

Zbornik radova Šestoga susreta Hrvatskoga društva za mehaniku

Urednici:

Gordan JELENIĆ

Maja GAĆEŠA

Izdavač:

Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje korica:

Edita PAPA DUKIĆ

Tehnički urednici:

Paulo ŠČULAC

Leo ŠKEC

Tisak:

Zambelli, Rijeka

Naklada:

100 primjeraka

ISBN 978-953-7539-19-1

Zbornik radova
Šestoga susreta Hrvatskoga društva za mehaniku

Rijeka. 29. – 30. svibnja 2014.

Urednici:
Gordan Jelenić i Maja Gaćeša



Organizator Susreta

**Hrvatsko društvo za mehaniku
Podružnica Rijeka**

Pod pokroviteljstvom
Građevinskoga fakulteta Sveučilišta u Rijeci

Organizacijski odbor:

Gordan JELENIĆ, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Maja GAĆEŠA, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Igor KARŠAJ, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

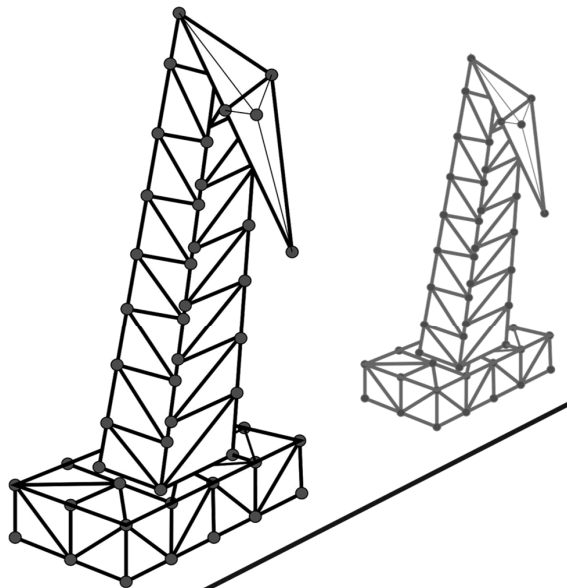
Edita PAPA DUKIĆ, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Domagoj LANC, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

Leo ŠKEC, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Lado KRANJČEVIĆ, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

Paulo ŠČULAC, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci



Zbornik radova
Šestoga susreta Hrvatskoga društva za mehaniku

Sadržaj

Pozvana predavanja

Bićanić, N.: ALGORITAMSKE ALTERNATIVE U SIMULACIJI DINAMIKE MULTI BLOKOVSKIH SUSTAVA	1
Vučetić, M.: MEHANIČKI SUSTAV ZA NELINEARNI ODZIV TLA NA POTRES S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE	7
Alfirević, I.: RAZDOBLJA MEHANIKE I NJEN ODNOS PREMA DRUGIM GRANAMA FIZIKE	21
Balić, I., Trogrlić, B. i Ćesić, J.: POJEDNOSTAVLJENA METODA CILJANOG UBRZANJA U VIŠEMODALNOJ METODI NAGURAVANJA	35
Bede, N. i Ožbolt, J.: NUMERIČKO MODELIRANJE BETONA U SLUČAJU DINAMIČKOG OPTEREĆENJA	43
Brčić, M., Čanadija, M. i Brnić, J.: UTJECAJ PRAZNINA I ZAKRIVLJENOSTI NA SVOJSTVA UGLJIČNIH NANOCIJEVI	49
Čeh, N. i Bićanić, N.: STUDIJA UTJECAJA NEVERTIKALNOSTI KRUTOG BLOKA NA PERIODIČNOST NE-GLATKOG DINAMIČKOG PONAŠANJA PRI HARMONIJSKOJ POBUDI	55
Frančeski, J., Tonković, Z., Skozrit, I., Surjak, M., Krstulović-Opara, L., Vesenjaj, M., Kodvanj, J. i Domazet, Ž.: VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA PRIMJENOM METODA DIGITALNE KORELACIJE SLIKE I TERMOGRAFIJE	61
Gačeša, M. i Jelenić, G.: PARAMETRIZACIJA POMAKA I ROTACIJA ŠESTERODIMENZIONALNIM VEKTORIMA	67
Gatin, I., Vukčević, V. i Jasak, H.: PRIMJENA NAVAL HYDRO PAKETA ZA PRORAČUN VALNIH OPTEREĆENJA	73
Ivić, S., Ćiković, K. i Družeta, S.: OPTIMALNI DIZAJN NEPNEUMATSKE GUME KOTAČA POMOĆU GENETIČKOG ALGORITMA	79
Ivić, S., Staver, I. i Kranjčević, L.: PSO OPTIMIZACIJA MREŽE CJEVOVODA S OBZIROM NA TROŠKOVE INSTALACIJE I EKSPLOATACIJE	85
Jagodnik, V. i Jelenić, G.: MIJEŠANA FORMULACIJA U ANALIZI GREDE NA ELASTIČNOJ PODLOZI	91
Jalušić, B., Jarak, T. i Sorić, J.: BEZMREŽNA NUMERIČKA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA	97
Karačić, M., Gotovac, B., Kozulić, V. i Brajčić Kurbaša, N.: RJEŠAVANJE TORZIJE PRIZMATIČNIH ŠTAPOVA OPĆENITOG PRESJEKA METODOM R-FUNKCIJA	105

Krvavica, N., Travaš, V. i Ožanić, N.: TROSLOJNI NUMERIČKI MODEL STACIONARNOG TEČENJA U STRATIFICIRANOM ESTUARIJU	111
Lanc, D., Turkalj, G., Pešić, I. i Jurki, B.: MODEL IZVIJANJA GREDNIH NOSAČA KOMPOZITNIH KUTIJASTIH PROFILA	117
Lesičar, T., Tonković, Z. i Sorić, J.: POOPČENI RUBNI UVJETI PERIODIČNOSTI U RAČUNALNOJ HOMOGENIZACIJI DRUGOG REDA	123
Lustig, N. i Bičanić, N.: POBOLJŠANJE MREŽE KONAČNIH ELEMENATA PRIMJENOM KONFIGURACIJSKIH SILA	129
Marenić, E. Sorić, J. i Ibrahimbegović, A.: VIŠERAZINSKO MODELIRANJE DVOOSNOG DEFORMIRANJA GRAFENA	135
Marović, P. i Galić, M.: O PRORAČUNU PROGIBA KONZOLE PROMJENJIVOG OKRUGLOG POPREČNOG PRESJEKA	141
Munjas, N., Čanadija, M. i Brnić, J.: VIŠERAZINSKO MODELIRANJE ELASTIČNIH MATERIJALA	147
Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D., Gelo, I. i Damjanović, D.: ZAMORNO OŠTEĆENJE PREDNAPREGNUTOG I EKSCENTRIČNO OPTEREĆENOG VIJČANOG SPOJA	153
Papa Đukić, E. i Jelenić, G.: INTERPOLACIJA OVISNA O KONFIGURACIJI U NELINEARNIM RAVNINSKIM GREDNIM KONAČNIM ELEMENTIMA	159
Penava, D., Sigmund, V. i Kožar, I.: MIKRO MODELI UOKVIRENOG ŽIDA S OTVORIMA	165
Pustaić, M., Wolf, H. i Pustaić, D.: KRUTOST I ČVRSTOĆA SEGMENTA KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA PRI MONTAŽI I TRANSPORTU	171
Ribarić, D.: METODA USVOJENIH DEFORMACIJA ZA 9-ČVORNE ELEMENTE MINDLINOVIH PLOČA	179
Rukavina, T. i Jelenić, G.: IZVOD MATRICE MASA INTERPOLACIJOM OVISNOM O PROBLEMU ZA PROSTORNI TIMOŠENKOV KONAČNI ELEMENT	185
Smolčić, Ž. i Ožbolt, J.: NUMERIČKO MODELIRANJE BETONA OJAČANOG ČELIČNIM VLAKNIMA	191
Šćulac, P. i Jelenić, G.: MODELIRANJE RASPUCAVANJA GREDNIM KONAČNIM ELEMENTIMA S UGRAĐENIM DISKONTINUITETOM	197
Škec, L. i Jelenić, G.: MODELIRANJE SLOJEVITIH GREDA S POPUSTLJIVIM KONTAKTOM MEĐU SLOJEVIMA	203
Terze, Z. i Zlatar, D.: NUMERIČKA INTEGRACIJA ROTACIJSKOG TENZORA NA GRUPI JEDINIČNIH KVATERNIONA	209
Tonković, Z., Vašak, M., Kožar, I. i Čanžar, P.: O PROJEKTU "CENTAR IZVRSNOSTI ZA PROCJENU STANJA KONSTRUKCIJA"	215

Torić Malić, N. i Kožar, I.: PRIMJENA METODE KONAČNIH TRAKA U ANALIZI POKRETNOG OPTEREĆENJA	221
Travaš, V.: DINAMIČKA ANALIZA PROSTORNE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE URONJENE U MORE	227
Vukčević, V. i Jasak, H.: PRIMJENA NAVAL HYDRO PAKETA ZA DVOFAZNA STRUJANJA	233
Živaljić, N., Nikolić, Ž., Smoljanović, H. i Topić, D.: NUMERIČKA SIMULACIJA SUDARA METODOM KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA	239
Radovi u sklopu radionice iz biomehanike	
Korade, I., Virag, Z. i Krizmanić, S.: PROCJENA MOGUĆNOSTI MJERENJA LOKALNIH PARAMETARA VISKOELASTIČNE ARTERIJSKE STIJENKE	245
Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D. i Baškarić, T.: DINAMIČKA IZDRŽLJIVOST DENTALNIH IMPLANTATA	251
Vindiš V., Virag L. i Karšaj I.: IMPLEMENTACIJA NUMERIČKOG MODELA RASTA ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE U PAKET ZA KONAČNE ELEMENTE	257
Virag, L., Vindiš, V., Wilson, J. S., Karšaj, I. i Humphrey, J. D.: MODEL RASTA I RESTRUKTURIRANJA ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE	263
Kazalo autora	269

ALGORITAMSKE ALTERNATIVE U SIMULACIJI DINAMIKE MULTI BLOKOVSKIH SUSTAVA

Bićanić, N.

Sažetak: U nizu na prvi pogled različitih simulacijskih okvira za analizu dinamičkog ponašanja multiblokovskih konstrukcija i sustava, postoje mnoge sličnosti, moguće alternative ili opcije koje se često ne prepoznaju i koje sa sobom donose svoje prednosti i svoje nedostatke (metoda diskretnih elementa DEM [2], modificirana DEM metoda MDEM [4], kombinirana DEM/FEM metoda [5], analiza diskontinuiranih deformacija DDA [6], metoda neglatke kontaktne mehanike NSCD [3]). Sličnosti i različitosti se manifestiraju u načinu na koji se apoksimira i u konačnosti algoritimizira relativno jednostavan fizikalni problem, u kojem mnogo odvojenih tijela pri vanjskom dinamičkom djelovanju prolaze kroz promjenjiva stanja međusobnog kontakta, koja stanja nisu a priori poznata. Simulacijskim algoritmom je potrebno ne samo pratiti gibanje mnogo tijela/blokova raznih oblika i deformabilnosti, nego i osigurati zadovoljenje kontaktnih rubnih uvjeta, odnosno nepostojanje interpenetracije tijela u kontaktu. Članak razmatra glavne aspekte gdje se pojavljuje potreba izbora algoritamskih alternativa ili opcija pri simulaciji multiblokovskih sistema.

Ključne riječi: *Metoda diskretnih elemenata, Neglatka kontaktna dinamika, Eksplicitna i implicitna integracija*

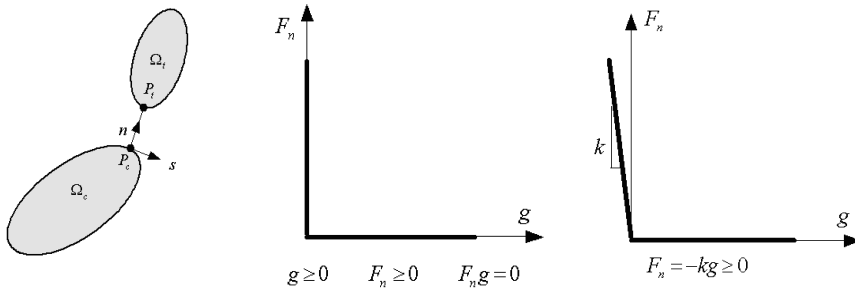
1 UVOD

Modeliranje ponašanja multiblokovskih konstrukcija se najčešće povezuje sa ranom definicijom [2], kojom se traži da metodologija (a) prati velike pomake i rotacije diskretnih tijela, uključujući i potpuni odmak, te (b) automatski prepoznaje nove kontakte. Velik broj metoda i postupaka na ovaj ili onaj način pripadaju tako definiranoj velikoj skupini metoda diskretnih elemenata. Simulacijski i algoritamski se te metode mogu klasificirati i razlikovati prema algoritmima prepoznavanja novog kontakta, zadovoljenju rubnih uvjeta na kontaktu (kohezija, trenje), deformabilnost tijela u kontaktu (kruta tijela, tijela sa ograničenom deformabilnosti, elastična tijela), po broju broju i distribucije tijela/blokova u sustavu, po tretmanu granice modela, po mogućnostima fragmentacije tijela, odnosno nastanka novih diskontinuiteta, te algoritmskim realizacijama (eksplicitni, implicitni postupci) numeričke integracije jednadžbi gibanja u vremenu. Simulacije se obično odnose na sustav od više tijela/blokova raznih oblika i proizvoljne deformabilnosti, gdje tijela potencijalno međusobno dolaze u dodir, kako rješenje napreduje u vremenu. Zbog evolucije rješenja u vremenu, problem se obično tretira kao dinamički problem, koji može ali i ne mora imati statičku rješenje. U nastavku će se govoriti o potrebi niza odluka u izboru algoritimizacije problema, počevši od racionalnog izbora jednadžbe gibanja (traženi stupanj točnosti, poznavanje detalja) odnosno nepoznanica problema (izbor nepoznanica pomaka ili nepoznanica brzina, kao glavnih varijabli problema). Nakon izbora vodećih jednadžbi gibanja slijedi izbor niza nimalo manje važnih algoritamskih aspekata – vremenska integracija odabranih jednadžbi gibanja, efikasna karakterizacija kompleksne geometrije tijela čije se ponašanje simulira, matematski opis deformabilnosti tijela, određivanje lokacije kontakta, zadovoljenje rubnih uvjeta na

kontaktnu, te nastajanje novih diskontinuiteta. Svi ti aspekti su algoritamski blisko povezani i djeluju na efikasnost i vjerodostojnost konačnog postupka simulacije.

2 IZBOR JEDNADŽBI GIBANJA I REGULARIZACIJA NEDOSTATKA GLATKOSTI PROBLEMA

Dominantan algoritamski izbor predstavlja odluka o odabiru nivoa jednadžbe gibanja, kojom se problem opisuje.



Sl. 1. – Regularizacija neglatkog Signorinijevog kontaktnog zakona (u smjeru normale na kontaktnu plohu)

Tradicionalni postupak u metodi diskretnih elemenata [2] pretpostavlja matematsku regularizaciju, kojom se nejednoznačnost veze sila – razmak na kontaktu zamjenjuje jednoznačnom funkcijom, čime se uklanja neglatkost formulacije. Taj korak omogućuje opis problema diferencijalnom jednadžbom drugog reda, gdje su nepoznanice pomaci, te gdje se promatra dinamička ravnoteža inercijalnih sila, sila od prigušenja i unutarnjih sila sa vanjskim i kontaktnim silama

$$M^t \ddot{U} + C^t \dot{U} + {}^t F_{int} = {}^t \hat{F}_{ext} = {}^t F_{ext} + {}^t F_{cont} \quad (1)$$

Jednadžbe gibanja se mogu riješiti bilo kojim postupkom numeričke integracije (eksplicitnim ili implicitnim). Tradicionalno se koristi eksplicitna metoda srednjih konacnih razlika, koja predstavlja prihvaćen standardni okvir u simulaciji industrijskih problema (na primjer *Abaqus Explicit*, *LS-Dyna*). Jednostavnost algoritimizacije (Tabela 1), specijalno u slučaju diagonalizacije matrice masa, čime se izbjegava potreba formiranja globalne matrice krutosti za određivanje unutarnjih sila, rezultira činjenicom da je takva metodologija opravdano vrlo atraktivna, jer vodi na jednostavne računalne implementacije, kao i jednostavnu paralelizaciju postupka. Negativna strana je vezana za dugotrajnost simulacija, jer postoji važno ograničenje veličine vremenskog koraka, koji ne smije biti veći od neke kritične vrijednosti, a koja slijedi kao rezultat uvjetne numeričke stabilnosti i prirode odabranog eksplicitnog postupka numeričke integracije jednadžbi gibanja.

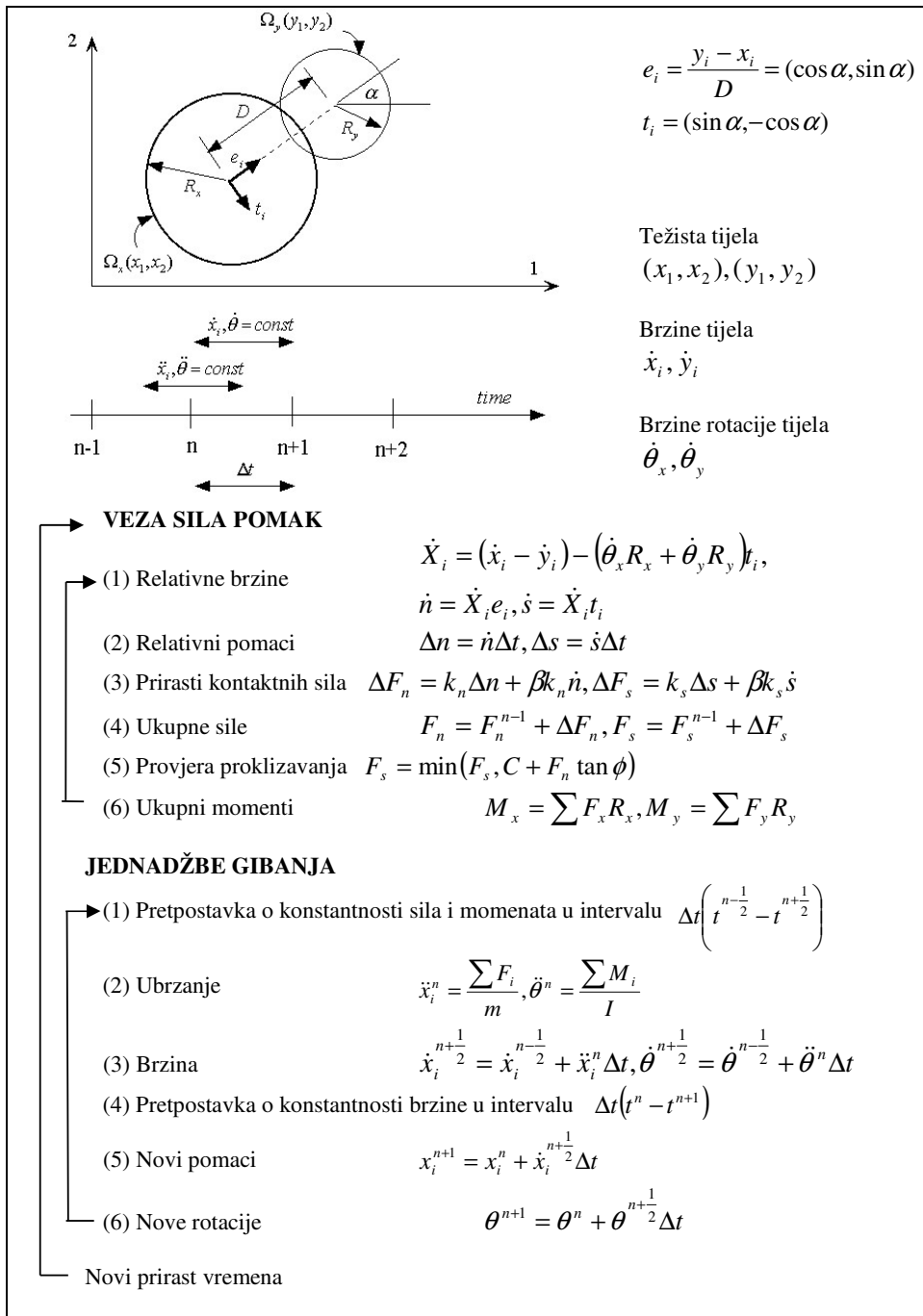


Tabela 1. Klasični eksplicitni algoritam metode diskretnih elemenata [2], uz zadovoljenje kontaktnih uvjeta i određivanje kontaktnih sila preko 'penalty' faktora Alternativni put u metodi neglatke kontaktne mehanike [3] predstavlja odabir jednadžbe gibanja kao diferencijalne jednadžbe prvog reda, gdje su osnovne nepoznanice brzine, a ne

pomaci. U matematskom smislu radi se o korištenju diferencijalne norme, odnosno diferencijalne raspodjele u vremenu

$$M(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x, \dot{x}) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r dt \quad x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x} dt \quad (2)$$

gdje se Signorinijev uvjet neglatkosti problema (slično vrijedi i za neglatki Coulombov uvijet u tangencijanom smjeru na kontaktnoj plohi) može direktno zadovoljiti, bez potrebe za regularizacijom, jer ne postoji potreba da se definira ubrzanje kao derivacija brzine po vremenu. Umjesto sile, ovdje se promatra impuls sile unutar intervala, koji se dijeli na dva

dijela. Dio $\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x, \dot{x}) dt$ uključuje impulse od svih vanjskih sila (osim onih koji proizlaze

od sila na kontaktima), a impuls kontaktnih sila se zamjenjuje njegovom srednjom vrijednosti, tokom konačnog vremenskog intervala $r_{i+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} r dt$. Takva podjela ima svoje

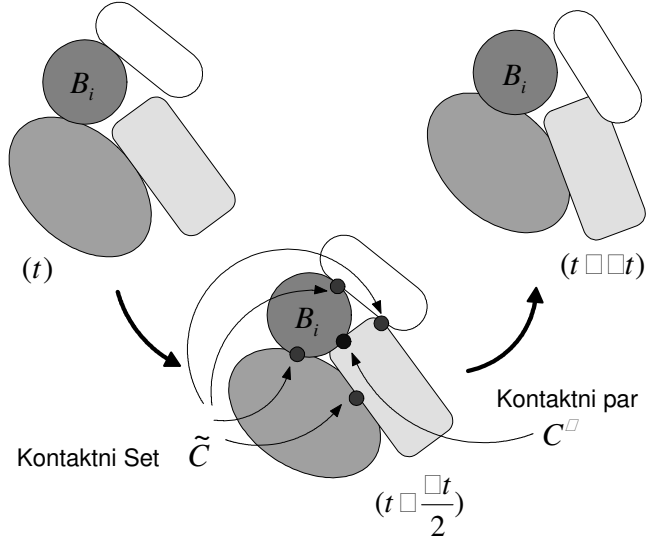
algoritamske posljedice, dok to u fizikalnom smislu znači da su detalji kontakta tokom vremenskog intervala zanemareni, odnosno zadovoljeni samo u prosjeku. Takva algoritamska odluka ima i svoje opravdanje, jer se smatra da ili nemamo dovoljno znanja o detaljima prirode kratkotrajnog kontakta ili da su ti detalji bez značajnog utjecaja na rješenje cjelokupnog problema. U smislu numeričke integracije jednadžbe gibanja, ponovno je moguće koristiti bilo koju odgovarajuću metodu (eksplicitnu ili implicitnu), no ovakav izbor jednadžbe gibanja, gdje su brzine vodeće nepoznanice, najčešće vodi na rješenje implicitnom metodom, gdje je potrebno u svakom koraku zadovoljiti kontaktne uvjete na svakom kontaktu, za svaki kontaktni par. Takav je postupak nužno iterativan (Tabela 2), pa algoritamski detalji i implementacija takvog iterativnog postupka (matematski se radi o problemu minimizacije sa nelinearnim ograničenjima) predstavljaju kritičan faktor efikasnosti simulacija, koje uključuju veliki broj tijela/blokova. U usporedbi sa ranijim, jednostavnim eksplicitnim postupkom integracije jednadžbi gibanja drugog reda (sa vrlo malim vremenskim korakom, gdje se kontaktni uvjeti promatraju odvojeno za svalu lokaciju kontakta i samo su približno zadovoljeni), ovdje se radi o korištenju znatno većeg vremenskog koraka (bezuvjetna stabilnost, ograničenje vremenskog koraka je dominantno vezano za zatjevanu točnost proračuna), uz mnogo strožije zadovoljenje rubnih uvjeta simultano na svim kontaktima, ali naravno uz razumljivo znatno produljenje računskog postupka.

