – Pogreška u dubini vode za implicitne Roeve metode.	88
5.9	TEST 5.4.8 – Pogreška u protoku za implicitne Roeve metode.	88
5.10	TEST 5.4.9 – Numerički red točnosti za različite semiimplicitne WENO metode.	89
6.1	Konstrukcija BWENO interpolacijske funkcije na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ za $r = 4$	100
6.2	Eksponenti $\alpha_{r,k,l}$ za LBWENO interpolaciju za $r = 4$	103
6.3	Eksponenti $\alpha_{r,k,l}$ za LBWENO2 interpolaciju za $r = 4$	104
6.4	LBWENO interpolacija za funkciju e^{-x^2}	104
6.5	LBWENO2 interpolacija za funkciju e^{-x^2}	105
6.6	LBWENO interpolacija za funkciju $\sin^4(\pi x/2)$	105
6.7	LBWENO2 interpolacija za funkciju $\sin^4(\pi x/2)$	105
6.8	LBWENO interpolacija za funkciju e^x	106
6.9	LBWENO2 interpolacija za e^x	106
6.10	Standardna WENO interpolacija za e^x	106
6.11	TEST 6.2.1. Numerički red točnosti LBWENO interpolacije za $r = 3$	109
6.12	TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. LBWENO rekonstrukcija za e^{-x^2}	116

6.13	TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. LBWENO2 rekonstrukcija za e^{-x^2}	116
6.14	TEST 6.4.1. pogreške i redovi točnosti. Modificirana WENO rekonstrukcija za e^{-x^2}	116
6.15	TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu WENO rekonstrukcija za funkciju e^x	117
6.16	TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu LBWENO rekonstrukcija za funkciju e^x	117
6.17	TEST 6.4.1. Red točnosti za modificiranu LBWENO2 rekonstrukcija za funkciju e^x	117
6.18	TEST 6.4.4. L^1 pogreške i red točnosti za $u(x, 0) = \sin(\pi x)$	122
6.19	TEST 6.4.4. L^1 pogreške i red točnosti za $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$	123

POPIS SLIKA

2.1	Glatki početni uvjet i rješenje (isprekidana crta) u trenutku t_1 .	5
2.2	Rješenje za linearnu advekciju s početnim uvjetom koji nije gladak	9
2.3	Evolucija rješenja za Burgersovu jednadžbu	10
2.4	Evolucija rješenja za Burgersovu jednadžbu do stvaranja šoka.	10
2.5	Početni uvjet s karakteristikama	13
2.6	Rješenje koje sadrži šok do trenutka $t = 1$	13
2.7	Rješenje koje sadrži val razrjeđenja do trenutka $t = 1$	14
2.8	Entropijsko rješenje za Burgersovu jednadžbu.	17
3.1	Područja stroge hiperboličnosti u (h, v) poluravnini	34
4.1	Godunovljeva metoda	39
5.1	Poprečni profil kanala.	60
5.2	Pojednostavljenje poprečnog profila	61
5.3	TEST 5.4.1 – Usporedba dubine vode eksplicitne, implicitne i semiimplicitne metode u trenutku $t = 0.1$ s.	65
5.4	TEST 5.4.2 – Početni uvjet i egzaktno rješenje u trenutku $t = 3$ s.	66
5.5	TEST 5.4.2 – Usporedba rezultata dobivenih eksplicitnim i implicitnim metodama s analitičkim rješenjem.	67
5.6	TEST 5.4.2 – Usporedba fluks limitiranih implicitnih metoda za različite limitere.	68
5.7	TEST 5.4.2 – Usporedba implicitne, semiimplicitne i lokalno semiimplicitne Roeve metode.	68
5.8	TEST 5.4.2 – Usporedba eksplicitnih i implicitnih metoda na najmanjem skoku.	69
5.9	TEST 5.4.2 – Usporedba rezultata za eksplicitne i semiimplicitne WENO metode u trenutku $t = 3$ s.	71
5.10	TEST 5.4.3 – Usporedba semiimplicitne i eksplicitne WENO metode, $\epsilon = 0.001$	73

