Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Terme Jezerčica, Donja Stubica, 6.-7. lipnja 2013.

O BEZMREŽNOM MODELIRANJU HETEROGENIH MATERIJALA

Jalušić, B., Jarak, T. & Sorić, J.

Sažetak: U radu je izložen pregled bezmrežnih metoda za numeričko modeliranje heterogenih materijala pri čemu je posebna pažnja posvećena spajanju područja s različitim materijalnim svojstvima. Opisane su metoda Lagrangeovih multiplikatora, metoda skočnih funkcija, modificirane aproksimacijske sheme i metoda direktnog zadovoljavanja Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta, te je dan kritički osvrt na njihovu numeričku učinkovitost. Predstavljen je koncept bezmrežne mješovite kolokacijske metode.

Ključne riječi: *bezmrežne metode, modeliranje spoja, heterogeni materijali*

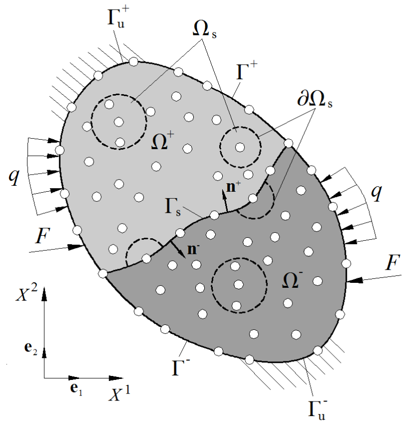
1 UVOD

Jedna od prednosti bezmrežnih numeričkih metoda u odnosu na metodu konačnih elemenata (MKE) je jednostavno definiranje aproksimacijskih funkcija visokog stupnja kontinuiteta na razini modela bez upotrebe globalnih geometrijskih mreža. Iako je to povoljno svojstvo pri rješavanju problema kao što su analiza savijanja tankih ploča i ljusaka ili modeliranje materijala s razmatranjem gradijenta deformacije [13], visok stupanj kontinuiteta bezmrežnih funkcija uzrokuje poteškoće u rješavanju problema s diskontinuitetom derivacija nepoznatih veličina polja. Tako se pri modeliranju heterogenih materijala na granicama dijelova modela s različitim homogenim svojstvima javljaju diskontinuiteti u polju deformacija. Modeliranje takvih materijala pomoću bezmrežnih metoda stoga zahtijeva primjenu posebnih numeričkih postupaka koji osiguravaju globalni kontinuitet aproksimacijske funkcije nepoznate veličine polja (npr. pomaci ili temperatura), ali i nagli skok u njenim derivacijama na samom spoju [3,5]. Nepovoljno svojstvo bezmrežnih metoda je složeno izračunavanje funkcija oblika i njenih derivacija te numerički neučinkovita integracija, što se može ublažiti primjenom mješovitog pristupa [2,9]. Pregled najčešćih postupaka za modeliranje diskontinuiranih derivacija veličina polja u bezmrežnim metodama, zajedno s kritičkim osvrtom na njihovu numeričku učinkovitost pri modeliranju heterogenih materijala, prikazan je u poglavlju 2. U 3. poglavlju predstavljena je ideja za mješovitu bezmrežnu kolokacijsku metodu za modeliranje heterogenih materijala.

2 OPISIVANJE DISKONTINUITETA PRI MODELIRANJU HETEROGENIH MATERIJALA POMOĆU BEZMREŽNIH METODA

Na slici 1 shematski je prikazano dvodimenzijsko (2D) tijelo načinjeno od heterogenog materijala koje zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ. Krivulja Γ_s

predstavlja granicu između dva područja Ω^{+} i Ω^{-} s različitih homogenim materijalnim svojstvima. Γ_{s} dijeli Ω tako da vrijedi $\Omega = \Omega^{+} \cup \Omega^{-}$ i $\Gamma = \Gamma^{+} \cup \Gamma^{-}$.