3 OSTALI ALGORITAMSKI ASPEKTI I ZAKLJUČAK

Mnogi dodatni algoritamski aspekti utječu na vjerodostojnost i robustnost simulacije. Efikasni algoritmi za određivanje kontaktnih parova su zapravo 'conditio sine qua non', budući da kontaktni set treba odrediti u svakom vremenskom koraku. Određivanje detaljne lokacije kontakata je isto tako vezano za jednoznačno i robusno određivanje orijentacije kontaktne plohe, koje u nekim slučajevima (primjerice kontakt vrha jednog

(1) Za svako tijelo B_i odrediti položaj u vremenskom međukoraku $t + \frac{\Delta t}{2}$

korištenjem vrijednosti brzina na početku koraka $\mathbf{x}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{x}_i^t + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_i^t$



(2) Pronaći kontakte sa drugim tijelima, odnosno odrediti trenutni kontaktni set \tilde{C}

(3) Petlja preko svih lokacija kontaktnih parova C^α , unutar kontaktnog seta \tilde{C} , odrediti tzv 'slobodnu' brzinu koristeći

$$\mathbf{V}_i^{free(t+\Delta t)} = \mathbf{V}_i^t + \Delta t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{F}_i^{ext(t+\frac{\Delta t}{2})}$$

te riješiti lokalni Signorini/Coulomb problem, odnosno iterativno odrediti kontaktne sile \mathcal{R}_{it}^α , do zadovoljenja norme $\|\mathcal{R}_{it}^\alpha - \mathcal{R}_{it-1}^\alpha\| < \varepsilon$

(4) za svako tijelo B_i , izračunati brzinu na kraju vremenskog koraka $t + \Delta t$ uključujući do sada određene kontaktne sile u (3)

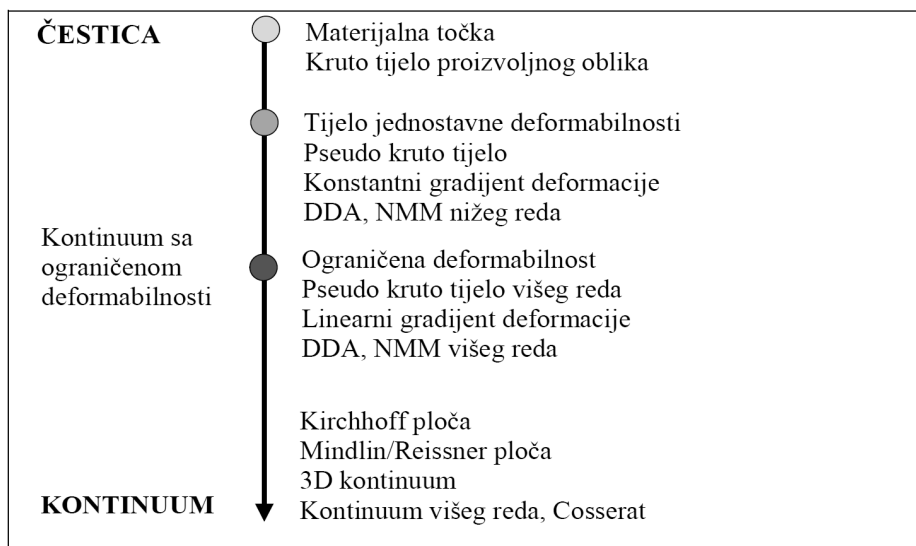
$$\mathbf{V}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{V}_i^{free(t+\Delta t)} + \Delta t \mathbf{M}_i^{-1} \sum_{C^\alpha} \mathbf{H}(C^\alpha, B_i) \mathcal{R}^\alpha$$

(5) Odrediti novi položaj tijela body B_i na kraju vremenskog koraka $t + \Delta t$

$$\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_i^{t+\Delta t}$$

Tabela 2. Implicitni algoritam za problem neglatke kontaktne dinamike multi blokovskih sistema, sa 'leap frog' postupkom vremenske integracije i iterativnim zadovoljenjem kontaktnih rubnih uvjeta [3]

bloka sa vrhom drugog bloka) nije nipošto trivijalno. Zanimljivo je ujedno razmotriti i utjecaja opisa deformabilnosti tijela/blokova čije se gibanje prati. U tom je kontekstu zanimljivo razmišljati o čitavom spektru modelskih mogućnosti, što ponovno zahtijeva racionalni izbor, koji naravno ima algoritamske implikacije. Slika 2 prikazuje spektar mogućeg odabira deformabilnosti [1] - od modela materijalne točke, preko pseudo krutih tijela, sve do prepoznatljivih podmodela kontinuuma i konačno kontinuuma višeg reda. Svi spomenuti algoritamski aspekti su modelski povezani, ovise jedan o drugom i bitno utječu na ukupnu kvalitetu simulacije.



Sl. 2. Odabir modela deformabilnosti tijela/blokova

Literatura:

- [1] Cohen H., Muncaster R.G., "The Theory of Pseudo-Rigid Bodies", Springer Verlag, New York, 1988.
- [2] Cundall P. A., Hart R.D., "Numerical Modelling of Discontinua", Engineering Computations No. 9., 1992., str. 101-114.
- [3] Jean, M., "The non-smooth contact dynamics method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering No. 177., 1999., str. 235-257.
- [4] Meguro K., Hakuno, M. "Fracture Analyses of Concrete Structures by the Modified Distinct Element Method", Journal Structural Engineering/Earthquake Engineering, Japan Society of Civil Engineering, Vol 6, No 2, str 283-294.
- [5] Munjiza A., "The Combined Finite-Discrete Element Method", Wiley, London, 2004.
- [6] Shi G. H., "Discontinuous Deformation Analysis - a new numerical model for statics and dynamics of block systems", PhD thesis, University of California, Berkeley, 1988.

Autor:

Neenad Bićanić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, Rijeka, tel. 051/265-954, e-mail: nenad.bicanic@gradri.uniri.hr

MEHANIČKI SUSTAV ZA NELINEARNI ODZIV TLA NA POTRES S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

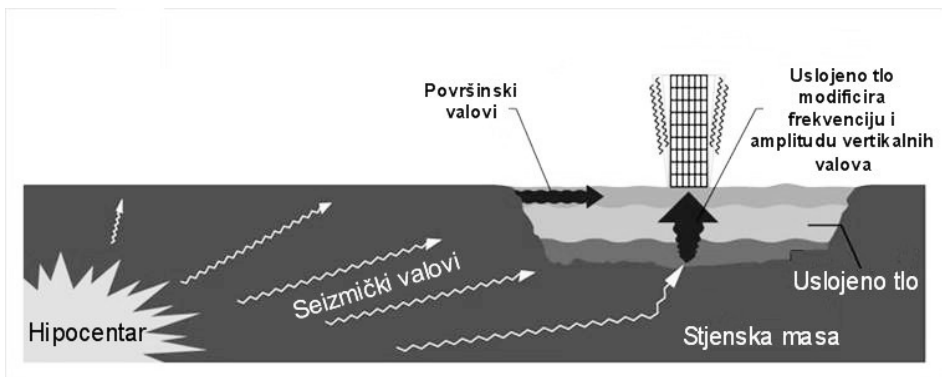
Vučetić, M.

Sažetak: Da bi se na nekom terenu analiziralo ponašanje zgrade za vrijeme budućeg potresa potrebno je procijeniti cikličke pomake na površini i po dubini terena. U tu svrhu se najčešće analizira model horizontalno uslojenog tla kroz koje putuju seizmički valovi, i to najčešće samo idealni vertikalni posmični (transverzalni) jednodimenzionalni ravninski valovi koji uzrokuju samo horizontalne pomake površine tla i čestica tla po dubini. U članku je sažeto opisan jedan takav model. To je model u kojem se vibracije kontinuiranog nelinearnog medija horizontalno uslojenog tla opisuju mehaničkim vibracijskim sustavom s više stupnjeva slobode koji se sastoji od niza diskretnih masa spojenih u seriju sa nelinearnim oprugama i viskoznim prigušivačima. Model se pobuđuje u bazi akceleracijama (odabranim akcelerogramom) i može simulirati: (i) nelinearno cikličko ponašanje tla usljed neregularnih amplituda i frekvencija, (ii) degradaciju (smanjanje) krutosti slojeva tla sa vremenom usljed cikličkih deformacija, (iii) prirast pritiska porne vode s vremenom, i (iii) raspodjelu pornih pritisaka između susjednih slojeva tla različitih propusnosti. Kompjuterski program tog modela omogućuje da se izračuna za svaki sloj promjena slijedećih veličina s vremenom: akceleracije, brzine, pomaka, relativne posmične deformacije, posmičnog naprezanja i pritiska porne vode.

Ključne riječi: tlo, cikličko opterećenje, seizmički odziv terena, nelinearni model, likvefakcija

1 UVOD

U zemljotresnom građevinarstvu jedan od tipičnih problema je odziv terena i objekata na seizmičke pomake i sile, tj. na seizmičke valove koji iz dubine dolaze na površinu terena [1]. Takav problem je skiciran na slici 1 na kojoj se vidi kako se naslage uslojenog tla podvrgnute utjecaju raznih seizmičkih valova. Rezultirajući pomaci na kontaktu zgrade i tla su vrlo nepravilni i u sva tri smjera pa ih je gotovo nemoguće točno odrediti, specijalno za buduće potrese čije pobude nisu poznate. U praksi dinamike tla se zato problem najčešće pojednostavljuje tako da se uzimaju u obzir samo najdestruktivniji pomaci, a to su horizontalni pomaci površine terena i tla po dubini. Naime, horizontalni pomaci temeljnog tla mogu dovesti do prevrtanja zgrade i općenito uzrokuju znatne posmične sile u stupovima i zidovima te tako i u gredama i stropovima. Pored toga, kod horizontalnih cikličkih pomaka temeljnog tla čestice tla imaju tendenciju da se pod opterećenjem nadsloja i zgrade zbijaju, a to u potpuno saturiranim tlama prouzrokuje prirast pornih pritisaka. Prirast pornih pritisaka smanjuje efektivne napone te tako i krutost tla i taj proces može kod jačih potresa pretvoriti tlo u mekanu pa i tekuću masu, što je poznati fenomen likvefakcije. Posljedica likvefakcije tla je zorno prikazana na slici 2.



Sl. 1. Problem vibracije i cikličkih pomaka uslojenog tla za vrijeme potresa

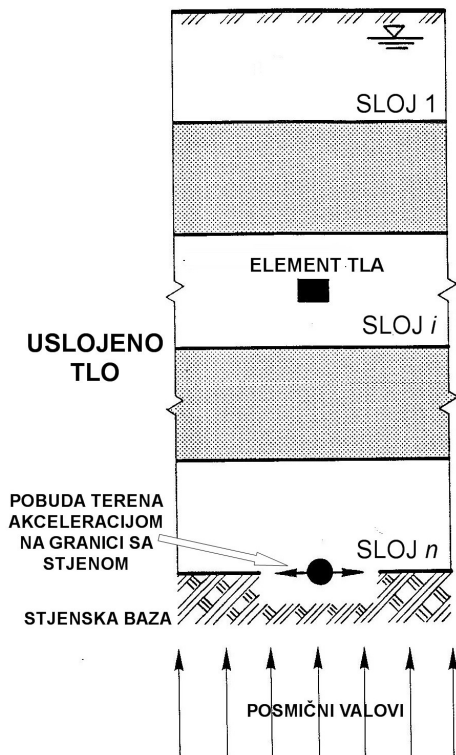


Sl. 2. Uranjanje inače vrlo čvrste kuće u potpuno saturirano pjeskovito tlo koje je zbog prirasta pornih pritisaka likvefiralo, tj. izgubilo krutost i čvrstoću [2]

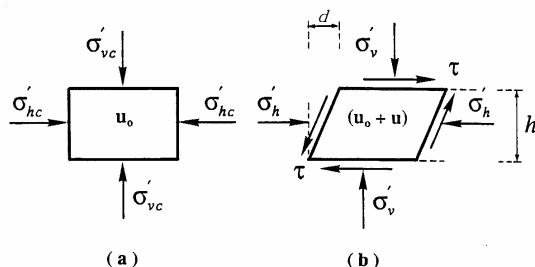
2 MODELIRANJE CIKLIČKOG PONAŠANJA TLA

Na slici 3 je prikazano kako se uslojeno tlo i seizmički valovi idealiziraju u svrhu analize seizmičkog odziva terena, a to je tako da je tlo horizontalno uslojeno i beskonačno u horizontalnom smjeru a seizmički valovi su vertikalni posmični jednodimenzionalni ravninski valovi. Na slici 4 su prikazana naprezanja i deformacije elementa tla iz tako uslojenog terena prije i za vrijeme potresa. Na toj slici σ_{vc}' , σ_{hc}' i u_0 su konsolidacijsko efektivno vertikalno i horizontalno naprezanje i porni pritisak prije potresa, a σ_v' , σ_h' i u su efektivno vertikalno i horizontalno naprezanje i porni pritisak za vrijeme potresa. Nadalje, τ i γ su posmično naprezanje i relativna posmična deformacija za vrijeme potresa. Treba uočiti da u toj idealnoj situaciji potres prouzrokuje samo dodatna ciklička naprezanja

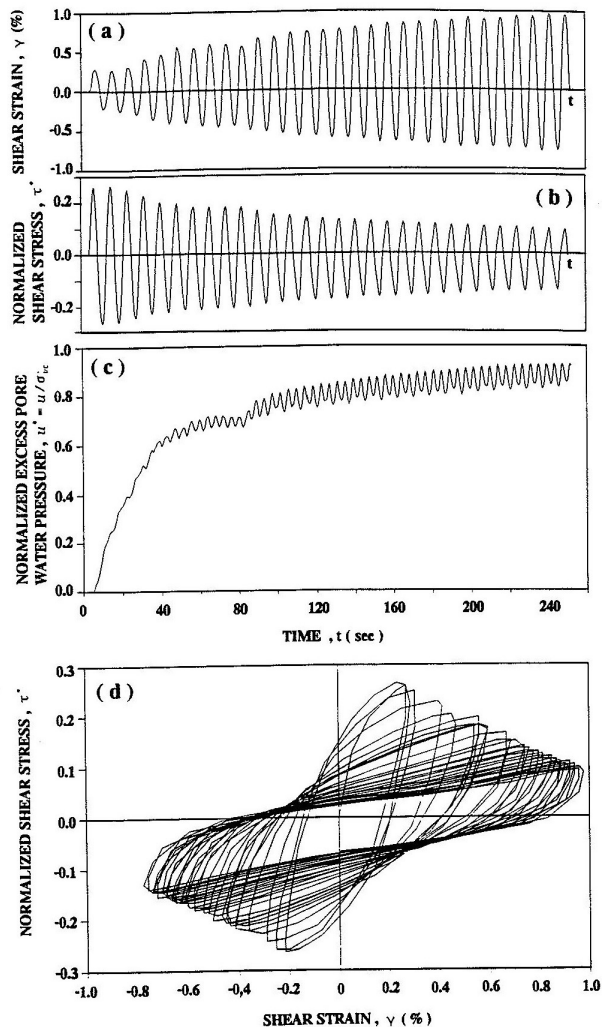
čistog smicanja. Na slici 5 je primjer cikličkog ponašanja saturiranog pijeska u pokusu jednostavnog smicanja koji simulira uvjete čistog smicanja [3]. Iz tog pokusa se vide da prilikom cikličkog smicanja odnos između γ i τ opisuje cikličke petlje čiji se nagib s brojem ciklusa smanjuje, što znači da se krutost uzorka smanjuje, a u isto vrijeme porni pritisak raste.



Sl. 3. Idealizirana situacija za vrijeme potresa koja se tipično koristi za procjenu odziva terena i konstrukcija (najčešće zgrada) na površini terena – vertikalno putovanje posmičnih (transverzalnih) seizmičkih valova kroz horizontalno uslojeno tlo



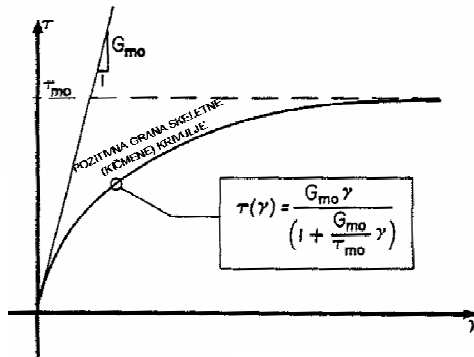
Sl. 4. Skica idealnih napreznja i deformacija elementa tla usljed vertikalnih posmičnih valova: (a) konsolidacijska normalna napreznja prije potresa, i (b) čisto smicanje za vrijeme potresa (relativna posmična deformacija $\gamma=d/h$; $\sigma'_v=\sigma'_{vc}-u$; $\sigma'_h=\sigma'_{hc}-u$)



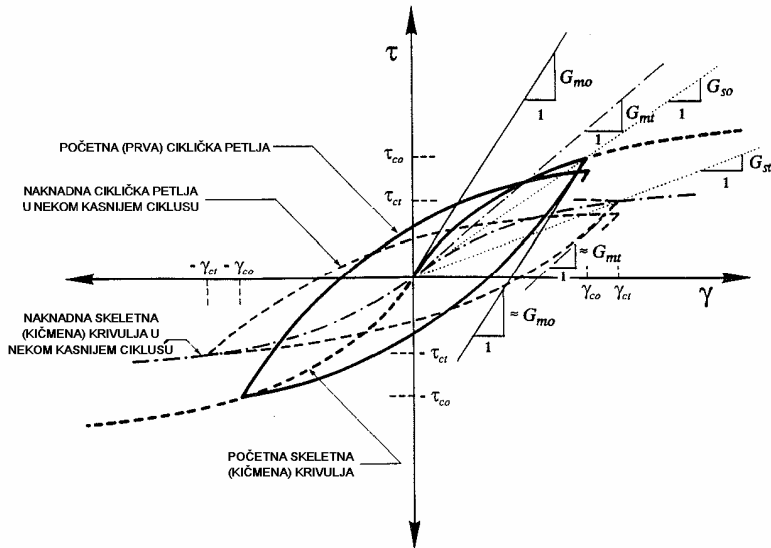
Sl. 5. Primjer cikličkog ponašanja potpuno saturiranog pjeska u aparatu za jednostavno smicanje – posmična naprezanja i porni pritisci su normalizirani sa σ'_{vc} , tj. $\tau^* = \tau / \sigma'_{vc}$ a $u^* = u / \sigma'_{vc}$ [3]

Takvo ponašanje tla se može opisati modelima koji su prikazani na slikama 6, 7 i 8. Takvi i njima slični modeli su ugrađeni u neke mehaničke vibracijske sustave te tako i u sustav opisan u ovom članku. Na slici 6 je parabolična krivulja monotonog smicanja [4] čijom jednadžbom se može opisati smicanje u prvoj četvrtini prvog ciklusa cikličkog opterećenja. Ta se krivulja često naziva pozitivna grana skeletne krivulje. Ovdje G_{mo} = maksimalni posmični modul, a τ_{mo} = posmična čvrstoća (maksimalni τ). Na slici 7 su prikazane potpuno zatvorena početna ciklička petlja (prvi ciklus) i petlja nekog kasnijeg ciklusa s pripadnim skeletnim krivuljama. Svaka petlja ima gornju i donju granu. Tu se vidi da je skeletna krivulja praktičan koncept, jer prema Masingovim pravilima [5] ako se njezin pozitivni dio uveća za 2 dobiva se gornja grana petlje, a ako se negativni dio uveća za 2 dobiva se donja grana. Uzimajući u obzir da kod idealne potpuno zatvorene petlje negativni dio skeletne

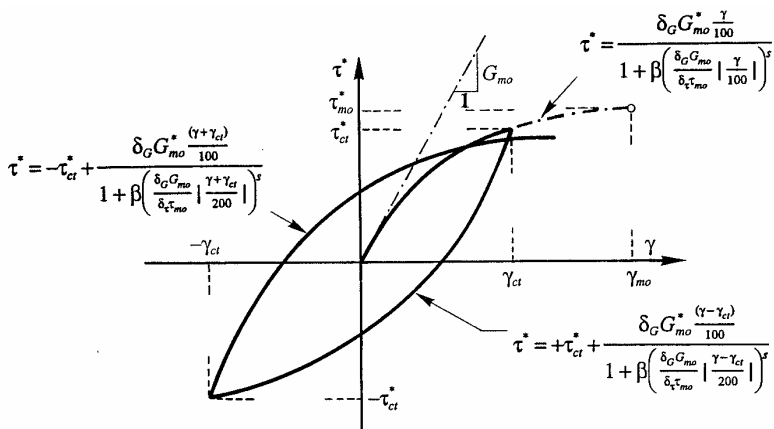
krivulje ima isti oblik kao i pozitivni dio zarotiran za 180° , cijela početna petlja se može iskonstruirati uz pomoć početne krivulje na slici 6. Na slici 7 amplitude posmičnih cikličkih naprezanja i relativnih deformacija su označeni sa τ_c i γ_c , a nagibi petlja su definirani sekantnim posmičnim modulima, G_{so} i G_{st} . Kad γ_c teži nuli posmični modul ide prema maksimumu G_{mo} u prvom ciklusu i G_{mt} u kasnijem ciklusu. Za dani γ_c smanjenje krutosti tokom cikličkog opterećenja se tako može izraziti sa relativnim smanjenjem sekantnog modula $\delta_G = G_{st}/G_{so}$, gdje je δ tzv. indeks cikličke degradacije. Analogno tome, kad γ_c teži nuli $\delta_G = G_{mt}/G_{mo}$.