5.11	TEST 5.4.3 – Usporedba semiimplicitne i eksplicitne WENO metode, $\epsilon = 0.0001$	74
5.12	TEST 5.4.4 Geometrija kanala	75
5.13	TEST 5.4.4, potkritični tok – Konvergencija za eksplicitnu, semiimplicitnu WENO metodu i lokalno semiimplicitnu Roevu metodu.	76
5.14	TEST 5.4.4, potkritični tok – Oscilacije u protoku.	77
5.15	TEST 5.4.4, transkritični tok – Numerički rezultati za semiimplicitnu i eksplicitnu WENO metodu.	79
5.16	TEST 5.4.5 –Usporedba analitičkog rješenja i rezultata balansirane semiimplicitne metode za razinu vode.	80
5.17	TEST 5.4.6 – Egzaktno, približno rješenje i početni uvjet za stacionarni problem.	81
5.18	TEST 5.4.6 – Konvergencija prema stacionarnom rješenju za različite CFL brojeve.	82
5.19	TEST 5.4.7 -Lijeva i desna obala kanala.	83
5.20	TEST 5.4.7 – Razina vode za balansiranu i nebalansiranu semiimplicitnu metodu.	84
5.21	TEST 5.4.7 Plimni val–Protok za balansiranu shemu za različite CFL brojeve	85
5.22	TEST 5.4.8 – Dva poprečna profila na rijeci Kupi.	86
5.23	TEST 5.4.8 – Razina vode nakon 5 h propagacije.	86
5.24	TEST 5.4.8 – Protok nakon 5h propagacije poplavnog vala.	87
5.25	TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO (2,2,3) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.	90
5.26	TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO(5,3,4) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.	91
5.27	TEST 5.4.10 – Usporedba rezultata SDIRK WENO (7,4,5) metodom. Gustoća u trenutku $t = 1.8$ s.	91
6.1	TEST 6.2.1. LBWENO interpolacija za $r = 3$ na 16 numeričkih čvorova.	107
6.2	TEST 6.2.1. LBWENO interpolacija za $r = 3$ na 64 numerička čvora.	108
6.3	TEST 6.2.2. Usporedba različitih interpolacijskih algoritama za $r = 3$	110
6.4	TEST 6.2.2. Usporedba WENO interpolacije za $r = 3$	112
6.5	TEST 6.2.2. Usporedba WENO interpolacije za $r = 5$	113
6.6	TEST 6.4.2. Usporedba klasične i nove rekonstrukcije za $r = 3$	119
6.7	TEST 6.4.2. Usporedba različitih rekonstrukcijskih algoritama za $r = 4$	120
6.8	TEST 6.4.3. Početni uvjet za model linearne advekcije.	121

6.9	TEST 6.4.3. Usporedba WENO i LBWENO metoda za različite prostorne rekonstrukcije u trenutku $t = 2$ s.	121
6.10	TEST 6.4.3. Usporedba WENO i LBWENO2 metoda za različite prostorne rekonstrukcije u trenutku $t = 2$ s.	122
6.11	TEST 6.4.5. Početni uvjet za Burgersov problem.	123
6.12	TEST 6.4.5. Središnji dio domene u trenutku $t = 0.045$ s. . . .	125
6.13	TEST 6.4.5. Usporedba WENO, LBWENO i LBWENO2 me- toda za $t = 0.225$ s.	126
6.14	TEST 6.4.5. Uspredba WENO i LBWENO metoda u trenutku $t = 0.27$ s.	126
6.15	TEST 6.4.5. TV WENO i LBWENO metode za Burgersov test.	127
6.16	TEST 6.4.5. TV WENO i LBWENO2 metode za Burgersov test.	127

SAŽETAK

Poopćenje težinskih esencijalno neoscilirajućih aproksimacija s primjenama

WENO sheme za hiperboličke zakone ravnoteže temelje se na odvojenoj diskretizaciji vremenskog i prostornog dijela parcijalne diferencijalne jednadžbe. Prostorna diskretizacija se oslanja na težinsku esencijalno neoscilirajuću (WENO) rekonstrukciju funkcija koje se pojavljuju u prostornom operatoru. S druge strane, vremenska diskretizacija se oslanja na Runge-Kutta vremensku integraciju koja osigurava jaku stabilnost.