Sl. 1. Dvodimenzijski heterogeni materijal

Prilikom modeliranja heterogenih materijala pomoću bezmrežnih metoda, potrebno je zbog visokog stupnja kontinuiteta aproksimacijskih funkcija primijeniti posebne procedure za opisivanje diskontinuiteta u polju deformacija, odnosno derivacija aproksimacijske funkcije za pomake duž Γ_{s}. Istodobno, polje pomaka treba biti kontinuirano po Ω. Trenutno najznačajniji takvi postupci navedeni su u tablici 1, zajedno sa svojim komparativnim prednostima i nedostacima.

2.1 Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Metoda Lagrangeovih multiplikatora koristi se uglavnom u bezmrežnim formulacijama temeljenim na slabom obliku jednadžbi ravnoteže [3,6]. Heterogeno tijelo promatra se kao unija odvojenih homogenih područja i po svakom od njih diskretizacija se provodi zasebno, uključujući i aproksimaciju nepoznatih veličina polja. Za spajanje spomenutih područja koriste se uvjeti kontinuiteta koji za polje pomaka na granici Γ_{s} glase

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \lambda (u_i^{+} - u_i^{-}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \,. \tag{1}$$

U relaciji (1) λ je Lagrangeov multiplikator, a u_i^{+} i u_i^{-} predstavljaju pomake u Ω^{+}, odnosno Ω^{-}. Lagrangeovi multiplikatori fizikalno se mogu interpretirati kao površinske sile potrebne za nametanje kontinuiteta pomaka.

2.2 Metoda skočnih funkcija

Metoda skočnih funkcija (*jump functions*) temelji se na proširenju aproksimacijske funkcije prikladnom "skočnom funkcijom" $\Psi_j(x)$, definiranom lokalno u području oko granice Γ_{s}. Aproksimacijska funkcija pomaka opisuje se preko cijelog heterogenog tijela kao

$$u^h(x) = u^m(x) + \sum_{j=1}^{n_{\Gamma_{\mathrm{s}}}} q^j \Psi_j(x), \tag{2}$$

gdje se $u^m(x)$ odnosi na neku od standardnih bezmrežnih aproksimacijskih funkcija, a q^j predstavlja amplitudu skočne funkcije. Skočnu funkciju $\Psi_j(x)$ potrebno je konstruirati tako da su aproksimacija (2) i njena prva derivacija kontinuirane svugdje u $\Omega \cup \Gamma$, osim na Γ_{s}, gdje prva derivacija $u^h(x)$ mora biti diskontinuirana.

2.3 Modificiranje baznih funkcija

U ovom pristupu odabiru se bazne funkcije standardnih bezmrežnih aproksimacija tako da se na Γ_{s} dobije njihov diskontinuitet derivacija. U [12] je za jednodimenzijski (1D) problem umjesto standardne linearne metode pomičnih najmanjih kvadrata (*moving least squares,* MLS) definirana bilinearna MLS aproksimacijska funkcija koja ima diskontinuiranu derivaciju na granici $x_{\Gamma_{\mathrm{s}}}$

$$u^h(x) = a + b(x - x_{\Gamma_{\mathrm{s}}}) = \mathbf{p}_1 \mathbf{a} \;\; \text{za}\, x \le x_{\Gamma_{\mathrm{s}}},\;\; u^h(x) = a + c(x - x_{\Gamma_{\mathrm{s}}}) = \mathbf{p}_2 \mathbf{a} \;\; \text{za}\, x > x_{\Gamma_{\mathrm{s}}}, \qquad (3)$$

gdje su $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x - x_{\Gamma_{\mathrm{s}}} & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x - x_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \end{bmatrix}$ vektori baznih funkcija. Koeficijenti $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix}$ određuju se minimiziranjem težinskog funkcionala, slično kao i kod standardne MLS aproksimacije [12].