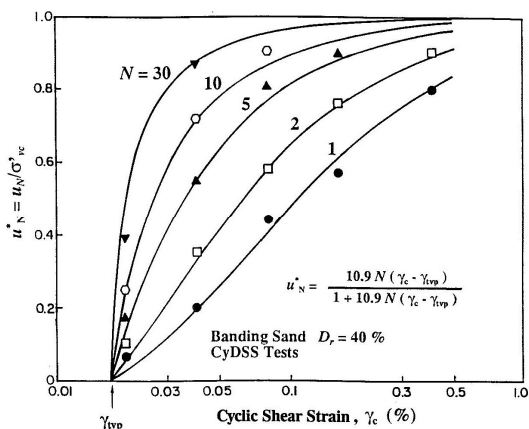
Sl. 6. Skica krivulje monotoničnih (“statičkih”) posmičnih naprezanja i relativnih deformacija i njena definicija jednostavnom hiperboličnom funkcijom prema Kondneru i Zelasku [4]



Sl. 7. Skica krivulje cikličkih posmičnih naprezanja i relativnih deformacija u prvom ciklusu i nekom kasnijem ciklusu nakon vremena, t



Sl. 8. Matematički model početne krivulje cikličkih posmičnih naprezanja i relativnih deformacija, i modeli naknadnih krivulja rasterećenja i ponovnog opterećenja u prvom punom ciklusu - posmična naprezanja su normalizirana sa σ_{vc}^* , tj. $\tau^* = \tau / \sigma_{vc}^*$, a γ u jednadžbama je u postocima [3,6]



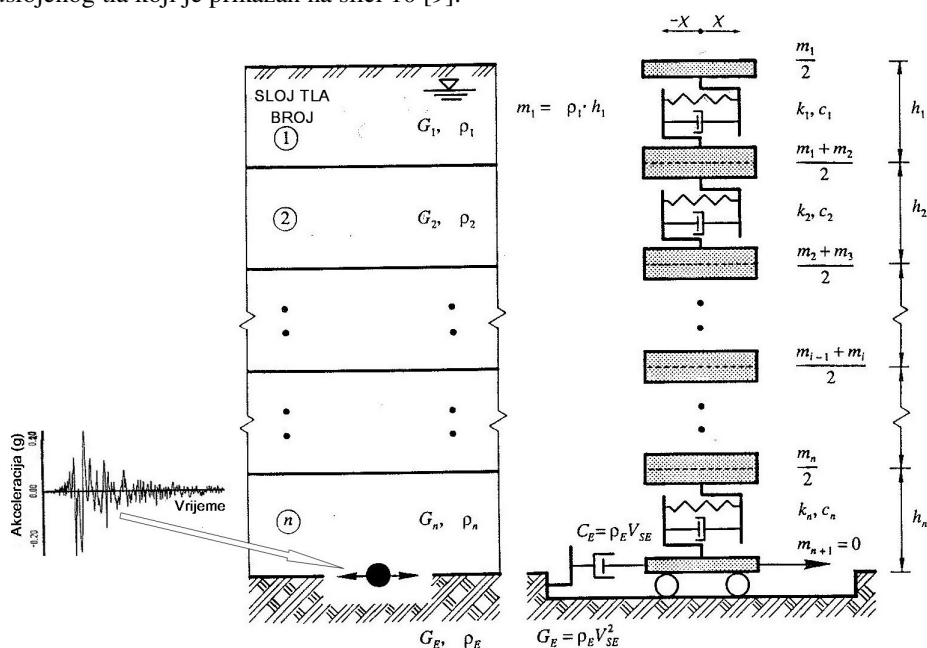
Sl. 9. Primjer modela prirasta normaliziranih pornih pritisaka, $u_N^* = u_N / \sigma_{vc}^*$, s brojem ciklusa, N , konstantnih cikličkih relativnih deformacija, γ_c , za jedan pijesak [7]

Na slici 8 je prikazana ciklička petlja s jednadžbom početne krivulje (dio pozitivne grane skeletne krivulje) i jednadžbama grana petlje. Te jednadžbe sadrže parametre definirane na slici 6, indekse degradacije δ_G i δ_τ i dva parametra β i s za usklađivanje krivulja s laboratorijskim rezultatima. Paramter $\delta_\tau = \tau_{mi} / \tau_{m0}$ opisuje relativno smanjenje posmične čvrstoće τ_{m0} zbog cikličke degradacije. Te jednadžbe cikličkog ponašanja tla koje su bazirane na modelu na slici 6 i Masingovim pravilima su ugrađene u razne verzije mehaničkog vibracijskog sustava koji je dolje opisan. Te razne verzije vibracijskog sustava imaju modele za degradaciju δ_G i δ_τ pijeska a neke i za degradaciju gline. Modeli degradacije su različiti za pijeskovita i glinovita tla, i ponešto se razlikuju od jedne do druge verzije mehaničkog sustava. Za pijeske, na primjer, modeli degradacije su bazirani na smanjenju efektivnih naprezanja usljed prirtasta pornih pritisaka čiji model je prikazan na slici 9 [7]. Na slici 9 se vidi kako prirast pornog pritiska ovisi o amplitudi γ_c i broju ciklusa N . Ostali pijeski imaju vrlo sličan ciklički model što je u skladu sa činjenicom da

porni pritisak fundamentalno ovisi o cikličkim deformacijama a ne naprezanjima [8]. Modeli degradacija usljed povećanja pornih pritisaka, u , su u originalnoj verziji dolje prikazanog mehaničkog sustava [9] slijedeći: $\delta_G = G_{mt}/G_{mo} = [(\sigma_{vc}' - u)/\sigma_{vc}']^{0.5}$ i $\delta_\tau = \tau_{mt}/\tau_{mo} = [(\sigma_{vc}' - u)/\sigma_{vc}']$. U kasnijim verzijama tog mehaničkog sustava su te jednadžbe degradacije malo modificirane [10]. Što se tiče saturiranih glina, njihova ciklička degradacija i odnos te degradacije i promjene pornog pritiska su opisani drugačijim modelima [11,12] jer se cikličko ponašanje gline razlikuje od pijesaka [13,14].

3 MEHANIČKI SUSTAV

Svi gore opisani modeli cikličkog ponašanja tla i njihove jednadžbe, plus model ponašanja pri nereguliranim cikličkim naprezanjima i deformacijama i model za disperziju i preraspodjelu pornih pritisaka među susjednim slojevima su ugrađeni u mehanički sustav uslojenog tla koji je prikazan na slici 10 [9].



Sl. 10. Mehanički vibracijski sustav s više stupnjeva slobode u kojem se kontinuirani medij nelinearnog uslojenog tla opisuje nizom diskretnih masa spojenih nelinearnim oprugama i prigušivačima, te prigušivačem za disperziju energije kroz kontakt sa stjenskom bazom [9]

U tom modelu: (i) polovice masa susjednih slojeva su skoncentrirane na njihovom kontaktu, (ii) nelinearno cikličko i degradirajuće ponašanje tla svakog sloja je opisano nelinearnom oprugom kojoj se krutost mijenja tokom cikličkog smicanja, (iii) ponašanje usljed neregularnog cikličkog smicanja je modelirano u skladu sa Masingovim pravilima [6], (iv) svakom sloju je dodan prigušivač čije prigušenje pokriva razliku između prigušenja dobivenog analitičkim cikličkim petljama (slike 7 i 8) i stvarnim petljama iz cikličkih pokusa (slika 5) koje su nešto veće od analitičkih [15], i (v) disperzija pornih pritisaka na površini podzemne vode i njihova preraspodjela između susjednih slojeva je modelirana Terzaghijevom jednadžbom konsolidacije [9]. Uz to, na dnu modela na apsolutno krutoj podlozi je prigušivač koji omogućava da se prilikom vibracije sustava gubi

energija na tom kontaktu, čime se modelira vraćanje dijela valova u podlogu koja u stvarnosti nije apsolutno kruta [1,9]. Sustav na slici 10 je prema tome mehanički vibracijski sustav s više stupnjeva slobode u kojem su osobine kontinuiranih materijala slojeva, koje se mijenjaju po visini sloja, zamjenjene diskretnim prosječnim parametrima. Broj stupnjeva slobode jednak je broju skoncentriranih masa.

Pobuda na dnu modela se ostvaruje zadanom akceleracijom koja je slična očekivanoj akceleraciji u budućem potresu na toj dubini. Ta akceleracija je ustvari akcelerogram sastavljen od niza impulsa konstantnih akceleracija čiji intervali su tipično 0.01 sekundu. Za svaki impuls akceleracije izračuna se odziv cijelog sustava uz pretpostavku da su u tom kratkom vremenskom intervalu opruge slojeva tla linearne. Zatim se odrede promjene materijala tla na kraju impulsa usljed degradacije i preraspodjele pornih pritisaka, te se onda u skladu sa tim promjenama korigiraju parametri osobina slojeva tla sa kojima se ponovo računa odziv cijelog sustava na slijedeći impuls akceleracije. Odziv sustava na jedan impuls akceleracije se računa u matičnom obliku, kao što se to klasično radi u konstrukterstvu u dinamici zgrada:

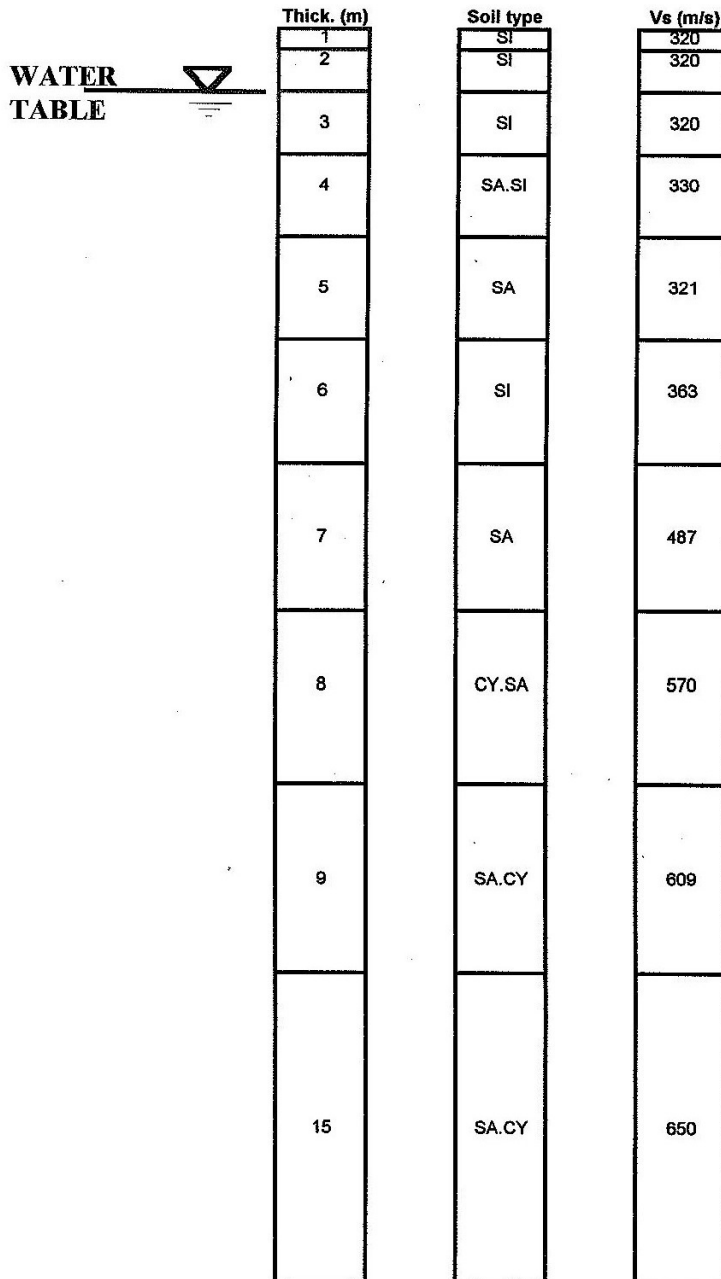
$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\ddot{u}_g(t)\{1\}, \quad (1)$$

gdje x =horizontalni pomak mase, t =vrijeme, $[M]$ =matrica mase, $[C]$ =matrica prigušenja, $[K]$ =matrica krutosti, a $\ddot{u}_g(t)$ =zadana akceleracija u bazi.

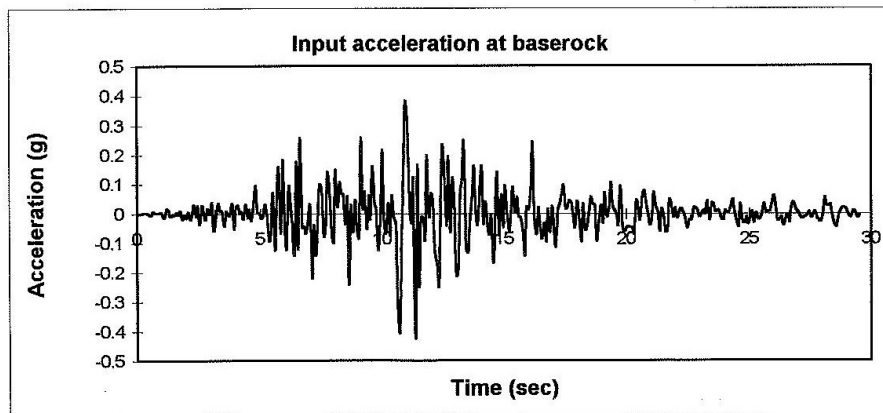
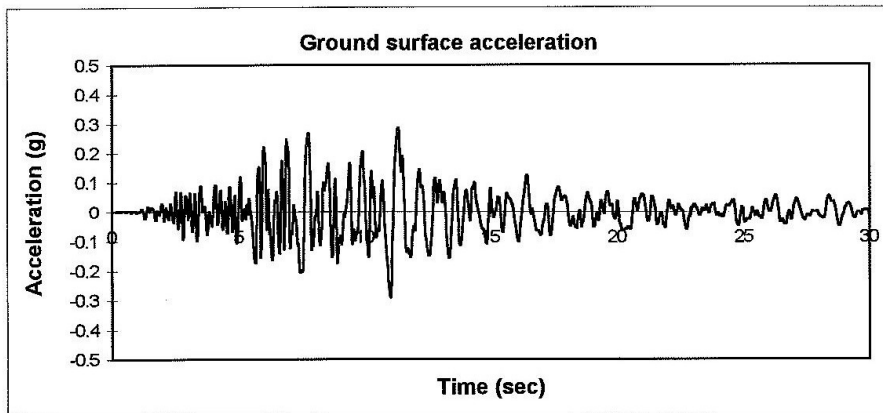
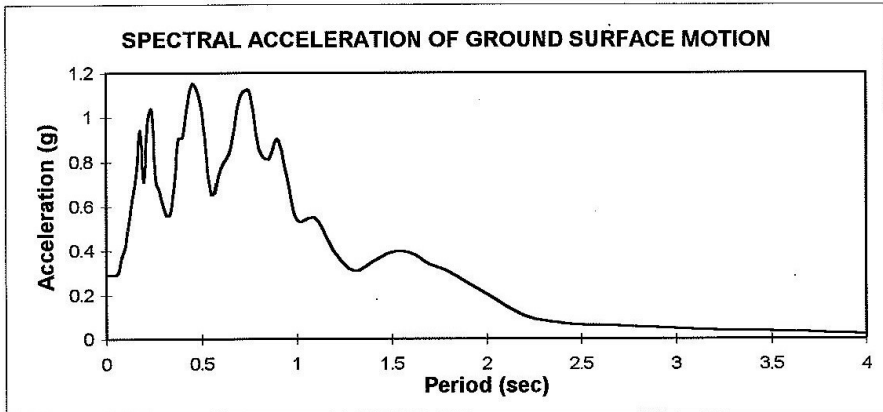
Jedan od prvih, ako ne i prvi kompjuterski program koji računa ponašanje takvog vibracijskog sustava su napisali Lee i Finn 1978 [9] za analizu pješčanih terena podložnih likvefakciji i nazvali ga DESRA (Dynamic Effective Stress response Analysis). Program DESRA je kasnije modificiran mijenjanjem modela cikličkog ponašanja pjeskovitog tla i dodavanjem podprograma za slojeve gline. Tako su nastale verzije DESRAMOD [15,16], D-MOD [3] i DESRAMOD-2 [17].

4 PRIMJER PRORAČUNA ODZIVA USLOJENOG TLA

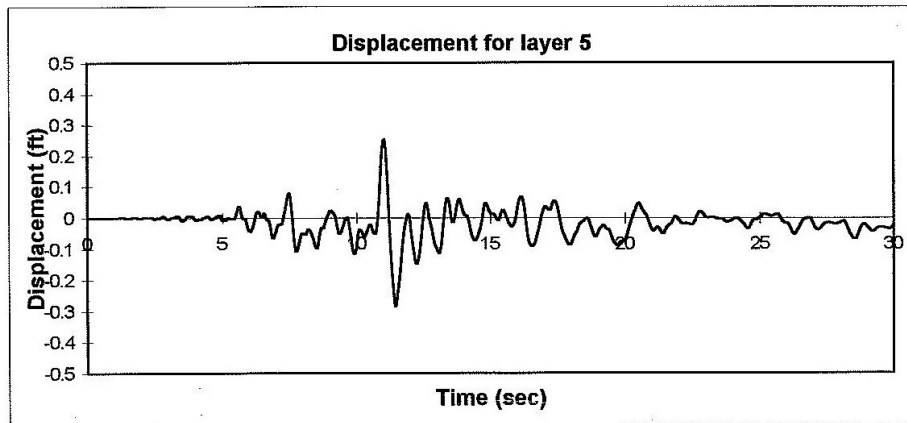
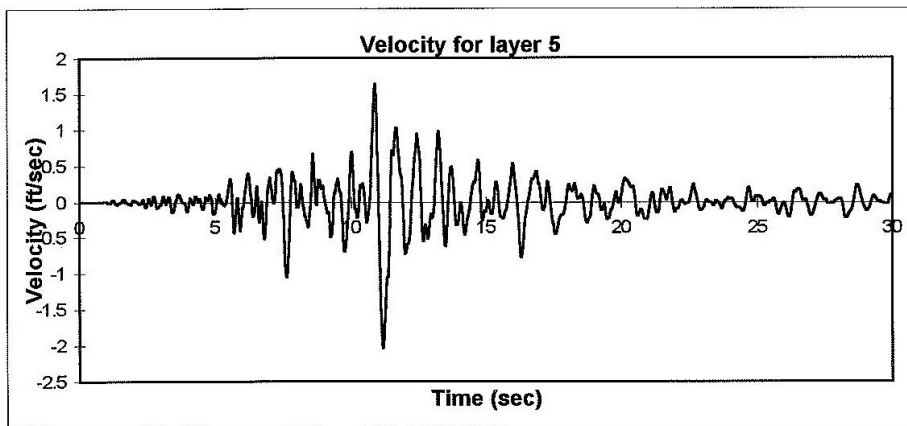
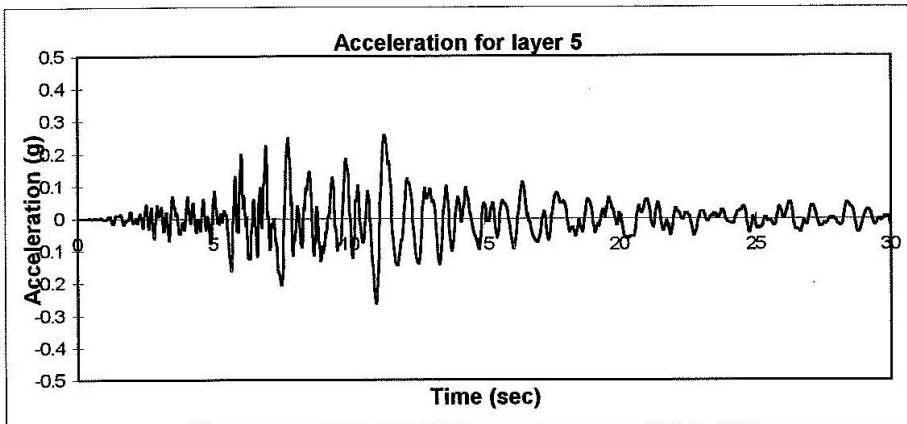
Neki rezultati jednog proračuna programom DESRAMOD-2 su prikazani na slikama 11 do 15 [17]. To su rezultati odziva terena na jednoj lokaciji u Los Angelesu, SAD. Na slici 11 je profil terena sa debljinama slojeva, vrstama tla (SA=pijesak; Sl=prah; CY=glina) i brzinama širenja posmičnih valova, V_s , iz kojih se mogu izračunati $G_{mo}=\rho V^2$, gdje ρ =gustoća. Značenja dijagrama na ostalim slikama su dana u njihovim naslovima. Iz slika se vidi da program računa za svaki sloj akceleracije, brzine, pomake, relativne posmične deformacije, posmična naprezanja i porne pritiske sa vremenom.