U ovoj disertaciji izloženo je poopćenje algoritama WENO rekonstrukcije i interpolacije. Novi algoritam omogućuje fleksibilniju konstrukciju s mnogo više slobodnih parametara. Osim fleksibilnije konstrukcije, novi algoritam je numerički stabilniji i točniji te zadržava sva bitna svojstva standardne WENO rekonstrukcije i interpolacije. Također, uvedene su nove polinomne i racionalne rekonstrukcije koje se koriste kao dio WENO metode za konačne volumene i primjenjuju se na skalarne zakone očuvanja.

Osim novog pristupa prostornoj rekonstrukciji, u ovoj disertaciji predlaže se korištenje WENO shema za hiperboličke zakone ravnoteže zajedno s novim implicitnim i eksplicitnim Runge-Kutta metodama koje osiguravaju jaku stabilnost. Pritom je posebna pažnja posvećena tretiranju izvornih članova koji se pojavljuju u hiperboličkim zakonima ravnoteže.

SUMMARY

Generalization of weighted essentially non-oscillatory approximations with applications

WENO schemes for hyperbolic balance laws are based on separation of temporal and spatial discretization of partial differential equations. Weighted essentially non-oscillatory (WENO) reconstruction is used for numerical approximation of the spatial operator. Temporal discretization relies on strong stability preserving Runge-Kutta time integration.

In this thesis a generalization of basic algorithm for WENO reconstruction and interpolation are given. New algorithm enables a more flexible construction with more tunable parameters. Besides this, new algorithm is more accurate and has better stability properties while maintaining all important properties of the standard WENO reconstruction and interpolation. Furthermore, new polynomial and rational reconstruction are used as a part of WENO finite volume method and applied on scalar hyperbolic conservation laws.

Besides the improvement of the spatial reconstruction, in this thesis WENO schemes for hyperbolic balance laws are used in combination with newly developed strong stability preserving implicit and explicit Runge-Kutta methods. Furthermore, special attention was given to proper evaluation of source terms in hyperbolic balance laws.

ŽIVOTOPIS

Bojan Crnković rođen je 6. rujna 1979. godine u Rijeci. Osnovnu školu i gimnaziju pohađao je u Rijeci. 1998. godine završio je Prvu sušačku hrvatsku gimnaziju u Rijeci, prirodoslovno-matematički smjer. Iste godine upisuje studij Matematika i informatika na Filozofskom fakultetu u Rijeci.

Diplomirao je 30. rujna 2003. godine. Diplomski rad „Hiperbolički zakoni ravnoteže” izradio je pod mentorstvom prof. dr. sc. Senke Maćešić i time stekao stručno zvanje profesor matematike i informatike. 2003. godine upisuje poslijediplomski znanstveni doktorski studij matematike pri Sveučilištu u Zagrebu (nositelj studija PMF - Matematički odsjek).

Do sada je aktivno sudjelovao na šest međunarodnih znanstvenih konferencija i u koautorstvu objavio dvanaest znanstvenih radova. Bio je znanstveni novak na dva znanstveno-istraživačka projekta Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske: 2003.–2007. godine, „Numeričke simulacije i optimizacija strujanja fluida” i 2007.–2012. godine, „Numeričko modeliranje i optimizacija strujanja fluida”. Sudjelovao je na izradi dvanaest znanstvenih studija i znanstvenih izvješća za projekte u privredi.