2.4 Direktno zadovoljavanje Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta

Metoda direktnog zadovoljavanja rubnih uvjeta na Γ_{s} zbog svoje jednostavnosti često se primjenjuje u bezmrežnim metodama. Heterogeno tijelo promatra se kao unija odvojenih homogenih područja, slično kao u metodi Lagrangeovih multiplikatora. Na granici Γ_{s} diskretizacija se vrši pomoću dvostrukih čvorova, odnosno pozicije čvorova koji pripadaju područjima Ω^+ i Ω^- se međusobno poklapaju. U svakom od čvorova na Γ_{s} postavlja se kontinuitet pomaka i recipročnosti vektora naprezanja

$$u_i^+ - u_i^- = 0, \quad t_i^+ + t_i^- = 0\,. \qquad (4)$$

3 MJEŠOVITA BEZMREŽNA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Sve dostupne bezmrežne metode za modeliranje heterogenih materijala temeljene su na metodi pomaka (primarne metode) u kojima je potrebno izračunavati derivacije bezmrežnih funkcija drugog reda, što povećava računalne troškove i smanjuje točnost i stabilnost. Numeričku učinkovitost moguće je povećati primjenom mješovitog pristupa [2,9] koji se može primijeniti i za modeliranje heterogenih materijala.

Jednadžbe za sustav prema slici 1 su jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svim čvorovima unutar Ω, koje je podijeljeno na Ω^+ i Ω^-

$$\sigma^+_{ij,X^j} + b_i^+ = 0, \;\; \text{unutar}\; \Omega^+, \quad \sigma^-_{ij,X^j} + b_i^- = 0, \;\; \text{unutar}\; \Omega^-. \qquad (5)$$

Jednadžbe (5) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$

$$u_i^+ = \bar{u}_i^+, \;\; \text{na}\; \Gamma_{\mathrm{u}}^+, \quad u_i^- = \bar{u}_i^-, \;\; \text{na}\; \Gamma_{\mathrm{u}}^-, \qquad (6)$$

$$t_i^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ = \bar{t}_i^+, \;\; \text{na}\, \Gamma_{\mathrm{t}}^+, \quad t_i^- = \sigma_{ij}^- n_j^- = \bar{t}_i^-, \;\; \text{na}\, \Gamma_{\mathrm{t}}^- \qquad (7)$$

te rubne uvjete prema (4) na granici Γ_{s}.

zadovoljavanje Dirichletovih rubnih uvjeta na spoju tijela	zadovoljavanje Neumannovih rubnih uvjeta na spoju tijela	diskretizacija heterogenog tijela	bezmrežna metoda (akronim)	aproksimacijska funkcija	jednadžbe ravnoteže	prednosti	nedostaci
Lagrangeovi multiplikatori	zadovoljeni u slaboj formi [3,6]	homogena područja unutar heterogenog materijala diskretiziraju se odvojeno [3,6]	MLPG5 [3] EFG [6]	MLS [3,6]	slabi oblik [3,6]	za isti broj čvorova manja greška u usporedbi s metodom skoč funkcija [3], velika točnost rezultata za pomake u čvorovima [6]	potrebni posebni rješavači za globalni sustav diskretiziranih jednadžbi, povećanje broja čvornih nepoznanica [4], oscilacije derivacija polja pomaka oko spoja [6,12], potrebna integracija po granici Γ_s što uzrokuje povećanje vremena računanja [11], manja točnost u usporedbi s metodom konačnih elemenata [12]
skočne funkcije	skočne funkcije [3,10]	heterogeni materijal diskretizira se kao jedno područje [3,10]	MLPG1 [3] EFG [10]	MLS [3,10]	slabi oblik [3,10]	za modele s malim brojem čvorova na granici Γ_s manja greška u usporedbi s metodom Lagrangeovih multiplikatora, trend se mijenja povećanjem broja čvorova [3], točni rezultati na spoju i u neposrednoj blizini spoja [10]	s povećanjem broja čvorova norme grešaka ostaju nepromijenjene [3], za metodu potrebna interpolacija u krivocrtnim koordinatama što postaje složeno kod 3D problema [11], skočnu funkciju je potrebno definirati unaprijed i njen oblik utječe na točnost dobivenih rezultata [12], potrebni dodatni stupnjevi slobode za određivanje amplitude skočne funkcije [12]
modificiranje baznih funkcija	automatski zadovoljeni [12]	heterogeni materijal diskretizira se kao jedno područje [12]	EFG [12]	modificirana MLS [12]	slabi oblik [12]	vrlo točni rezultati, nema definiranja dodatnih parametara funkcija te uvođenja dodatnih stupnjeva slobode, MLS aproksimacija se provodi preko cijelog modela [12]	komplicirana aproksimacija za 2D i 3D probleme [12]
direktna metoda	direktna metoda [1,4,5,7,8,11]	homogena područja unutar heterogenog materijala diskretiziraju se odvojeno [1,4,5,7,8,11]	MLPG [1,7,8] EFG [4] SD-RBCM [5] SD-LRBCM [5] MLPG2+ MLPG5 [11]	MLS [1,4,7,8,11] RBF [5]	slabi oblik [1,4,7,8,11] jaki oblik (kolokacija) [5]	jednostavna za implementaciju, numerički učinkovita i točna [1,4,5,7,8,11], zadovoljavanje rubnih uvjeta kontinuiteta na granici spoja izvodi se bez numeričke integracije (u jakoj formi) [5]	potrebno istovremeno eksplicitno nametnuti i rubne uvjete pomaka i rubne uvjete sila na Γ_s [5]