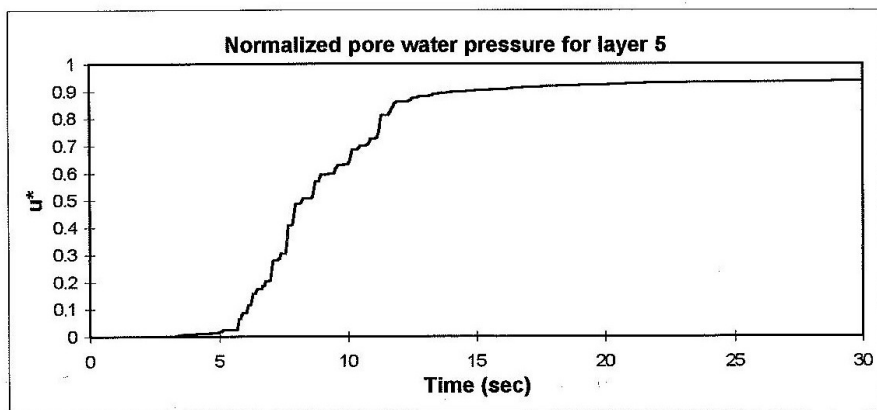
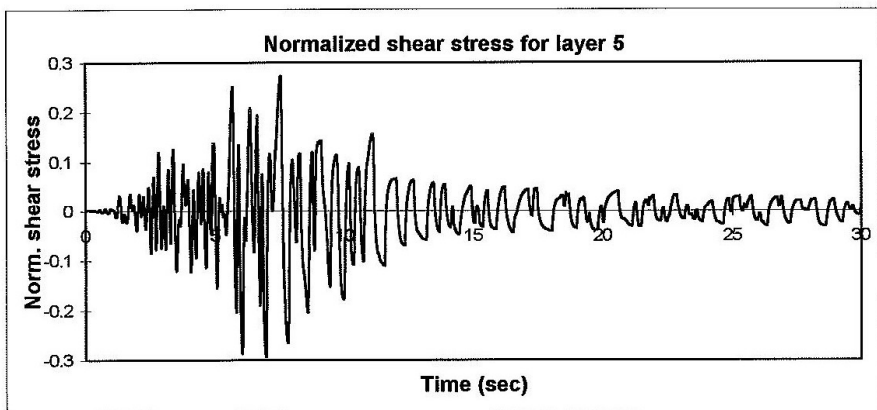
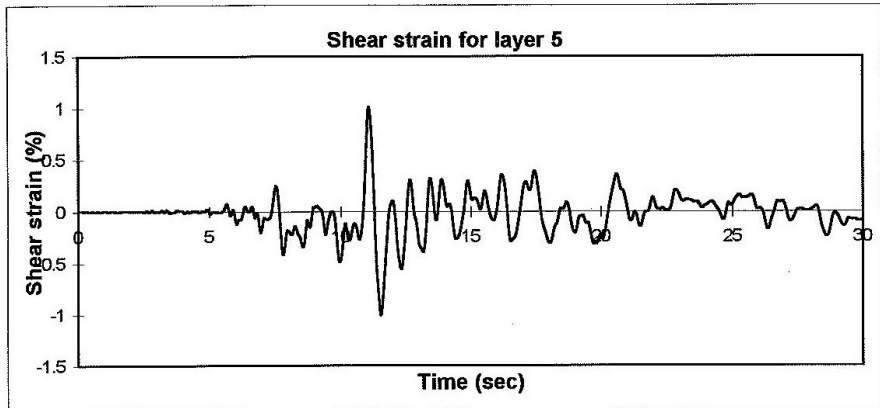
Sl. 11. Primjer profila tla čiji odziv je analiziran modelom DESRAMOD-2 [17]



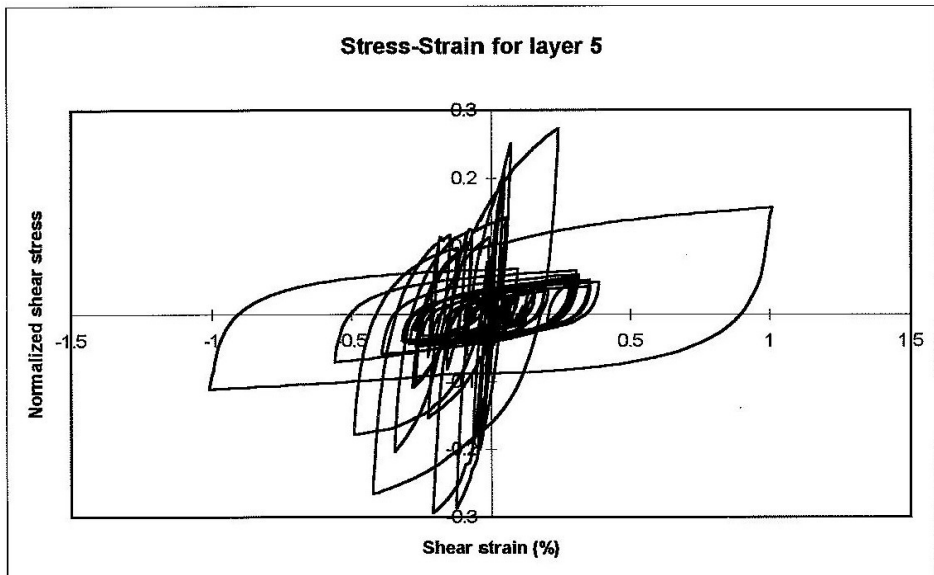
Sl. 12. Spektralne akceleracije površine terena (spektar odziva izračunat iz akceleracija površine terena), akceleracije površine terena sa vremenom, i akceleracije pobude, u_g , zadane na dnu profila tla [17]



Sl. 13. Akceleracije, brzine i pomaci sloja broj 5 [17]



Sl. 14. Posmične relativne deformacije, normalizirana posmična naprezanja i normalizirani prirast pritiska porne vode s vremenom u sloju 5 [17]



Sl. 15. Odnos posmičnih relativnih deformacija i posmičnih naprežanja u sloju 5 [17]

5 KOMENTARI I ZAKLJUČCI

Članak opisuje jednodimenzionalni mehanički vibracijski sustav s više stupnjeva slobode koji se sastoji od masa povezanih u seriju s nelinearnim oprugama i prigušivačima, a koji služi za analizu odziva horizontalno uslojenih terena na potrese. Krutosti opruga degradiraju s brojem ciklusa opterećenja kao što je to slučaj sa krutošću tla, a model također računa prirast i preraspodjelu pornih pritisaka između susjednih slojeva i u tom smislu je pogodan za analizu omekšanja saturiranih pjesaka i njihovu likvefakciju. Model je ugrađen u nekoliko kompjuterskih programa koji imaju podprograme za različite aspekte cikličkog ponašanja tla. U različitim programima se ti podprogrami ponešto razlikuju. Rezultati proračuna su akceleracije, brzine, pomaci, relativne posmične deformacije, posmična naprežanja i porni pritisci sa vremenom u svim slojevima tla. Takvi rezultati opisuju prilično detaljno ponašanje uslojenog terena za vrijeme potresa, što je vrlo atraktivno za građevinsku struku. Međutim, ulaznih podataka koji opisuju cikličke osobine tla ima dosta, dobivaju se iz cikličkih geomehaničkih testova koji nisu rutinski, a rezultati analize su na te podatke dosta osjetljivi. Opisani vibracijski sustav se zato ne upotrebljava u svakodnevnoj praksi već za dublju i detaljniju analizu važnijih problema seizmičkog odziva terena i njegovu potencijalnu likvefakciju.

Literatura

- [1] Kramer, S. L. (1996). "Geotechnical Earthquake Engineering", Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [2] The National Oceanic and Atmospheric Administration (1970), (NOAA slides: Earthquake Series, General Damage.
- [3] Matasovic, N. and Vucetic M. (1993). "Seismic Response of Composite Horizontally-Layered Soil Deposits," UCLA Research Report No. ENG-93-182, Civil Engineering Department, University of California, Los Angeles, CA, March, 452 p.

- [4] Kondner, R.L. and Zelasko, J.S. (1963), "Hyperbolic Stress-strain Formulation for Sand" Proceedings of the 2nd Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, pp. 289-324.
- [5] Masing, G. (1926). "Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing." Proceedings, Second International Congress of Applied Mechanics, 332-335.
- [6] Matasovic, N. and Vucetic, M. (1995). "Seismic Response of Soil Deposits Composed of Fully-Saturated Clay and Sand Layers", Proceedings of the 1st International Conference on Geotechnical Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, Editor: Ishihara, K., Publisher: A.A. Balkema, Rotterdam/Brookfield, Vol. I, pp. 611-616. November.
- [7] Dobry, R., Pierce, W.G., Dyvik, R., Thomas, G.E., and Ladd, R.S. (1985). "Pore Pressure Model for Cyclic Straining of Sand," Research Report No. CE-85, Civil Engineering Depart., Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, June 1985, 56 p.
- [8] Dobry, R., Ladd, R.S., Yokel, F.Y., Chung, R.M., and Powell, D. (1982). "Prediction of Pore Water Pressure Buildup and Liquefaction of Sands During Earthquakes by the Cyclic Strain Method." National Bureau of Standards Building Science Series, No. 138, 150 pp.
- [9] Lee, M.K.W., and Finn, W.D.L. (1978). "DESRA-2, Dynamic effective stress response analysis of soil deposits with energy transmitting boundary including assessment of liquefaction potential", Soil Mechanics Series No. 36, Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 60 p.
- [10] Matasovic, N. and Vucetic, M., (1993). "Cyclic Characterization of Liquefiable Sands," ASCE Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 119, No. 11, pp. 1805- 1822.
- [11] Matasovic, N. and Vucetic, M., (1992). "A Pore Pressure Model for Cyclic Straining of Clay," Soils and Foundations, Vol. 32, No. 3, pp. 156-173.
- [12] Matasovic, N. and Vucetic, M., (1995). "Generalized Cyclic Degradation-Pore Pressure Generation Model for Clays," ASCE Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 121, No. 1, pp. 33-42.
- [13] Idriss, I. M., R. Dobry, and R. D. Singh, 1978, Nonlinear behavior of soft clays during cyclic loading, ASCE J. Geotechnical Eng. Div. 104(GT12):1427-1447, December.
- [14] Vucetic, M. and Dobry, R., (1988). "Degradation of Marine Clays under Cyclic Loading," ASCE Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 114, No. 2, pp. 133-149.
- [15] Vucetic, M. and Dobry, R. (1986). "Pore Pressure Buildup and Liquefaction of Level Sandy Sites During Earthquakes," Report No. CE-86-03, Civil Engineering Department, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Prepared for USGS, 660 p.
- [16] Vucetic, M., Dobry, R., Stokoe, K.H., Ladd, R.S., and Youd, T.L., (1986). "Evaluation of Liquefaction Case History: Heber Road Site, 1979 Imperial Valley Earthquake," Proc. of the 8th European Conference on Earthquake Eng., Lisbon, Portugal, , Publisher: Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, 1986, Vol. 2, Session 5.3, pp. 5.3/57 – 5.3/64.
- [17] Doroudian, M. and Vucetic, M., (1997). "Development of 3-D Geotechnical Database and Its Application to the Evaluation of Nonlinear Site Response and Seismic Zonation", UCLA Research Report, No. ENG-97-186, Civil and Environmental Engineering Department, University of California, Los Angeles – UCLA, CA, 347 pages, September.

Autor:

Mladen Vučetić, University of California, Los Angeles; Civil and Environmental Engineering Department; Los Angeles, CA 90095-1593, USA; tel. (310) 206-6260, e-mail: vucetic@ucla.edu , web stranica: <http://www.cee.ucla.edu/faculty/vucetic/profile>

RAZDOBLJA MEHANIKE I NJEN ODNOS PREMA DRUGIM GRANAMA FIZIKE

Alfirević, I.

Sažetak: Razvoj mehanike podijeljen je u tri razdoblja: Mehanika dio prirodne filozofije, Klasična mehanika s tri formulacije: Newtonova, Lagrangeova i Hamiltonova, Relativistička mehanika te napokon Kvantna mehanika. Pri velikim brzinama usporedivim s brzinom svjetlosti c , klasična mehanika prelazi u relativističku mehaniku, a pri malim dimenzijama reda veličine atoma prelazi u kvantnu mehaniku. Danas se rezultati i relativističke mehanike i kvantne mehanike koriste u tehnici. Primjeri su: laseri, nanomehanika, supravodljivost, GPS uređaji itd.

Ključne riječi: zakoni održanja, relativistička masa, skraćenje duljine, usporevanje vremena, relativnost istovremenosti, geodezijska crta, kvant energije, valovi materije, valna funkcija

1 MEHANIKA DIO PRIRODNE FILOZOFIJE

1.1 Definicija mehanike i prvi počeci

Mehanika je znanost o gibanju i mirovanju i uzrocima gibanja, tj. silama. Osnovni pojmovi mehanike su prostor, vrijeme i masa. Prva praktična saznanja o mehanici bila su poznata već 3000 godina pr. Kr. i ranije. To su kosina, poluga, kotač i drugi. U prvom razdoblju razvoja peripatetička mehanika temelji se na inteligibilnim (samorazumljivim) principima a manje na pokusima.

1.2 Aristotel (384.-322.)

Aristotel je prvi dao cjelovit i konzistentan prikaz prirodne filozofije. Gibanja dijeli na prirodna i prisilna. Tijelo se prisilno giba samo dok na njega djeluje sila. Ne poznaje princip inercije. Čitav kozmos dijeli na zemaljsko ili sublunarno područje i nebesko ili supralunarno područje. U nebeskom području idealna tijela-kugle izvode jednolika gibanja po idealnim putanjama – kružnicama. Stanje gibanja je vječno i nepromjenljivo. Za razliku u zemaljskom nesavršenom području vrijede drugi zakoni. Tijela se raspadaju i ponovno nastaju.

1.3 Arhimed (287.-212.)

Arhimed je najznačajniji matematičar i istraživač na području mehanike u antici. Riješio je problem poluge i hidrostatičke. Razmatrao je stabilnost plivajućih tijela.

1.4 Ostali znanstvenici

Bizantski znanstvenik Ivan Filopon (490.-570.) dopunjuje Aristotelovu mehaniku pojmom *energeia* ili utisnuta sila. Perzijski znanstvenik Ibn Sina (980.1037.) latinskim imenom Avicenna dalje razrađuje pojam utisnute ili preuzete sile koja je na latinskom zapadu prevedena kao *impetus*. Dok Filipon smatra da će bačeno tijelo i u vakuumu postupno gubiti preuzetu silu i napokon se zaustaviti, Ibn Sina smatra da će se tijelo bez otpora, tj. u vakuumu gibati vječno. U srednjem vijeku dalje se razrađuje pojam *impetusa*, srednje brzine, slobodnog pada. Tome su dali doprinos Thomas Bradwardine (1295.-1340.), Jean

Buridan (1300.-1358.), Nicole Oresme (oko 1323.-1382.), Leonardo da Vinci (1452.-1519.) i Domingo De Soto (1494.-1560.).

2 KLASIČNA MEHANIKA

2.1 Galileo Galilei (1564.-1642.) prvi je znanstvenik koji se u mehanici obilato služi eksperimentima i matematikom. Uveo je pojam ubrzanja. Obračunao se s mnogim krivim postavkama peripatetičke, tj. Aristotelove mehanike poput tvrdnje da teža tijela padaju brže od lakših. Riješio je kinematiku slobodnog pada i izveo zakon promjene puta s vremenom. Za bačeno tijelo posebno razmatra vertikalno, a posebno horizontalno gibanje. U današnjem zapisu

$$s = \frac{g}{2} t^2, \quad s = v \cdot t. \quad (1)$$

Na temelju toga zaključuje da se bačeno tijelo giba po paraboli. Izvodi zakon inercije. Tijelo se niz kosinu giba ubrzano, uz kosinu usporeno, a po horizontali jednoliko. Prema tome tijelo će se po horizontali gibati vječno stalnom brzinom. Većina povjesničara znanosti smatra da je Galileo otkrio tzv. *cirkularni princip inercije*, no, ima i onih koji smatraju da je otkrio pravi princip inercije. Galileo je ustanovio da se u zatvorenoj kabini broda koji plovi mirnim morem nikakvim mehaničkim pokusom ne može ustanoviti giba li se brod jednoliko ili miruje. Iz toga slijedi da svi mehanički zakoni imaju isti oblik i jednoliko vrijede u svim *inercijalnim referentnim sustavima* koje ćemo označavati skraćeno s IRS. To je tzv. Galilejev princip relativnosti.

2.2 Isaac Newton (1643.-1728.) u svom je djelu *Principia mathematica philosophiae naturalis* objavio svoja tri zakona gibanja: Zakon inercije, zakon koji povezuje silu, masu i ubrzanje te zakon akcije i reakcije

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2)$$

Ti zakoni vrijede za materijalnu točku ili česticu. Putanja točke, brzina i ubrzanje definirani su izrazom

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (3)$$

Newton uvodi pojam apsolutnog i homogenog vremena te izotropnog i homogenog prostora pri čemu pogrešno (u okvirima klasične mehanike) uvodi pojam apsolutnog prostora. Osim toga, postavio je opći zakon gravitacije

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -F_{21}, \quad (4)$$

te pokazao da se gibanja mogu sastavljati po zakonu paralelograma. No, zakon paralelograma za gibanje upotrebljavao je već Galileo, a za sile Simon Stevin (1548.-1620.). Na temelju osnovnih zakona gibanja izvedeni su pojmovi rada W , kinetičke energije E_k , potencijalne energije E_p , količine gibanja \vec{p} , te momenta količine gibanja \vec{L}

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad E = \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{mv^2}{2}, \quad (5)$$

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}). \quad (6)$$

U izoliranom mehaničkom sustavu, energija količina gibanja i moment količine gibanja ostaju očuvani, tj.

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (7)$$

Njemačka matematičarka Emmy Noether, napisala je 1915. rad *Invariante Variationsprobleme* koji je objavljen tek 1918. U njemu je izveden Noetherov theorem. Prema tom teoremu svaka simetrija ima za posljedicu odgovarajući zakon održanja. Tako je zakon održanja energije matematička posljedica homogenosti vremena, zakon održanja količine gibanja posljedica homogenosti prostora. Zakon održanja momenta količine gibanja jest posljedica izotropnosti prostora. Newtonova mehanika ponekad se naziva i vektorska mehanika jer se u njoj koriste vektorske veličine, \vec{F} , \vec{v} , \vec{a} , \vec{p} , \vec{L} .

2.3 Joseph Louis Lagrange (1736.-1813.) uveo je novu skalarnu formulaciju osnovnih zakona mehanike. Mehanički sustav koji ima m čestica među kojima ima k veza ima $n = 3m - k$ stupnjeva slobode gibanja. Umjesto m vektora položaja $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_m$ uvodi n poopćenih koordinata q_1, q_2, \dots, q_n pomoću izraza

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n), \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n), \quad \dots \\ \vec{r}_m &= \vec{r}_m(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (8)$$

Na temelju toga izvodi jednadžbe gibanja za konzervativni sustav u obliku

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

gdje su E_k kinetičke energija, a E_p potencijalna energija sustava. To su tzv. Lagrangeove jednadžbe druge vrste. Vidimo da n Lagrangeovih jednadžbi zamjenjuje $3m$ Newtonovih jednadžbi gibanja, pri čemu je $n < 3m$. Također su iz jednadžbi gibanja isključene nepoznate reakcije veza. U Lagrangeovoj mehanici uvodi se pojam Lagrangeove funkcije $L = E_k - E_p$. Uporabom te funkcije Lagrangeove jednadžbe prelaze u

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (10)$$

Kad se radi o idealnim i holonomnim vezama, Lagrangeov pristup ima ogromnu prednost pred Newtonovim. Osim toga, mogu se primijeniti i na sustav s električnim, magnetskim pa čak i optičkim pojavama. Poteškoće nastaju kad veze nisu idealne primjerice ako je uključeno trenje.

2.4 William Rowan Hamilton (1805.-1865.)

Dok je Lagrangeova funkcija L jednaka razlici kinetičke i potencijalne energije, Hamiltonova funkcija H jednaka je njihovom zbroju, tj.

$$H = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p. \quad (11)$$

Hamilton uvodi kao nezavisne koordinate poopćenu koordinatu q_j i poopćenu količinu gibanja p_j . Te se koordinate nazivaju *kanonske* i za njih vrijede Hamiltonove ili kanonske jednadžbe. Te jednadžbe glase

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -p_j, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12)$$

Hamiltonove jednadžbe imaju slične prednosti kao i Lagrangeove. Osim toga, one su pogodne za primjenu u kvantnoj mehanici.

2.5 Varijacijski principi mehanike

Prvi varijacijski princip jest princip virtualnih radova koji glasi: *Ako je sustav s obostranim idealnim vezama u ravnoteži, virtualni rad vanjskih sila jednak je nuli, tj.*

$$\delta W = \sum \delta W_i = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (13)$$

Hamiltonov princip najmanje akcije glasi

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (14)$$

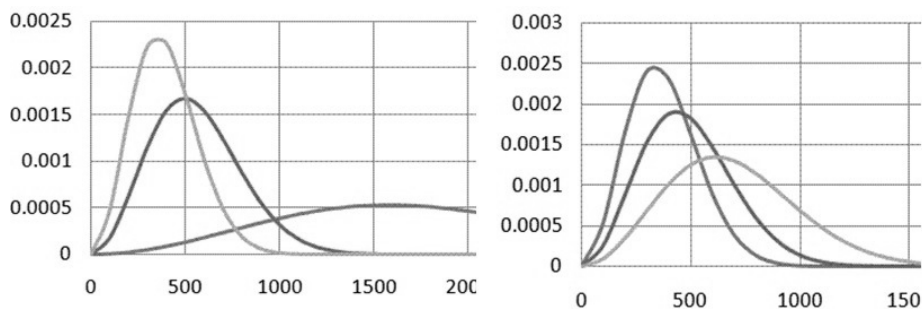
Osim ta dva principa koja se najčešće koriste, formulirano je još nekoliko varijacijskih principa. Ti se principi povezani s već dva spomenuta. Najpoznatiji su D'Alembert-Lagrangeov princip, Gaussov princip najmanje prinude, Hertzov princip putanje najmanje zakrivljenosti, Fermatov princip najkraćeg vremena koji se mahom koristi u optici i drugi.

2.6 Statistička mehanika i kinetička teorija plinova

Prve ideje o kinetičkoj teoriji plinova dali su Daniel Bernoulli 1738. i Mihajlo Lomonosov 1747. Samu teoriju razvili su August Krönig 1856. i nezavisno Rudolf Clausius 1857. J.C. Maxwell je 1860. razvio Maxwellovu distribuciju brzina molekula. Tu je raspodjelu dalje dopunio Ludwig Boltzman 1871. On je također izveo relaciju koja logaritmički povezuje entropiju i vjerojatnost. Glavni rezultati te teorije jest da je temperatura proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula. O toj energiji ovisi i tlak pomnožen s brojem čestica n , tj.

$$T = \frac{m\bar{v}^2}{3k}, \quad p = n \frac{m\bar{v}^2}{3k}, \quad (15)$$

gdje je $k = 1,3806488 \cdot 10^{23} \text{ m}^2\text{kgs}^{-2}\text{K}^{-1}$ Boltzmanova konstanta, \bar{v} prosječna brzina čestice, a n broj čestica.



Sl. 1. Raspodjela brzine molekula. Lijevo za plemenite plinove pri 300K plavo He, crveno Ne, zeleno Ar. Desno raspodjela za O_2 pri raznim temperaturama plavo 300K, crveno 500K, zeleno 1000K

U drugoj polovici 19. stoljeća smatralo se da se sve pojave u mogu objasniti pomoću Newtonovih zakona gibanja. To ne čudi jer su statističkom mehanikom, odnosno kinetičkom teorijom plinova objašnjene mnoge toplinske pojave. Akustika je davno prestala biti posebna grana fizike. Svjetlosni valovi su prihvaćeni kao mehanički valovi u eteru, pa je i optika „svedena“ na mehaniku. Kad je Maxwell izveo svoje jednadžbe elektrodinamike i pokazao da je svjetlost elektromagnetski val počelo se vjerovati da će se i elektrodinamika moći objasniti pomoću mehaničkih zakona. Osim toga smatralo se da je većina zakona fizike otkrivena i da preostaju još neka manja otkrića i poboljšanja.

No, nije bilo sve tako idealno. Problem zračenja crnog tijela nikako se nije mogao riješiti metodama klasične fizike. Eter je morao imati čudna svojstva. S jedne strane nije smio pružati nikakav otpor gibanju planeta. U skladu s tim zamišljen je kao idealna tekućina zanemarive mase. S druge strane, kad je otkriveno da je svjetlost transverzalni val eter, je trebao biti čvrsto tijelo. Zbog velike brzine svjetlosti trebao bi imati veliku krutost. William Thomson, tj. Lord Kelvin (1824.-1907.) u svom je obraćanju 1900. društvu **British Association for the Advancement of Science** izjavio:

The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds. I. The first came into existence with the undulatory theory of light, and was dealt with by Fresnel and Dr Thomas Young; it involved the question, How could the earth move through an elastic solid, such as essentially is the luminiferous ether? II. The second is the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding the partition of energy.

3 RELATIVISTIČKA MEHANIKA

3.1 Specijalna teorija relativnosti

Prema Galilejevu principu relativnosti svi mehanički zakoni podjednako vrijede u svim IRS (inercijskim referentnim sustavima) i imaju istovjetan oblik u svim IRS. To ne vrijedi za zakone elektrodinamike, primjerice za Maxwelllove jednadžbe. Albert Einstein je smatrao da uz prikladnu transformaciju i zakoni elektrodinamike moraju imati istovjetan

oblik u svim IRS. On je 1905. Objavio rad *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*Elektrodinamika gibajućih tijela*) u časopisu **Beiblätter zu den Annalen der Physik**. U tom je radu pošao od dvije logične i jednostavne pretpostavke:

1. Svi zakoni fizike, a ne samo mehanike, imaju istovjetan oblik u svim IRS.
2. Brzina svjetlosti c ima jednaku vrijednost u svim IRS.

Prva pretpostavka širi Galilejev princip relativnosti na cijelu fiziku. Konstanta c javlja se u Maxwellovim jednadžba i u stvari je to brzina širenja elektromagnetskih valova, a time i svjetlosti koja je također elektromagnetski val. Logičnom dedukcijom iz tih pretpostavki slijedi transformacija iz jednog u drugi IRS. Dva IRS se gibaju relativno konstantnom brzinom v_o . Ako se v_o odabere paralelno s x , odnosno \bar{x} izrazi za transformaciju koordinata glasi

$$\bar{x} = \frac{x - v_o t}{\sqrt{1 - (v_o/c)^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \frac{t - xv_o/c^2}{\sqrt{1 - (v_o/c)^2}}. \quad (16)$$

To je tzv. Lorentzova transformacija, koju je predložio nizozemski znanstvenik Hendrik Lorentz 1892. Na temelju dviju osnovnih pretpostavki, odnosno na temelju Lorentzove transformacije slijedi:

Prostorno udaljeni događaji koji su istovremeni za jednog promatrača, neće biti istovremeni za drugog koji se giba nekom brzinom u odnosu na prvog. Jednaki satovi koji se razdvoje i različito gibaju, kad se ponovo sretnu neće pokazivati isto vrijeme. Štap paralelan smjeru gibanja izgledat će kraći od istog takvog koji miruje. Prostor i vrijeme postaju povezani – relativnost vremena je kroz relativnost istovremenosti povezana sa relativnosti prostora. Govorimo o prostor-vremenu kao o četvero-dimenzijском kontinuumu. Fizikalne informacije ne mogu se prostirati brže od brzine svjetlosti c . Masa je oblik energije i može se pretvarati u druge oblike energije.

Skraćenje duljine Štap paralelan s osi \bar{x} , odnosno x , giba se brzinom v_o u odnosu prema S . Ako je njegova duljina u \bar{S} l_o , promatrač u S vidi da je kraća i da ima duljinu l

$$l = l_o \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v_o/c \leq 1. \quad (17)$$

Usporenje vremena Vremenski interval u \bar{S} iznosi $\Delta t_o = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$. Nepomični promatrač u S mjeri vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$, gdje je

$$\Delta t = \gamma \Delta t_o, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1. \quad (18)$$

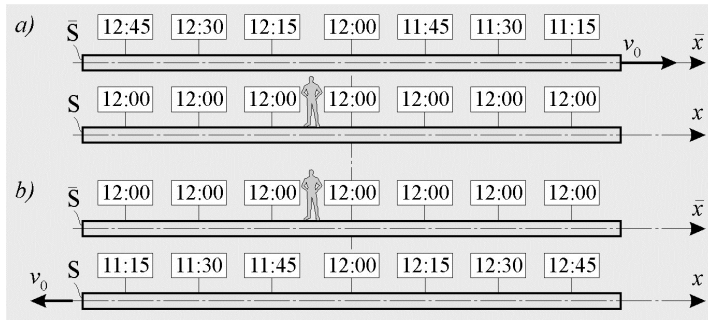
Masa i energija Dva temeljna zakona klasične mehanike zakon održanja mase i zakon održanja energije stopljeni su u jedan *zakon održanja mase-energije*. Ukupna relativistička energija iznosi

$$E = mc^2 = m_o c^2 + E_k, \quad m = \frac{E}{c^2}. \quad (19)$$

Sila i ubrzanje U relativističkoj mehanici sila \mathbf{F} i ubrzanje \mathbf{a} nisu paralelni. Povezani su izrazom

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{\mathbf{v}}{mc^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}), \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + (v/c)^2}}, \quad m_L = \frac{m_0}{[1 - (v/c)^2]^{3/2}}, \quad (20)$$

gdje je m_0 masa mirovanja, m relativistička masa, a m_L uzdužna relativistička masa.



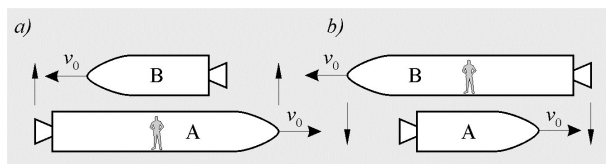
Sl. 2. Relativnost vremena

Joseph C. Hafele i Richard E. Keating proveli su 1971. pokus s četiri cezijeva atomska sata. Po dva su postavili na zrakoplovne letove koji su obletjeli Zemlju jednom prema istoku, a drugi put prema zapadu. Dva su sata mirovala na Zemlji. Za let prema istoku proračunali su zaostajanje od 40ns, a mjerili 59ns. Za let prema zapadu proračunali su 275ns, a izmjerili 273ns. To u okvirima eksperimentalne pogreške potvrđuje dilataciju vremena.

Subatomska čestica mion nastaje kada kozmičke zrake udare u gornje slojeve atmosfere. Vrijeme poluraspada iznosi $2,2\mu\text{s}$. Na površinu Zemlje stigne daleko više nego bi očekivali, jer ih se zbog usporenja vremena raspadne daleko manje.

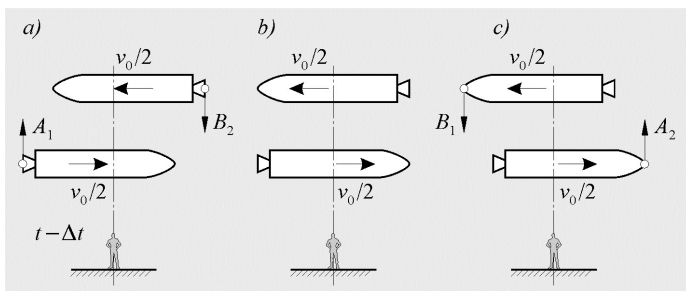
Prividni paradoks.

Relativnost istovremenosti i skraćanja duljine prikazat ćemo pomoću dva jednaka svemirska broda koja lete u suprotnom smjeru relativnom brzinom v_0 . U trenutku kad se sredine brodova podudaraju strijelci na pramcu i krmi brodova pucaju jedni na druge.



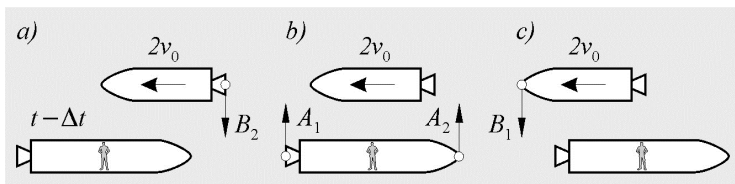
Sl. 3. Prividno paradoksalna situacija

Naoko nastaje paradoks. Promatrač u brodu A vidi da je brod B kraći pa će ga njegovi strijelci promašiti, no strijelci broda B će pogoditi brod A jer je duži. Promatrač u brodu B vidi situaciju upravo obrnuto. Kako razriješiti taj paradoks.



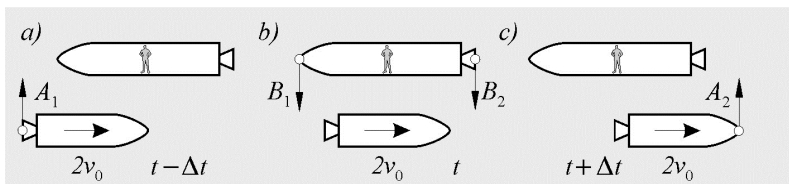
Sl. 4. Situacija kako je vidi nepomični promatrač na Zemlji

Promatrač na zemlji vidi da prvo pucaju strijelci na krmi oba broda. Kad se sredine brodova poklope ne puca nitko. Trenutak nakon toga pucaju strijelci na pramcima. Dakle, brodovi ne pogađaju jedan drugog.



Sl. 5. Situacija kako je vidi promatrač u brodu A

Slika 5 prikazuje situaciju s gledišta promatrača u sredini broda A. Prvo puca strijelac na krmi broda B, zatim istovremeno oba strijelca na brodu A i napokon strijelac na pramcu broda B. Opet su oba broda promašena.



Sl. 6. Promatrač je u brodu B

Slika 6 prikazuje stanje kako ga vidi promatrač u sredini broda B. Prvo puca strijelac na krmi broda A, zatim oba strijelca na brodu B te napokon strijelac na pramcu broda A.

3.2 Opća teorija relativnosti

Zamislamo dvije rakete jednu koja miruje na površini Zemlje i drugu koja se giba ubrzano ubrzanjem $\vec{a} = \vec{g}$ daleko od bilo koje zvijezde ili planeta tako da je gravitacijsko polje zanemarivo. Astronaut zatvoren u tim raketama ne može razlikovati miruje li raketa u gravitacijskom polju ubrzanja \vec{g} ili se giba ubrzanjem $\vec{a} = \vec{g}$. Svi mehanički pokusi u obje rakete odvijat će se na isti način. To je *princip ekvivalencije*.

Prema općoj teoriji relativnosti u gravitacijskom polju prostorno-vremenski kontinuum je zakrivljen. Čestica mase m giba se po inerciji, tj. po geodezijskoj crti kao da na nju ne djeluje sila gravitacije. Jednadžba geodezijske crte glasi

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = 0. \quad (21)$$

Da bi odredio metriku zakrivljenog prostora u gravitacijskom polju Einstein je Riccijev tenzor izjednačio s nulom i tako dobio deset jednadžbi

$$R_{ij} = R_{ji} = \frac{\partial^2 (l_o \sqrt{g})}{\partial y^i \partial y^j} - \frac{\partial}{\partial y^k} (\Gamma_{ij}^k) + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{ij}^k (\log \sqrt{g}) = 0. \quad (22)$$

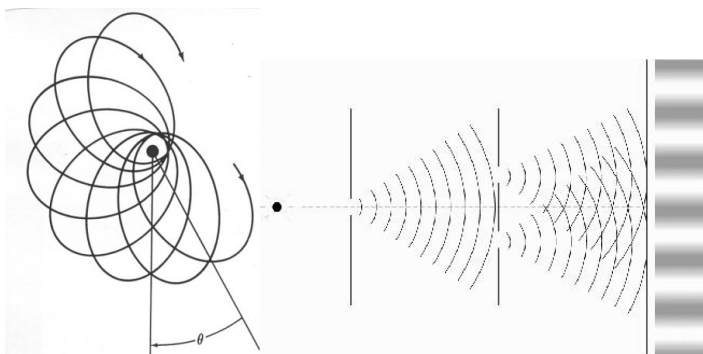
Budući da se radi o četvero-dimenzijskom prostor vremenu, Riccijev tenzor ima 4 dijagonalne i 6 nedijagonalnih komponenata, tj. ukupno 10 različitih komponenata. Taj sustav jednadžbi naziva se *Einsteinove gravitacijske jednadžbe*. Karl Schwarzschild (1873.-1916.) je odmah pronašao rješenje za jednadžbe gravitacijskog polja oko masivne nerotirajuće zvijezde. Ako se središte sfernog koordinatnog sustava postavi u središte Sunca, mogu se iz Schwarzschildova rješenja dobiti jednadžbe gibanja planeta oko Sunca. Te jednadžbe glase

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm_s}{h^2} + 3mu^2, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2}, \quad u = \frac{1}{r}. \quad (23)$$

Uz iste oznake klasična mehanika daje

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2}, \quad u = \frac{1}{r}. \quad (24)$$

Te se jednadžbe razlikuju u dvije pojedinosti. Relativistička jednadžba ima mali dodatni član na desnoj strani $3mu^2 = 3m/r^2$ i u drugoj jednadžbi imamo $d\varphi/ds$ umjesto $d\varphi/dt$. Budući da je brzina svjetlosti ogromna u usporedbi s brzinom planeta, vrijedi $ds \approx dt$. Utjecaj člana $3m/r^2$ to je veći što je manji r . Utječe zapravo samo na putanju Merkura. Time je objašnjeno pomicanje perihela Merkurove putanje koja nije mogla biti objašnjena pomoću jednadžbi klasične mehanike. Urbain Le Verrier (1811.-1877.) još je 1859. prvi uočio da se spora precesija Merkura ne može u cijelosti objasniti klasičnom mehanikom.

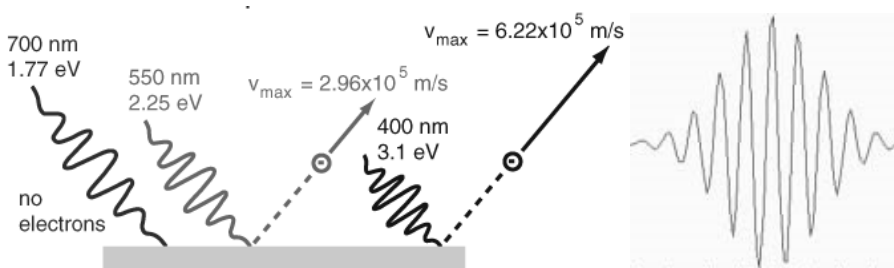


Sl. 7. Lijevo gibanje perihela Merkurove putanje. Desno prolaz svjetlosti kroz dva otvora.

4 KVANTNA MEHANIKA

4.1 Svjetlost, val ili čestica

Isaac Newton objavio je 1704. djelo *Opticks* u kojem zastupa zrnatu ili čestičnu prirodu svjetlosti. Prema toj teoriji svjetlost se širi brže u gušćem sredstvu primjerice u vodi nego u zraku. Thomas Young (1773.-1829.) proveo je 1801. optički pokus s dva raspora i utvrdio da svjetlost interferira i time dokazao njenu valnu prirodu. No, i dalje je bilo zagovornika korpuskularne i valne teorije svjetlosti. Da bi razriješio tu dvojbu, francuski znanstvenik Dominique François Arago (1786.-1853.) predložio je presudni ili krucijalni pokus 1830. Trebalo je jednostavno izmjeriti brzinu svjetlosti u vodi i zraku. Nažalost, tada se mogla mjeriti brzina svjetlosti samo astronomskim metodama. Tek je Armand Fizeau (1819.-1896.) 1849. izmjerio brzinu svjetlosti na Zemlji pomoću nazubljenog kotača. Slijedeće godine su A. H. Fizeau i J. B. Léon Foucault proveli pokus i pokazali da se čestična teorija mora odbaciti.



Sl. 8. Lijevo fotoelektrični učinak. Desno prikaz fotona

Philipp Lenard (1862.-1947.) proveo je 1902. pokus i pokazao da svjetlost ne može biti niti val. Naime, udaljavajući se od izvora svjetla, količina svjetla koja pada na malu površinu ploštine A prema valnoj teoriji opada kontinuirano s kvadratom udaljenosti. Međutim, Lenard je ustanovio da jakost svjetlosti opada do neke minimalne vrijednosti. Nakon toga svjetlost ima tu najmanju jakost ili je uopće nema. Dakle, to upućuje da svjetlost nije valne prirode. Lenard je istraživao i fotoelektrični učinak. Ustanovio je da brzina izbačenih elektrona ovisi o frekvenciji svjetlosti i da ne ovisi o njezinoj jakosti. Povećanjem jakosti svjetla povećava se broj izbačenih elektrona ali ne i njihova brzina kako bi trebalo ako je svjetlost val. S druge strane povećanjem frekvencije povećava se

brzina izbačenih elektrona. To ukazuje da se radi o interakciji čestica. Dvojbu je razriješio A. Einstein 1905. u svojem radu: *Über einen die Erzeugung und Verwaldung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. (O heurističnom pogledu na stvaranje i transformaciju svjetlosti)*. Uveo je pojam kvanta svjetlosti ili fotona, čestice koja se giba brzinom svjetla c i nema masu mirovanja. To je zapravo zgusnuti val koji ima energiju E , relativističku masu m i količinu gibanja p koji su dani izrazom

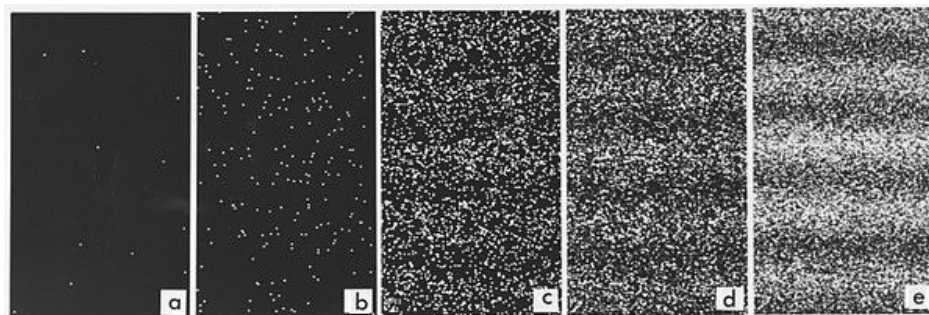
$$E = hv, \quad m = \frac{hv}{c^2}, \quad p = mc = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (25)$$

gdje je h Planckova konstanta, a v frekvencija svjetlosti. Pri tome je $h = 6.62606 \times 10^{-34}$ Js. Tu je vezu već bio uspostavio 1900. Max Planck (1858.-1947.) razmatrajući zračenje crnog tijela. Dakle, možemo zaključiti **svjetlost je i val i čestica, ali ne oboje istovremeno**. Postojanje valnih svojstava materije ograničavaju doseg čestične slike, a postojanje kvanta svjetlosti ograničava doseg valne teorije.