Tablica 1. Numerički postupci za modeliranje diskontinuiteta derivacija bezmrežnih funkcija

Vrijedi da je $\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{u}^+ \cup \Gamma_\mathrm{u}^- \cup \Gamma_\mathrm{t}^+ \cup \Gamma_\mathrm{t}^-$, gdje $\Gamma_\mathrm{u} = \Gamma_\mathrm{u}^+ \cup \Gamma_\mathrm{u}^-$ označava dio $\partial\Omega$ s zadanim pomacima $\bar{u}_i$, dok su na $\Gamma_\mathrm{t} = \Gamma_\mathrm{t}^+ \cup \Gamma_\mathrm{t}^-$ zadane površinske sile $\bar{t}_i$. 2D kontinuum se aproksimira pomoću dvaju skupova čvorova $I = 1,2,...,N$, i $M = 1,2,...,P$ gdje su N i P ukupni brojevi čvorova u području Ω^+, odnosno Ω^-. Prema mješovitom kolokacijskom postupku iz [9], nepoznate veličine polja su komponente naprezanja i pomaka. Sve nepoznate veličine aproksimirane su zasebno u područjima Ω^+ i Ω^-, pri čemu se koriste iste aproksimacijske funkcije za sve komponente pomaka i naprezanja. Za Ω^+ vrijedi

$$u_i^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{X})\left(\hat{u}_i^+\right)_J, \quad \sigma_{ij}^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{X})\left(\hat{\sigma}_{ij}^+\right)_J, \tag{8}$$

gdje ϕ_J predstavlja 2-D čvorne funkcije oblika za čvor *J*, *a* $\left(\hat{u}_i^+\right)_J$ i $\left(\hat{\sigma}_{ij}^+\right)_J$ pripadne čvorne vrijednosti za pomake i naprezanja. Analogno su aproksimirani pomaci i naprezanja po području Ω^-. Diskretizacijom jednadžbi (4)-(7), pomoću aproksimacija (8) dobiva se nerješivi sustav jednadžbi jer je ukupni broj nepoznatih čvornih naprezanja i pomaka veći od broja raspoloživih jednadžbi. Stoga se u svim čvorovima uvode konstitutivne relacije

$$\left(\hat{\sigma}_{ij}^+\right)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^+ \left(u_{i,j}^{+(h)} + u_{j,i}^{+(h)}\right), \quad \left(\hat{\sigma}_{ij}^-\right)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^- \left(u_{i,j}^{-(h)} + u_{j,i}^{-(h)}\right), \tag{9}$$

iz kojih je moguće izračunati čvorna naprezanja pomoću aproksimiranih pomaka iz (8). C_{ijkl}^+, C_{ijkl}^- u jednadžbi (9) predstavljaju komponente materijalnih tenzora u Ω^+ i Ω^-. Eliminacijom čvornih naprezanja, dobiva se zatvoreni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima se kao nepoznanice javljaju samo čvorni pomaci.