4.2 Louis de Broglie, (1892.-1987.) valovi materije

Louis de Broglie u svojoj je disertaciji 1924. zaključio: ako val može biti čestica, zašto čestica ne bi mogla biti val !? Analogno Einsteinovu fotonu (25) uveo je val čestice valne duljine λ

$$\lambda = h/p, \quad v = E/h. \quad (26)$$



Sl. 9. Interferencija elektrona pri prolazu kroz dva raspora

Na slici 9 prikazan je rezultat prolaza elektrona kroz dvostruki prorez. Taj rezultat nedvosmisleno pokazuje da se elektron u ovom pokusu ponaša kao val. Zaključimo: **Svijet je takav kakav jest čudesan i neshvatljivo raznolik. Svaki val ima svojstva čestice. Svaka čestica ima svojstvo vala. U stvari realnost je istovremeno valna i čestična.**



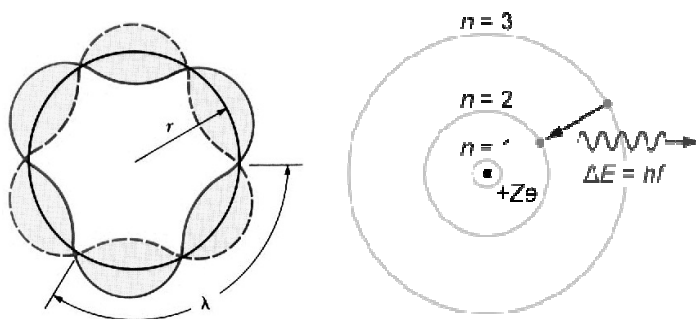
Sl. 10. Difrakcija elektrona

4.3 Heisenbergov princip neodređenosti

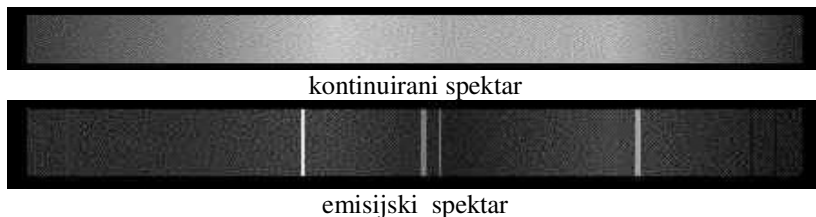
U klasičnoj mehanici su čestica, brzina i putanja osnovni pojmovi. Nasuprot tome u kvantnoj mehanici ne postoji pojam putanje, a u strogom smislu ni čestice. Prema principu neodređenosti nije moguće istovremeno odrediti položaj x i količinu gibanja p . Isto tako nije moguće izmjeriti istovremeno izmjenu energije i trajanje tog procesa. Pri mjerenju uvijek postoji neodređenost Δx i Δp , koji su povezani izrazom

$$\Delta x \cdot \Delta p = h, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h, \quad (27)$$

gdje je ΔE nesigurnost u izmjeni energije u nekom procesu, a Δt nesigurnost u određivanju trajanja tog procesa.



Sl. 11. Lijevo putanja elektrona prikazana stojnim valom. Desno pri kvantnom skoku elektrona atom emitira kvant energije





apsorpcijski spektar

Sl. 12. Bolje spektralne crte

4.4 Schrödingerova jednadžba U klasičnoj mehanici određujemo putanju čestice pomoću diferencijalne jednadžbe koju dobivamo primjenom drugog Newtonova aksioma. Tome odgovara Schrödingerova jednadžba, koju je austrijski znanstvenik Erwin Schrödinger objavio 1926. a jednadžba glasi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad (28)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (29)$$

gdje je \hat{H} Hamiltonov operator, V potencijalna energija, a Ψ valna funkcija. Kvadrat amplitude valne funkcije daje vjerojatnost da se čestica u danom trenutku nalazi na nekom mjestu. Dakle, pojave u kvantnoj mehanici nisu determinističke nego probabilističke. Schrödingerova jednadžba, odgovara drugom Newtonovu zakonu. Ako je poznato stanje valne funkcije u nekom trenutku možemo odrediti valnu funkciju u bilo kojem budućem trenutku. U tom je smislu kvantna mehanika djelomično deterministička.

5 ZAKLJUČAK

Dok je teorija relativnosti vrlo brzo prihvaćena, a uskoro i brojnim pokusima potvrđena, s prihvaćanjem kvantne teorije bilo je više problema. Sam začetnik te teorije M. Planck je sumnjao u njenu ispravnost i pokušavao je reformulirati. Nedostatak determinizma bio je odbojan za Einsteina. Poznata je njegova izreka iz 1926.

Gott würfelt nicht (Bog se ne kocka).

Thus it seems Einstein was doubly wrong when he said, God does not play dice. Not only does God definitely play dice, but He sometimes confuses us by throwing them where they can't be seen.

Stephen Hawking

According to quantum mechanics what we can observe about the world is only a tiny subset of what actually exists.

Sean Carroll

Unfortunately, it is sometimes said that nobody understands quantum theory. This is wrong. In fact, it is worse than wrong: it is indoctrination and disinformation. Indoctrination and disinformation are methods that prevent people from making up their own mind and from enjoying life. In reality, the consequences of quantum of action can be understood and enjoyed by everybody.

Christoph Schiller

Danas se kvantna mehanika vrlo uspješno koristi i opće je prihvaćena među fizičarima.

Literatura:

- [1] Alfirević, I., Mehanika, analitička. Tehnička enciklopedija VIII., L. Z. Miroslav Krleža, Zagreb, 1982.
- [2] Alfirević, I., "Tenzorski račun i tenzorska mehanika", Golden Marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2007.
- [3] Alfirević, I., "Utjecaj Aristotela i peripatetičke filozofije na razvoj mehanike", Zbornik radova 4 Susreta Hrvatskog društva za mehaniku, Slavonski Brod, 2011.
- [4] Blatt, J. F., "Moderna Physics, McGraw-Hill", New York, 1992.
- [5] Frank, P., "Philosofy of Science", Dover Publications, New York, 2004
- [6] Supek I., Furić, M., "Počela fizike", Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- [7] Schiller, C., Motion Mountin, The Adventure of Physics, Volume IV., The Quantum Change, 2012.

Autor:

Ivo Alfirević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-240, e-mail: iafirev@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lnm/staff/

POJEDNOSTAVLJENA METODA CILJANOG UBRZANJA U VIŠEMODALNOJ METODI NAGURAVANJA

Balić, I., Trogrlić, B. i Ćesić, J.

Sažetak: U radu je prikazana pojednostavljena metoda ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja. Ciljano ubrzanje je najmanje ubrzanje baze koje dovodi do graničnog stanja nosivosti konstrukcije, te predstavlja najnižu potresnu otpornost.

Naguravanje sustava provedeno je za linearnu kombinaciju modova. U proračun su uzeti elastični spektri s izračunatim ekvivalentnim prigušenjem sustava. Pojednostavljeni postupak u praktičnoj primjeni metode ciljanog ubrzanja sastoji se u tome što je u format spektralno ubrzanje – pomak, odnosno ADRS format, uvučena samo krivulja nosivosti prvog vektora, dok su analizirani viši vektori prezentirani radijalnim pravcima koji odgovaraju periodu osciliranja pojedinog vektora. Ciljano ubrzanje dobiveno je iterativnim postupkom, pomoću nelinearnog numeričkog modela, na način da se zadovolji princip anvelope.

Određivanje ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja za ocjenu potresne otpornosti sustava prikazano je na primjeru 5-katnog a/b okvirnog sustava. Pokazuje se značajan utjecaj viših modova. Opći slomni vektor koji pripada ciljanom ubrzanju oblikom se značajno razlikuje od oblika opterećenja prvog vektora, ali i od oblika opterećenja s konstantnim ubrzanjem po visini konstrukcije, sadržanim u Europskoj normi EN 1998-1.

Validacija pojednostavljene metode ciljanog ubrzanja provedena je postupkom inkrementalne dinamičke analize. Usporedbom ciljanog ubrzanja višemodalne metode naguravanja i slomnog vršnog ubrzanja podloge, dobivenog dinamičkim odgovorom sustava, pokazuje se njihovo vrlo dobro slaganje.

Ključne riječi: *ciljano ubrzanje, višemodalna metoda naguravanja, ekvivalentno prigušenje, dinamički odgovor*

1 UVOD

Za određivanje potresne otpornosti konstrukcija u posljednja dva desetljeća intenzivnije se razvija i primjenjuje nelinearna statička metoda naguravanja. U kombinaciji sa spektrom odgovora jednostupnjevog sustava metodom se dobiva ocjena kapaciteta nosivosti, te deformacije sustava koji mogu dobro opisati ponašanje konstrukcije usljed djelovanja potresa. Metoda naguravanja sastavni je dio mnogih nacionalnih normi za proračun konstrukcija na djelovanje potresa, pa tako i Europske norme EN 1998-1 [2].

Razvoj nelinearne statičke metode naguravanja počeo je prije tri desetljeća [8,9,18], a u praktičnoj primjeni dominantna je metoda naguravanja zasnovana na raspodjeli ubrzanja prema prvom modu osciliranja i konstantnoj raspodjeli po visini konstrukcije. Razna poboljšanja i primjene nelinearne metode naguravanja poput onog u radovima [5,7,10,14,16] još su aktualna. U posljednje vrijeme sve se više razvija i koristi višemodalna metoda naguravanja [3,12,19], pa je u mnogim radovima, kao što su [1,4,11,13,15], promatran utjecaj viših modova sa zaključkom da je on znan.

U ovom radu, na primjeru 5-katnog a/b okvirnog sustava, prezentirana je pojednostavljena metoda ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja.

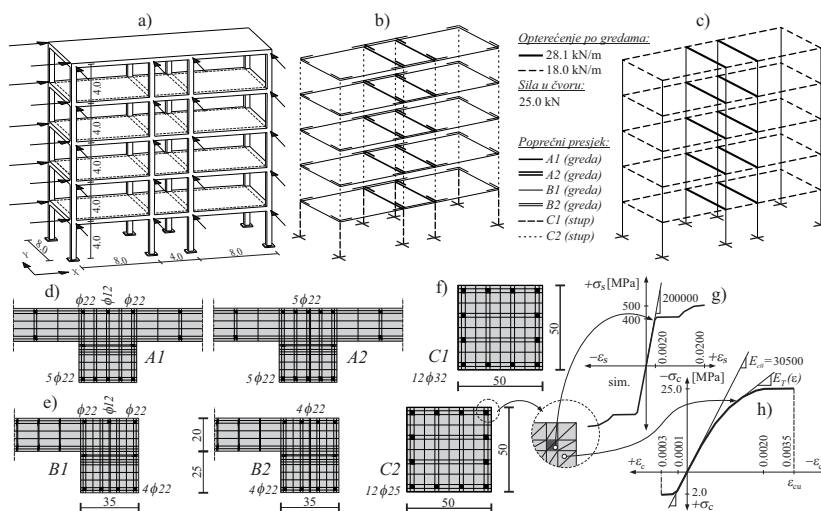
Iterativnim putem za pretpostavljeno ubrzanje tla i odabrane vektore, dobije se ciljano ubrzanje koje predstavlja najmanje ubrzanje baze koje dovodi do graničnog stanja nosivosti konstrukcije, što definira najnižu potresnu otpornost sustava. Validacija pojednostavljene metode ciljanog ubrzanja provedena je postupkom inkrementalne dinamičke analize.

2 OPIS METODE NA PRIMJERU A/B OKVIRNOG SUSTAVA

Pojednostavljena metoda ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja pokazana je na primjeru 5-katnog a/b okvirnog sustava koji je prikazan na Sl. 1.

Za proračun vlastitih vektora zadana je vlastita težina modela, dodatno stalno opterećenje po ploči iznosa 2.0 kN/m^2 i promjenjivo opterećenje po ploči iznosa 2.0 kN/m^2 , te modul materijala $E_{c0}=30.50 \text{ GPa}$, kao ishodišni modul na modelu betona.

Za proračun krivulja nosivosti korišten je numerički model stabilnosti i nosivosti linijskih konstrukcija s uvažavanjem materijalne i geometrijske nelinearnosti [20]. Numerički modeli armaturnog čelika i betona prikazani su na Sl. 1.g i 1.h. Raspodijeljeno opterećenje je zadano po gredama kako je prikazano na Sl. 1.c, a koncentrirane vertikalne sile u iznosu 25.0 kN zadane su u čvorovima na svim križanjima greda i stupova. Ukupna težina modela iznosi $W=8290.0 \text{ kN}$, a ukupna masa modela iznosi $M=845.0 \text{ t}$.



Sl. 1. Primjer: a) prostorni 5-katni okvir; b) oznake poprečnih presjeka; c) opterećenje po gredama; d)-f) diskretizacije poprečnih presjeka; g) model armaturnog čelika; h) model betona

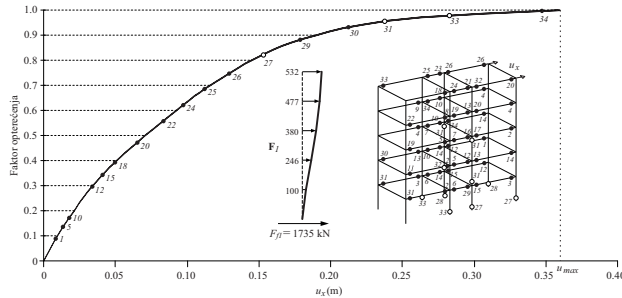
Rješenjem linearne dinamičke zadaće dobiju se vlastiti vektori ϕ_i , te podaci o pripadajućim periodima T_i i sudjelujućim masama $m_{e,i}$. Svojstva vektora opterećenja promatranih pet modova 5-katnog okvira za smjer x prikazana su u Tabl. 1.

Tabl. 1. Svojstva vektora horizontalnog opterećenja 5-katnog a/b okvira za smjer x

Vektor	T_i (s)	$m_{e,i}$ (%)	$m_{e,i}$ (t)	F_{fi} (kN)
ϕ_1	0.839	81.47	688.42	1735
ϕ_2	0.265	10.51	88.81	1823

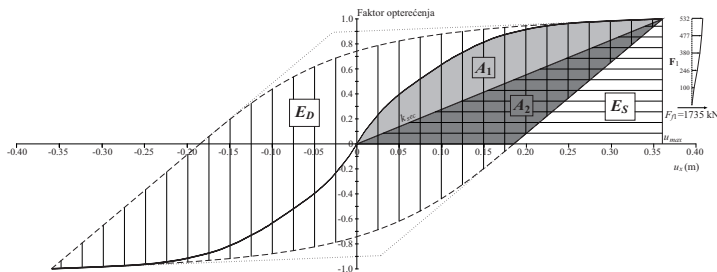
ϕ_3	0.146	4.12	34.81	2786
ϕ_4	0.097	1.98	16.73	1954
ϕ_5	0.076	0.67	5.66	1838

Zasebnim naguravanjem analiziranih vektora dobiju se krivulje nosivosti i ukupne slomne sile pojedinog vektora F_{fi} . Oblik vektora opterećenja odgovara obliku odgovarajućeg moda. Oblik prvog vektora opterećenja u graničnom stanju, pripadna krivulja nosivosti kao i redosljed nastajanja plastifikacijskih zglobova za smjer x prikazani su na Sl. 2.



Sl. 2. Krivulja nosivosti vektora ϕ_l za smjer x i slijed plastifikacije presjeka 5-katnog a/b okvira

Da bi se definirao elastični spektar uz realno prigušenje potrebno je izračunati ekvivalentno viskozno prigušenje sustava koje se određuje na osnovu krivulje nosivosti prvog vektora ϕ_l . Pri tom se zahtijeva da izvršeni rad nelinearnog sustava bude jednak izvršenom radu zamjenjujućeg linearnog sustava sa sekantnom krutošću k_{sec} , a ekvivalentno viskozno prigušenje dobije se izjednačavanjem utrošene energije tijekom jednog ciklusa osciliranja nelinearnog sustava i ekvivalentnog linearnog sustava.



Sl. 3. Određivanje ekvivalentnog viskoznog prigušenja 5-katnog a/b okvira za smjer x

Iz cikličke krivulje nosivosti definirane preko vektora ϕ_l 5-katnog okvira za smjer x dobiveno je ekvivalentno viskozno prigušenje sustava prema izrazu (1),

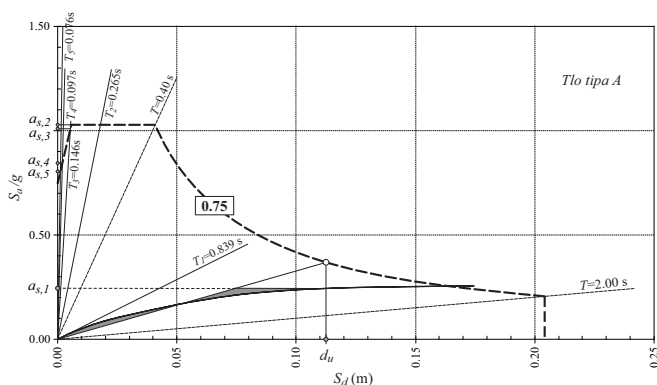
$$\xi = \frac{E_D}{4\pi E_S} = \frac{0.644}{4 \cdot \pi \cdot 0.180} = 0.28, \quad (1)$$

gdje E_D predstavlja energiju utrošenu u jednom ciklusu osciliranja nelinearnog sustava koja je jednaka površini unutar histerezne krivulje, a E_S utrošenu energiju u linearnom sustavu koja je jednaka površini trokuta, vidjeti Sl. 3. Dobiveno je 28% ekvivalentno viskozno prigušenje 5-katnog a/b okvirnog sustava za smjer x .

Nakon određivanja ekvivalentnog viskozno prigušenja ζ ide se u iterativni postupak za dobivanje ciljanog ubrzanja tla $a_{gr,u}$. Potrebno je odabrati polazno ubrzanje tla a_{gr} . Kao takvo može se izabrati ubrzanje koje se dobije na temelju krivulje nosivosti vektora ϕ_I uvažavajući 2/3 iskoristivosti pomaka d_u prema [2].

Promatran je elastični spektar tipa 1 za tlo tipa A. Spektar je definiran za izračunato 28% ekvivalentno prigušenje 5-katnog okvira u x smjeru. Na takav način dobiveno je polazno ubrzanje tla a_{gr} iznosa 0.75g, odnosno elastični spektar za to ubrzanje.

Na Sl. 4. izložen je prvi korak u iterativnom postupku određivanja ciljanog ubrzanja, odnosno prikazano je određivanje spektralnog ubrzanja $a_{s,i}$ promatranih pet modova 5-katnog okvira u x smjeru, za polazno ubrzanje tla $a_{gr}=0.75g$. Na temelju krivulje nosivosti vektora ϕ_I određuje se spektralno ubrzanje $a_{s,1}$ uzimajući u obzir 3/3 iskoristivosti pomaka d_u na krivulji nosivosti. Spektralno ubrzanje viših vektora (ϕ_2 do ϕ_5) dobije se iz sjecišta pravaca perioda osciliranja T_i pojedinog vektora s konkretnim elastičnim spektrom. Time su određena i spektralna opterećenja F_i analiziranih vektora.



Sl. 4. Određivanje spektralnog ubrzanja $a_{s,i}$ analiziranih vektora uz elastični spektar s izračunatim 28% prigušenjem na primjeru 5-katnog a/b okvira za smjer x

Opći slomni vektor opterećenja formira se prema linearnoj (L) kombinaciji modova. Polazno granično opterećenje $F_L = \sum F_i$, za linearnu kombinaciju modova ovisi o odabranom polaznom ubrzanju tla a_{gr} , a može se prikazati u sljedećem obliku

$$F_L = \sum F_i = \sum_{i=1}^n \pm m_{e,i} a_{s,i}(a_{gr}) F_{fi} / |F_{fi}|, \quad (2)$$

gdje izraz F_{fi} predstavlja slomnu silu za pojedini vlastiti vektor.

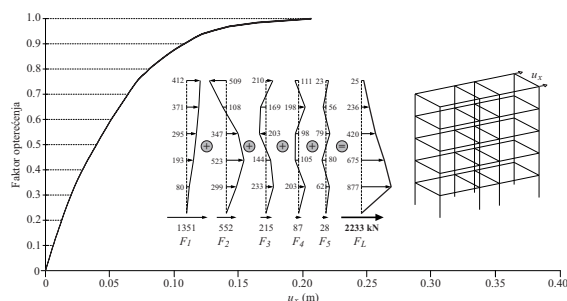
Za ovako formirano opterećenje, pomoću nelinearne analize metodom naguravanja, određen je kapacitet nosivosti odnosno računsko granično opterećenje F_f . Postavljeni zadatak se smatra riješenim kada je u granicama zadane točnosti postignuta jednakost opterećenja iz općeg slomnog vektora F_L i računskog graničnog opterećenja F_f za pretpostavljeno ubrzanje tla a_{gr} .

U Tabl. 2. pokazan je iterativni tok metode s rezultatom ciljanog ubrzanja linearne kombinacije modova 5-katnog a/b okvira za smjer x . Dobivena najniža potresna otpornost sustava, odnosno ciljano ubrzanje tla iznosi $a_{gr,u} = 0.46g$, a njemu pripadna sila u presjeku pri bazi proračunskog modela iznosi $F_L = 2233$ kN.

Tabl. 2. Ciljano ubrzanje pri linearnoj kombinaciji modova 5-katnog a/b okvira za smjer x

a_{gr}	$a_{s,1}$	F_1	$a_{s,2}$	F_2	$a_{s,3}$	F_3	$a_{s,4}$	F_4	$a_{s,5}$	F_5	$F_L = \sum F_i$	F_j	F_j/F_L
0.75	0.244	1648	1.032	899	1.009	345	0.845	139	0.804	45	3075	2275	0.74
0.55	0.219	1479	0.757	660	0.742	253	0.621	102	0.592	33	2527	2223	0.88
0.48	0.201	1357	0.660	575	0.647	221	0.541	89	0.516	29	2271	2215	0.97
0.46	0.200	1351	0.633	552	0.631	215	0.527	87	0.500	28	2233	2233	1.00

Na Sl. 5. prikazani su vektori opterećenja svih sudjelujućih modova F_i , opći slomni vektor F_L i krivulja nosivosti za linearnu kombinaciju modova 5-katnog a/b okvira za smjer x , dobiveni postupkom pojednostavljene metode ciljanog ubrzanja.

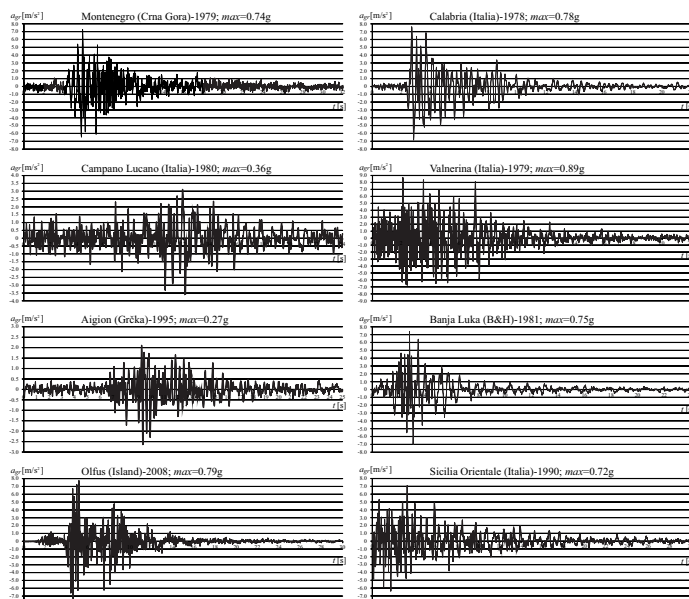


Sl. 5. Krivulja nosivosti za linearnu kombinaciju modova 5-katnog a/b okvira za smjer x

3 VALIDACIJA POJEDNOSTAVLJENE METODE CILJANOG UBRZANJA

Validacija pojednostavljene metode ciljanog ubrzanja provedena je postupkom inkrementalne dinamičke analize. Za dinamičku pobudu sustava korišteni su zapisi akcelelograma realnih potresa koji su birani na način da kategorija tla na kojoj je potres zabilježen odgovara kategoriji tla projektirane građevine. Zapisi akcelelograma preuzeti su iz baze podataka *European Strong-motion Database* [6], a odabrani potresi prikazani su na Sl. 6.

Okvir sa Sl. 1. opterećen je zapisima akcelelograma osam realnih potresa u čvorovima baze. Promatra se potresna otpornost 5-katnog a/b okvira u x smjeru za svaku potresnu pobudu zasebno. Dinamički odgovor sustava dobiven je programskim paketom *SeismoStruct* [17]. Proveden je postupak inkrementalne dinamičke analize, odnosno amplitude realnih potresa inkrementalno su povećavane dok se nije došlo do slomnog vršnog ubrzanja tla $a_{gr,d}$ za pojedini zapis potresa.



Sl. 6. Akcelelogrami osam stvarnih potresa [6]

Rezultati dinamičkog odgovora 5-katnog a/b okvirnog sustava za smjer x dani su u Tabl. 3. Prikazano je slomno vršno ubrzanje tla $a_{gr,d}$, ukupna slomna poprečna sila na bazu modela $F_{d,x}$ i maksimalni pomak vrha okvira $d_{d,x}$, i to za svaku potresnu pobudu.

Tabl. 3. Dinamički odgovor 5-katnog a/b okvira za smjer x

Potres	$a_{gr,d}$	$F_{d,x}$ (kN)	$d_{d,x}$ (m)
1. Montenegro	0.41g	1808	0.15
2. Campano Lucano	0.29g	1524	0.18
3. Aigion	0.41g	1527	0.18
4. Olfus	0.43g	1935	0.19
5. Calabria	0.62g	2084	0.09
* Valnerina	0.67g	2302	0.17
6. Banja Luka	0.48g	1854	0.19
7. Sicilia Orientale	0.57g	2015	0.13
Prosjeck od 7 potresa:	0.46g	1821 kN	0.16 m

Između dobivenih rezultata odbačena je najveća vrijednost slomnog vršnog ubrzanja tla koja najviše odstupa od prosjeka. Kao mjerodavno slomno vršno ubrzanje uzet je prosjeck dobivenih rezultata dinamičkog odgovora za seriju od preostalih sedam zapisa potresa.

Konkretno, na primjeru 5-katnog okvirnog sustava odbačena je najveća vrijednost slomnog vršnog ubrzanja tla za potres Valnerina, iznosa 0.67g, te uzimajući u obzir prosjeck dobivenih slomnih vršnih ubrzanja preostalih sedam zapisa potresa, dobiva se potresna otpornost promatranog okvira u x smjeru iznosa 0.46g. Prosjeck ukupna slomna poprečna sila na bazu modela iznosi 1821 kN, a prosjeck maksimalni pomak vrha 5-katnog okvira u x smjeru iznosi 0.16 m.

Usporedbom rezultata primjećuje se izvrsno slaganje slomnog vršnog ubrzanja podloge $a_{gr,d} = 0.46g$, dobivenog dinamičkim odgovorom sustava, s ciljanim ubrzanjem tla $a_{gr,u} = 40$

0.46g koje je dobiveno pojednostavljenom metodom ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja za linearnu kombinaciju modova i uz elastični spektar s izračunatim realnim 28% prigušenjem. Na taj način pokazuje se da ekvivalentno viskozno prigušenje, izračunato prema formulaciji prikazanoj u radu, opisuje realan stupanj prigušenja konstrukcije te je znatno veće od sugeriranog u literaturi.

4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazana pojednostavljena metoda ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja. Ciljano ubrzanje predstavlja najnižu potresnu otpornost, a dobiva se iterativnim postupkom na način da se zadovolji princip anvelope.

Prikazana je formulacija i postupak određivanja ekvivalentnog viskoznog prigušenja sustava, pri čemu se zahtijeva da izvršeni rad nelinearnog sustava bude jednak izvršenom radu zamjenjujućeg linearnog sustava sa sekantnom krutošću, a ekvivalentno prigušenje dobiva se izjednačavanjem utrošene energije tijekom jednog ciklusa osciliranja nelinearnog sustava i ekvivalentnog linearnog sustava.

Validacija pojednostavljene metode ciljanog ubrzanja provedena je postupkom inkrementalne dinamičke analize.

Na osnovu dobivenih rezultata na primjeru a/b okvirnog sustava može se zaključiti:

- Utjecaj viših modova osciliranja, posebno drugog i trećeg moda, je veoma značajan.
- Opći slomni vektor koji pripada ciljanom ubrzanju oblikom se značajno razlikuje od oblika opterećenja prvog vektora, ali i od oblika opterećenja s konstantnim ubrzanjem po visini konstrukcije, sadržanim u Europskoj normi EN 1998-1.
- Usporedbom ciljanog ubrzanja višemodalne metode naguravanja i slomnog vršnog ubrzanja podloge, dobivenog dinamičkim odgovorom sustava, pokazuje se njihovo vrlo dobro slaganje.
- Ekvivalentno viskozno prigušenje, izračunato prema formulaciji prikazanoj u radu, je realno i znatno veće nego što se sugerira u literaturi.
- U konačnici, pojednostavljena metoda ciljanog ubrzanja u višemodalnoj metodi naguravanja pokazuje se veoma dobrom za ocjenu potresne otpornosti konstrukcija.

Literatura:

- [1] Balić, I., Mihanović, A., Trogrlić, B., "Ciljano ubrzanje u višemodalnoj metodi naguravanja A/B okvira", Građevinar, Vol.65, No.4., 2013, str. 305-318.
- [2] CEN. "Eurocode 8: Design of Structures for earthquake resistance – Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings", European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2004.
- [3] Chopra, A.K., Goel, R.K., "A modal pushover analysis procedures for estimating seismic demands for buildings", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol.31, No.3., 2002, str. 561–582.
- [4] Chopra, A.K., Goel, R.K., Chintanapakdee, C., "Evaluation of a modified MPA procedure assuming higher modes as elastic to estimate seismic demands", Earthquake Spectra, Vol.20, No.3., 2004, str. 757-778.
- [5] Čaušević, M., Zehentner, E., "Nelinearna seizmička analiza konstrukcija prema europskoj normi EN 1998-1:2004", Građevinar, Vol.59, No.9., 2007, str. 767-778.
- [6] European Strong-Motion Database. <http://www.isesd.hi.is/ESD_Local/frameset.htm>. 02.04.2013.
- [7] Fajfar, P., "A Nonlinear analysis method for performance based seismic design", Earthquake Spectra, Vol.16, No.3., 2000, str. 573-592.

- [8] Fajfar, P., Fischinger, M., "Non-linear seismic analysis of RC buildings: Implications of a case study", *European Earthquake Engineering*, Vol.1, 1987, str. 31-43.
- [9] Fajfar, P., Fischinger, M., "N2 – a method for non-linear seismic analysis of regular buildings", *Proceedings of 9th World Conference on Earthquake Engineering*. Tokyo, 1988, Vol.5, str. 111-116.
- [10] Fajfar, P., Gašperšič, P., "The N2 method for the seismic damage analysis for RC buildings", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol.25, 1996, str. 23–67.
- [11] Goel, R.K., Chopra, A.K., "Role of Higher-Mode Pushover Analyses in Seismic Analysis of Buildings", *Earthquake Spectra*, Vol.21, No.4., 2005, str. 1027-1041.
- [12] Kalkan, E., Kunnath, S.K., "Method of modal combinations for pushover analysis of buildings", *13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada, 2004, Paper No. 2713, str. 1–15.
- [13] Kalkan, E., Kunnath, S.K., "Assessment of current nonlinear static procedures for seismic evaluation of buildings", *Engineering Structures*, Vol.29, 2007, str. 305–316.
- [14] Lagaros, N.D., Fragiadakis, M., "Evaluation of ASCE-41, ATC-40 and N2 static pushover methods based on optimally designed buildings", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.31, 2011, str. 77–90.
- [15] Maniatakis, C.A., Psycharis, I.N., Spyrakos, C.C., "Effect of higher modes on the seismic response and design of moment-resisting RC frame structures", *Engineering Structures*, Vol.56, 2013, str. 417-430.
- [16] Mitrović, S., Čaušević, M., "Nelinearni statički seizmički proračun konstrukcija", *Građevinar*, Vol.61, No.6., 2009, str. 521-531.
- [17] Pinho R, SeismoStruct – A computer program for static and dynamic nonlinear analysis of framed structures. <<http://www.seismosoft.com>>. 02.04.2013.
- [18] Saiidi, M., Sozen, M.A., "Simple nonlinear seismic analysis of R/C structures", *Journal of the Structural Division*, Vol.107, No.5., 1981, str. 937-953.
- [19] Sasaki, K.K., Freeman, S.A., Paret, T.F., "Multi-mode pushover procedure (MMP) - a method to identify the effects of higher modes in a pushover analysis", *Proceedings of 6th U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Seattle, USA, 1998, str. 1-12.
- [20] Trogrlić, B., "Nelinearni numerički model stabilnosti i nosivosti prostornih armirano betonskih linijskih konstrukcija", doktorska disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Splitu, 2003.

Autori:

Ivan Balić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-378, e-mail: ivan.balic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Boris Trogrlić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-352, e-mail: boris.trogrlic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Česić Jakov, Student /Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Diplomski sveučilišni studij građevinarstva, Smjer Modeliranje konstrukcija/, Vukovarska 160, Split, tel. 021/473-768, e-mail: jakov.cesic@gradst.hr

NUMERIČKO MODELIRANJE BETONA U SLUČAJU DINAMIČKOG OPTEREĆENJA

Bede, N. i Ožbolt, J.

Sažetak: Ponašanje betonskih konstrukcija uvelike ovisi o brzini opterećenja. Betonske konstrukcije izložene dinamičkom opterećenju (udarno opterećenje) ponašaju se različito od istih izloženih statičkom opterećenju. U ovom radu se numerički istražuje ponašanje proste betonske grede sa zarezom izložene statičkom i dinamičkom opterećenju. Geometrija, materijalna svojstva i opterećenje su preuzeti iz literature. Valjanost modela je provjerena usporedbom dobivenih numeričkih rezultata s eksperimentalnim rezultatima danim u literaturi. Razmatrane brzine opterećenja su reda veličine 10^{-4} do 10^4 mm/s gdje dolazi i do pojave geometrijskih nelinearnosti. Različite brzine opterećenja uzrokuju različite oblike sloma i oštećenja betonske grede. Ta razlika je posljedica utjecaja brzine opterećenja kao i inercijalnih sila. Povećanjem brzine opterećenja oblik sloma se mijenja od moda-I do kombiniranog sloma. Prikazani numerički model daje jasan uvid u razliku između stvarne i prividne vlačne čvrstoće i energije loma betona koja nastaje kao posljedica utjecaja inercijalnih sila. Na temelju tog zaključuje se da je za određivanje materijalnih svojstava betona, kao što su vlačna čvrstoća i energija loma, eliminacija inercijalne komponente neophodna.

Ključne riječi: *dinamičko opterećenje, beton, energija loma, vlačna čvrstoća*

1 UVOD

Poznato je da ponašanje betonskih konstrukcija uvelike ovisi o brzini opterećenja. Eksperimentima je dokazano da su tlačna a posebice vlačna čvrstoća betona izuzetno osjetljive na brzinu opterećenja [2,3]. Kako bi ispitali utjecaj dinamičkog opterećenja na energiju loma betona Zhang i sur. [7] proveli su eksperimente na betonskoj gredi sa zarezom. Eksperimenti pokazuju da energija loma progresivno raste s brzinom opterećenja nakon dostizanja kritične brzine opterećenja. Slična opažanja su navedena i za reakcije. Cilj ovog rada je razjasniti pravi razlog naglog porasta energije loma i nosivosti betona (materijalna svojstva).

Numerički proračuni bitni su jer daju bolji uvid u stvarno ponašanje mehaničkih osobina betona izloženog statičkom i dinamičkom opterećenju. Stoga, eksperimenti izvedeni u [7] su numerički modelirani. Kako bi se numerički rezultati verificirali prvo su uspoređeni s dostupnim eksperimentalnim podacima [7]. Nakon potvrde točnosti numeričkih rezultata, energija loma je izračunata kako su predložili Zhang i sur., odnosno iz dijagrama reakcija-pomak. Međutim, taj postupak izračuna prihvatljiv je i točan samo za slučaj statičkog opterećenja. Potrebno je utvrditi da li je taj postupak točan i za slučaj dinamičkog opterećenja gdje je dominantan utjecaj inercijalnih sila. Nadalje, kako bi bolje shvatili utjecaj strukturalnih efekata na energiju loma betona, energija loma je određena iz dijagrama naprezanje-deformacija za jedan konačni element. Eksperimentalni podaci i numerički rezultati su pojašnjeni u detalje kako bi se utvrdila točna metoda određivanja energije loma za slučaj dinamičkog opterećenja. Sličan postupak je proveden i za vlačnu čvrstoću betona.

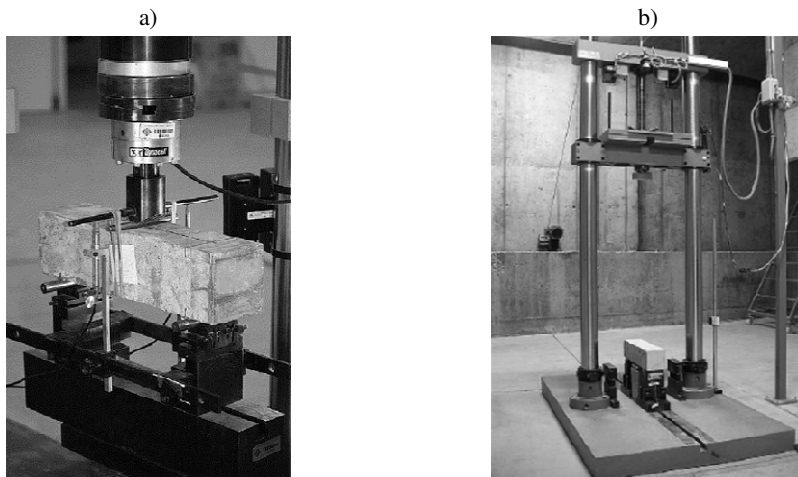
2 KONSTITUTIVNI ZAKON - MIKRORAVNINSKI MODEL BETONA

Kao konstitutivni zakon ponašanja betona korišten je tzv. mikroravninski model betona čija osnovna ideja je praćenje jednoosnih deformacija odnosno naprezanja u unaprijed definiranim smjerovima. Svaki takav smjer definira jednu mikroravninu. S fizikalnog motrišta mikroravnine predstavljaju smjerove mogućih oštećenja ili osjetljiva mjesta u strukturi betona. Osnovna prednost mikroravninskog modela je njegova jednostavnost i općenitost. Izborom relativno jednostavnih jednoosnih konstitutivnih zakona za komponente deformacija i naprezanja na mikroravninama moguće je dobiti makroskopski konstitutivni zakon za bilo koji elastični ili neelastični materijal. Više detalja vezano uz mikroravninski model betona može se naći u [4]. Ovdje korišteni konstitutivni zakon ovisi o brzini deformiranja [5,6].

3 NUMERIČKA ANALIZA PROSTE BETONSKE GREDE SA ZAREZOM

3.1 Geometrija i materijalna svojstva – eksperimentalni podaci

Eksperimentalni podaci su preuzeti iz [7]. Na Sl. 1 prikazan je eksperimentalni *setup* i geometrija ispitivanog uzorka grede dimenzija 100 x 100 x 400 mm (visina x širina x duljina). Ispitivanja su provedena za brzine raspona 10^{-4} do 10^3 mm/s. Za male brzine opterećenja (5.50×10^{-4} i 1.74×10^1 mm/s) ispitivanje grede se izvodi kontrolom pomaka na gredi (Sl. 1a). Dinamičko opterećenje postiže se udarom čekića mase 120.6 kg na sredinu raspona grede (Sl. 1b). Visine od 40, 160 i 360 mm s kojih se pušta čekić daju redom brzine od 8.81×10^2 , 1.76×10^3 i 2.64×10^3 mm/s. Mehanička svojstva betona visoke čvrstoće korištena u eksperimentu navedena su u Tabl. 1.



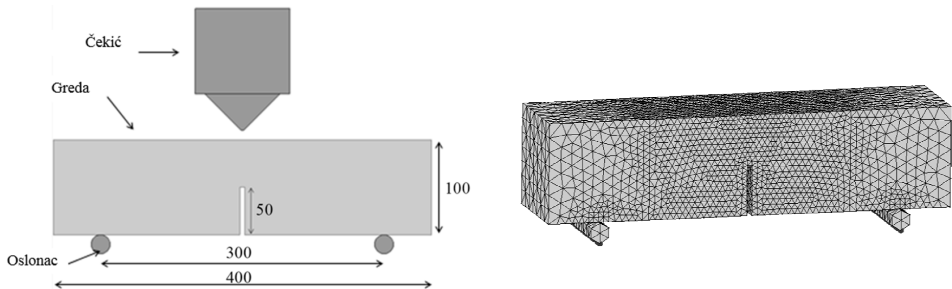
Sl. 1. a) Uređaj za statičko ispitivanje grede na savijanje kontrolom pomaka na gredi i b) uređaj za dinamičko ispitivanje [7]

Tabl. 1. Mehanička svojstva betona visoke čvrstoće [7]

Youngov modul, E_c (GPa)	43.3
Poissonov koeficijent (pretpostavljena vrijednost), ν_c	0.18
Gustoća, ρ_c (kg/m ³)	2400
Vlačna čvrstoća, f_t (MPa)	6.3
Tlačna čvrstoća, f_c (MPa)	127.0
Energija loma, G_F (N/m)	148

3.2 Numerički model

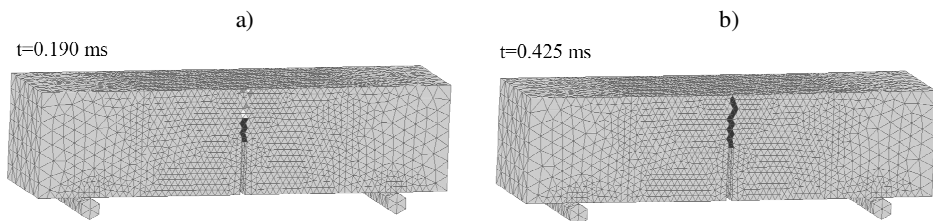
Geometrija numeričkog modela (grede, čekića i cilindričnih oslonca) te diskretizacija betonske grede prikazani su na Sl. 2. Koriste se 3D trokutni konačni elementi (Sl. 2). Numerička analiza je provedena za kvazi-statički proračun (odgovara brzini od 5.50×10^{-4} mm/s [7]) te za slijedeće brzine: 1.74×10^1 , 8.81×10^2 , 1.76×10^3 i 2.64×10^3 mm/s. Karakteristike betona korištene u numeričkoj analizi navedene su u Tabl. 1. Pretpostavljeno je da su čekić i cilindrični oslonci linearno elastični. Svojstva čelika korištenog u numeričkoj analizi su: Youngov modul $E=200$ GPa, Poissonov koeficijent $\nu_s=0.33$ i gustoća $\rho_s=7800$ kg/m³. Numerička analiza betonske grede provedena je korištenjem programa za konačne elemente baziranog na metodi razmazanih pukotina. Kako bi se osigurala objektivnost rezultata obzirom na izbor veličine konačnih elemenata korištena je metoda pukotinskih traka [1].



Sl. 2. Geometrija (u mm) i mreža konačnih elemenata numeričkog modela

3.3 Utjecaj brzine udara na mod sloma

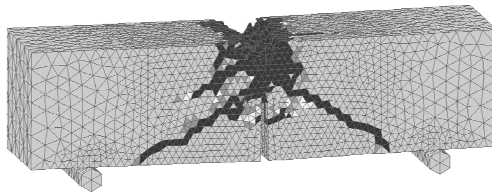
Za sve analizirane brzine, uključujući i kvazi-statičku, tip sloma je mod sloma-I kao i u eksperimentima [7]. Na Sl. 3 prikazan je razvoj pukotine (maksimalne glavne vlačne deformacije) u vremenu za najveću brzinu udara (2.64×10^3 mm/s).



Sl. 3. Mod sloma za brzinu udara 2.64×10^3 mm/s kao funkcija vremena a) i b)

Pukotina se prvo inicira iznad zarez a i zatim se ravno širi prema površini grede (Sl. 3). Važno je napomenuti da povećanjem brzine udara dolazi do promjene moda sloma. Radi

ilustracije, proveden je numerički proračun za brzinu od 50 m/s (Sl. 4) pri čemu se način sloma promijenio iz moda-I u mješoviti. U ovom radu ograničit ćemo se samo na brzine koje uzrokuju mod sloma-I.