4 ZAKLJUČAK

U radu je dan pregled numeričkih postupaka za modeliranje diskontinuiteta derivacija aproksimacijskih funkcija u bezmrežnim metodama, s primjenom na modeliranje heterogenih materijala. Njihovom usporedbom može se zaključiti da je direktna metoda trenutno najpogodnija zbog svoje jednostavnosti i numeričke učinkovitosti.

Osim toga predstavljen je koncept mješovite bezmrežne kolokacijske metode namijenjene modeliranju heterogenih materijala. Opisana strategija pogodna je za implementaciju direktne metode za opisivanje diskontinuiteta na granicama područja s različitim homogenim materijalnim svojstvima. Na temelju iskustva autora i rezultata iz dostupne literature, očekuje se da će primjena predloženog mješovitog pristupa biti znatno točnija od sličnih metoda temeljenih na metodi pomaka.

Literatura:

[1] Ahmadi, I., Aghdam, M.M., "A Truly Generalized Plane Strain Meshless Method for Combined Normal and Shear Loading of Fibrous Composites", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.35, No.3, 2011, str. 395-403.

[2] Atluri, S.N., Han, Z.D., Rajendran, M.J., "A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method, Through the MLPG "Mixed" Approach", CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.6, No.6, 2004, str. 491-513.

[3] Batra, R.C., Porfiri, M., Spinello, D., “Treatment of Material Discontinuity in Two Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulations of Axisymmetric Transient Heat Conduction”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61, No.14, 2004, str. 2461-2479.
[4] Cai, Y.C., Zhu, H.H., “Direct Imposition of Essential Boundary Conditions and Treatment of Material Discontinuities in the EFG Method”, Computational Mechanics, Vol.34, No.4, 2004, str. 330-338.
[5] Chen, J-S., Wang, L., Hu, H-Y., Chi, S-W., “Subdomain radial basis collocation method for heterogeneous media”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.80, 2009, str. 163-190.
[6] Cordes, L.W., Moran, B., “Treatment of Material Discontinuity in the Element-Free Galerkin Method”, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, Vol.139, No.96, 1996, str. 75-89.
[7] Dang, T.D., Sankar, B.V., “Meshless Local Petrov-Galerkin Formulation for Problems in Composite Micromechanics”, AIAA Journal, Vol.45, No.4, 2007, str. 912-921.
[8] Dang, T.D., Sankar, B.V., “Meshless Local Petrov-Galerkin Micromechanical Analysis of Periodic Composites Including Shear Loadings”, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.26, No.3, 2008, str. 169-187.
[9] Jarak, T., Hoster, J., Jalušić, B., Sorić, J., “Numerical analysis of 2-D linear elastic problems by MLPG method”, 7th International Congress of Croatian Society of Mechanics, Zadar, Croatia, 2012, str. 153-154.
[10] Krongauz, Y., Belytschko, T., “EFG Approximation with Discontinuous Derivatives”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.41, 1998, str. 1215-1233.
[11] Li, Q., Shen, S., Han, Z.D., Atluri, S.N., “Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) to Problems with Singularities and Material Discontinuities in 3-D Elasticity”, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.4, No.5, 2003, str. 571-585.
[12] Masuda, S., Noguchi, H., “Analysis of Structure with Material Interface by Meshfree Method”, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.11, No.3, 2006, str. 131-143.
[13] Tang, Z., Shen, S., Atluri, S.N. (2003): Analysis of materials with strain-gradient effects: A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol.4, No.1, 2003, str. 177-196.

Autori:

Boris Jalušić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 115, fax: 01 6168 187, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jalusic/
Tomislav Jarak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 514, fax: 01 6168 187, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jarak/
Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 103, fax: 01 6168 187, e-mail: jurica.sorić@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/soric/