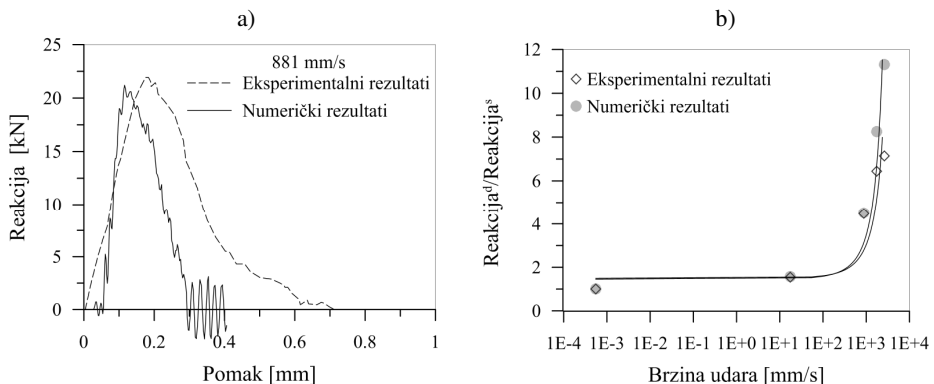


Sl. 4. Mod sloma za brzinu udara od 50 m/s

3.4 Utjecaj brzine udara na energiju loma i vlačnu čvrstoću

Poznato je da energija loma i vlačna čvrstoća betona uvelike ovise o brzini opterećenja (deformacije) ali ne i kako. Eksperimenti pokazuju da rastu s porastom brzine deformacije te da je nakon deformacije reda veličine približno 10/s rast progresivan. Nedavno je dokazano da je progresivni porast posljedica utjecaja inercije te da stvarne vrijednosti vlačne čvrstoće i energije loma betona rastu linearno (semi-log skala) s porastom brzine deformacije [5,6].

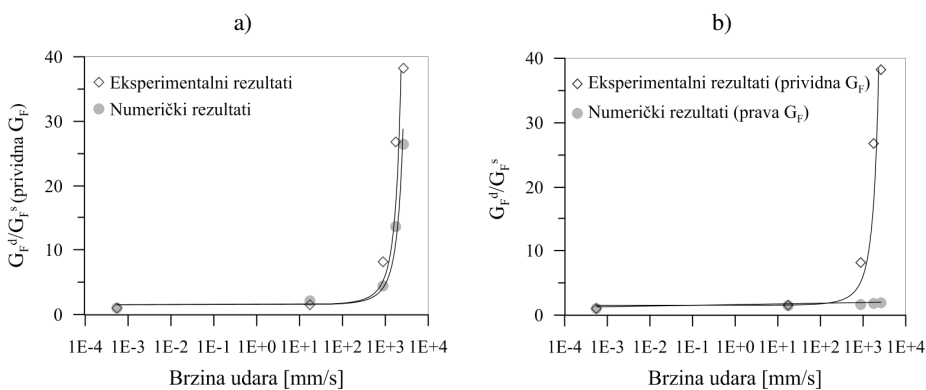
Valjanost numeričkog modela provjerena je usporedbom tipičnog dijagrama reakcija-pomak mjenjenog na sredini raspona grede (Sl. 5a). Na Sl. 5b uspoređene su vrijednosti eksperimentalnih i numeričkih rezultata reakcije dane kao omjer dinamičke i kvazi-statičke vrijednosti u ovisnosti o brzini udara. Usporedbom rezultata opaža se relativno dobro podudaranje, odnosno reakcija u oba slučaja raste eksponencijalno s porastom brzine sa znatnijim odstupanjem za brzine veće od 10^3 mm/s.



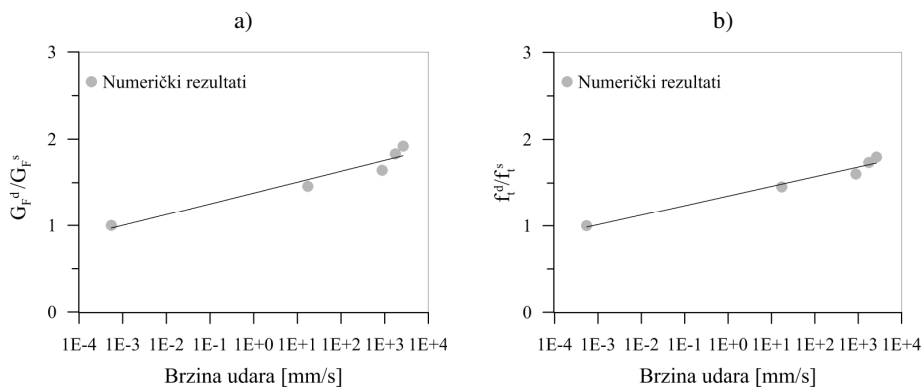
Sl. 5. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata a) tipični dijagram reakcija-pomak i b) omjer dinamičke i statičke vrijednosti reakcije u ovisnosti o brzini udara

U svrhu verifikacije numeričkih rezultata, energija loma je prvo određena kako je predloženo u [7], odnosno površina ispod krivulje reakcija-pomak je podijeljena s površinom poprečnog presjeka u kojem je nastala pukotina. Omjer dinamičke i kvazi-statičke vrijednosti prividne energije loma (G_F^d/G_F^s) u ovisnosti o brzini udara prikazan je na Sl. 6a. Koristeći isti način proračuna energije loma kao u [7] uočava se da numerički model dobro opisuje vrijednosti koje su dobivene u eksperimentu te da određivanjem energije loma iz dijagrama reakcija-pomak ona pokazuje progresivni porast s povećanjem

brzine. Nedostatak ovog načina je nemogućnost eliminacije inercijalnih sila što rezultira znatnim precjenjivanjem vrijednosti energije loma za područje velikih brzina udara. Da bi se detaljnije razjasnio utjecaj inercijalnih sila na energiju loma ista je izračunata iz dijagrama naprezanje-deformacija u konačnom elementu iznad zareza u području nastanka pukotine. Rezultati analize za konačni element te usporedba s rezultatima koji su dobiveni eksperimentalno prikazani su na Sl. 6b. Za brzine reda veličine 10^2 mm/s numerički i eksperimentalni podaci su relativno slični a kada brzina udara postane veća od 10^2 mm/s uočava se značajnija razlika. Detaljniji prikaz numeričkih rezultata dan je na Sl. 7a. Za područje raspona brzine od 10^{-4} mm do 10^3 mm/s uočavamo linearni porast energije loma s porastom brzine udara. Ovaj dijagram proizlazi iz konstitutivnog zakona i predstavlja stvarnu energiju loma ovisnu o brzini opterećenja bez utjecaja inercijalnih sila.



Sl. 6. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za a) prividnu energiju loma i b) pravu i prividnu energiju loma za različite brzine udara



Sl. 7. a) Energija loma u ovisnosti o brzini udara i b) tlačna čvrstoća u ovisnosti o brzini udara

Na Sl. 7b prikazan je utjecaj brzine udara na vlačnu čvrstoću betona mjerenu u tipičnom konačnom elementu (f_t^d/f_t^s je omjer dinamičke i statičke čvrstoće). Kao i energija loma, u semi-log mjerilu vlačna čvrstoća se mijenja linearno s porastom brzine udara. Ako bi vlačnu čvrstoću računali iz dijagrama reakcija-pomak, slijedeći isti princip kao i kod izračuna energije loma, očito je da bi čvrstoća s porastom brzine udara rasla progresivno. To bi bila prividna a ne prava vlačna čvrstoća.

4 ZAKLJUČAK

U radu je provedena nelinearna numerička analiza betonske grede sa zarezom. Model opisuje ponašanje mehaničkih svojstava betona (energije loma i vlačne čvrstoće) izloženog statičkom i dinamičkom opterećenju, pojavu i razvoj pukotina i inercijalne efekte. Na osnovu rezultata numeričke analize i usporedbom s eksperimentalnim podacima može se zaključiti sljedeće. (1) Numerički rezultati relativno dobro opisuju podatke dane eksperimentom. (2) Eksperimentalno dobivene vrijednosti energije loma i vlačne čvrstoće predstavljaju prividne vrijednosti. Proračun energija loma i vlačne čvrstoće iz dijagrama reakcija-pomak dovodi do njihovog progresivnog rasta jer se na taj način uzima u obzir utjecaj inercijalnih sila. (3) Numerički rezultati pokazuju da prava energija loma i prava vlačna čvrstoća (određene iz dijagrama naprezanje-deformacija) rastu linearno u semi-log mjerilu s porastom brzine opterećenja (brzine udara) i da slijede konstitutivni zakon korišten u numeričkoj analizi.

Literatura

- [1] Bažant, Z.P., Oh, B.H., "Crack band theory for fracture of concrete", *Materials and Structures RILEM*, Vol.93, No.16, 1983, str. 155-177.
- [2] Bischoff, P., Perry, S.H., "Impact behaviour of plain concrete loaded in uniaxial compression", *J Eng Mech (ASCE)*, Vol.121, No.6, 1995, str. 685-693.
- [3] Malvar, L.J., Ross, C.A., "Review of strain rate effects for concrete in tension", *ACI Mater J*, Vol.95, No.6, 1998, str. 735-739.
- [4] Ožbolt, J., Li, Y.J., Kožar, I., "Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint", *Int J Solids Struct*, Vol. 38, No.16, 2001, str. 2683-2711.
- [5] Ožbolt, J., Bošnjak, J., Sola, E., "Dynamic fracture of concrete compact tension specimen: Experimental and numerical study", *Int J Solids Struct*, Vol.50, No.25-26, 2013, 4270-4278.
- [6] Ožbolt, J., Sharma, A., Irhan, B., Sola, E., "Tensile behavior of concrete under high loading rates", *Int J Impact Engng*, Vol. 69, 2014, str. 55-68.
- [7] Zhang, X.X., Ruiz, G., Yu, R.C., Tarifa, M., "Fracture behavior of high-strength concrete at a wide range of loading rates", *Int J Impact Engng*, Vol.36, No.10-11, 2009, str. 1204-1209.

Autori:

Natalija Bede, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-996, e-mail: natalija.bede@gradri.uniri.hr

Joško Ožbolt, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-992, e-mail: ozbolt@iwb.uni-stuttgart.de

UTJECAJ PRAZNINA I ZAKRIVLJENOSTI NA SVOJSTVA UGLJIČNIH NANOCIJEVI

Brčić, M., Čanadija, M. i Brnić, J.

Sažetak: Dosadašnja teorijska i eksperimentalna razmatranja na području polimernih i drugih kompozita pokazala su da ugljične nanocijevi, kao poboljšanja, znatno utječu na konačna mehanička svojstva spomenutih kompozita, zahvaljujući svojim iznimnim mehaničkim svojstvima. Međutim, na ta svojstva ugljičnih nanocijevi utječe oblik nanocijevi, odnosno zakrivljenost te na taj način zakrivljenost utječe tj. smanjuje konačna svojstva nanokompozitnih struktura. U ovom radu, upotrebom metode konačnih elemenata, uspoređuju se svojstva zakrivljenih i ravnih ugljičnih nanocijevi, na primjerima četiri različite zakrivljenosti nanocijevi. Također, u navedenim modelima zakrivljenih i ravne nanocijevi razmatran je i učinak raznih defektnih praznina unutar kavezne konstrukcije ugljične nanocijevi.

Ključne riječi: ugljične nanocijevi, zakrivljenost, praznine

1 UVOD

Ugljične nanocijevi, točnije njihove mehaničke značajke i svojstva, od svog su otkrića [1] predmet eksperimentalnih [2, 3] i teoretskih [4, 5] istraživanja mnogih znanstvenika, Zaključak je da ugljične nanocijevi posjeduju iznimno visoku vlačnu čvrstoću i modul elastičnosti. Upravo zbog tih karakteristika nanocijevi su logičan izbor kao poboljšanje u kompozitnim materijalima – nanokompozitima.

Vrlo je teško vršiti eksperimentalna istraživanja ugljičnih nanocijevi i nanokompozitnih materijala, stoga je računalno višerazinsko modeliranje logičan izbor. Detaljniji pregled i opis modeliranja nanocijevi i višerazinskih metoda modeliranja nanokompozitnih materijala dan je u autorovim prethodnim radovima [6, 7, 8], čitatelj se upućuje na spomenute radove te se u ovom radu neće posvetiti velika pažnja modeliranju ugljične nanocijevi. Bez obzira na način kontroliranja proizvodnje, uvijek je prisutna zakrivljenost ugljičnih nanocijevi [9]. Istraživanja su pokazala da ta zakrivljenost nanocijevi značajno utječe na konačne mehaničke karakteristike nanokompozitnih materijala [10]. Također, kod ugljičnih nanocijevi čest je problem pojave praznina kao defekta u strukturi nanocijevi. Stoga je vrlo interesantno proučiti utjecaj praznina i zakrivljenosti nanocijevi na njihova mehanička svojstva, točnije na modul elastičnosti te je u ovom radu dan prikaz promjene modula elastičnosti na nekoliko različitih primjera zakrivljene nanocijevi, s različitim brojem praznina u strukturi.

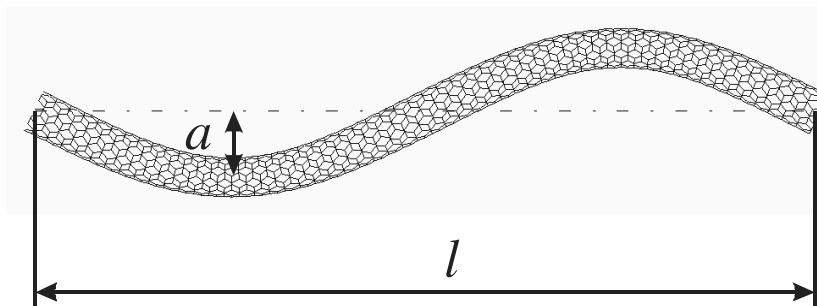
2 PROBLEM ZAKRIVLJENOSTI I PRAZNINA UGLJIČNIH NANOCIJEVI

Kako je rečeno, ugljične nanocijevi kao poboljšanje unutar kompozitnih materijala značajno utječu na krajnje mehaničke karakteristike nanokompozita, zahvaljujući svojim iznimnim svojstvima. No, u nekoliko radova [11, 12] primijećeno je tek neznatno poboljšanje karakteristika nanokompozita poboljšanih ugljičnim nanocijevima u odnosu na karakteristike osnovne matrice. Razlog tome je slabi prijenos opterećenja s matrice kompozita na poboljšanje, odnosno slaba veza između matrice i poboljšanja, tj. nanocijevi, budući je ta veza ostvarena preko slabih van der Waals veza [13, 14]. Dodatni razlozi su zakrivljenost ugljičnih nanocijevi te pojava raznih defekata unutar strukture nanocijevi.

Eksperimenti su pokazali da su ugljične nanocijevi unutar nanokompozita većinom zakrivljene [15, 16]. To se može objasniti činjenicom da nanocijevi posjeduju vrlo malu krutost na savijanje, zbog velikog omjera promjera (koji je reda veličine nanometra) i duljine (red veličine mikrometra). U literaturi je ta zakrivljenost nanocijevi definirana omjerom zakrivljenosti w [17]:

$$w = \frac{a}{l}, \quad (1)$$

gdje su a i l veličine definirane na slici 1.



Sl. 1. Prikaz definicije omjera zakrivljenosti nanocijevi

Osim zakrivljenosti, unutar nanocijevi može doći i do raznih defekata, kao što su praznine, metastabilni atomi, pentagoni, heptagoni, heterogeni atomi, izobličenja i slično [18, 19]. Problem praznina koje nastaju zbog manjka atoma uvelike smanjuju čvrstoću nanocijevi. Takvi nedostaci mogu nastati zbog ionskog zračenja, apsorpcije elektrona ili samog načina proizvodnje ugljičnih nanocijevi [20].

3 PRIMJERI I REZULTATI

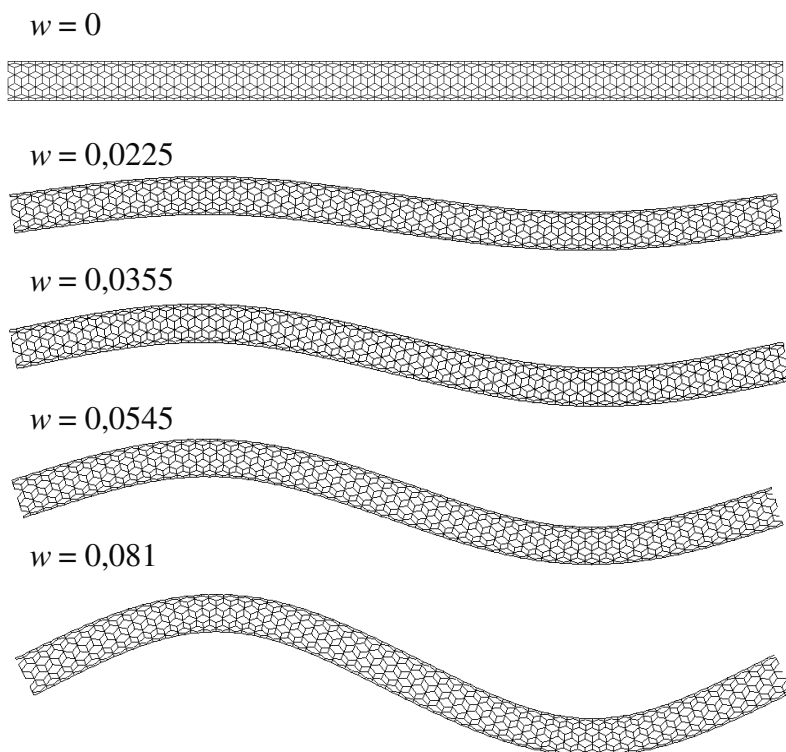
Utjecaj zakrivljenosti i praznina na modul elastičnosti ugljične nanocijevi prikazan je u ovom radu na konačnoelementnom modelu jednostruke ugljične nanocijevi, naslonjač (5, 5) uzorka, promjera 0,679 nm i omjera duljina/promjer 20,2. Nanocijev je modelirana kao okvirna konstrukcija, gdje su atomi zamijenjeni s čvorovima, a kovalentne veze s grednim konačnim elementima [6, 7, 8].

Da bi se odredio modul elastičnosti korišteno je aksijalno opterećenje konzolno uklještene nanocijevi, gdje je u svim primjerima korištena aksijalna sila od 1 nN. Uzdužni modul elastičnosti je dobiven preko izraza:

$$E = \frac{F \cdot l}{A \cdot \Delta l}, \quad (2)$$

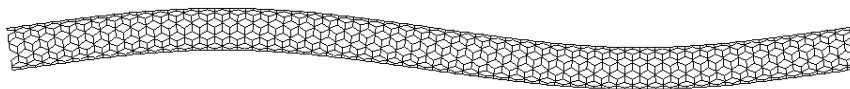
gdje je l duljina nanocijevi (13,65 – 13,7 nm), A površina nanocijevi (0,715 nm²), a Δl uzdužno produljenje.

S obzirom na omjer zakrivljenosti definiran izrazom (1), pripremljeni su modeli različite zakrivljenosti, odnosno četiri zakrivljene nanocijevi i jedna ravna ($w = 0$). Praznine unutar nanocijevi dobivene su na način da su jedan čvor i tri gredna konačna elementa izbačena iz strukture nanocijevi. Primjeri korištenih zakrivljenih nanocijevi dani su na slici 2., dok je na slici 3. prikazan raspored praznina unutar nanocijevi, na primjeru nanocijevi s omjerom zakrivljenosti 0,0225. Raspored praznina na preostalim nanocijevima s drugim omjerima zakrivljenosti je identičan.



Sl. 2. Primjeri zakrivljenih nanocijevi

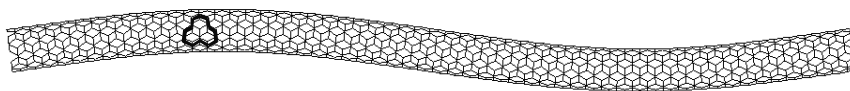
- nema praznina;



- jedna središnja praznina;



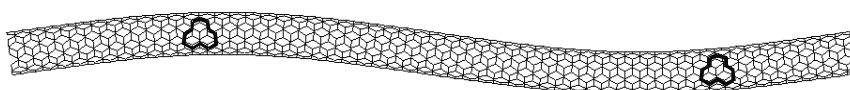
- praznina s jedne strane;



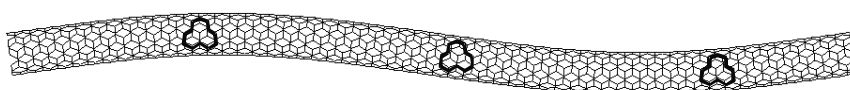
- dvije praznine, središnja i sa strane;



- dvije praznine, na obje strane;



- tri praznine;



Sl. 3. Raspored praznina unutar nanocijevi

Dobiveni rezultati uzdužnog modula elastičnosti dani su u tablici 1. Kao što je i očekivano, primjetan je drastičan pad modula elastičnosti s povećanjem zakrivljenosti ugljične nanocijevi. S druge strane primjetan je i pad modula elastičnosti s povećanjem broja praznina, unutar iste zakrivljenosti nanocijevi.

Tabl. 1. Rezultati uzdužnog modula elastičnosti

Uzdužni modul elastičnosti, E [GPa]					
Omjer zakrivljenosti, w :					
Praznine:	0	0,0225	0,035	0,0545	0,081
nema praznine	1069,42	530,24	187,05	126,36	86,75
1 središnja	1040,51	515,91	185,95	125,53	85,21
1 praznina sa strane	1040,51	515,91	186,50	125,86	85,21
2 praznine, središnja i sa strane	1018,49	513,14	185,77	125,36	84,83
2 praznine, na obje strane	1018,49	513,14	185,68	125,39	84,94
3 praznine	997,38	507,95	185,05	124,87	84,65

4 ZAKLJUČAK

Ugljične nanocijevi su zbog svojih odličnih mehaničkih karakteristika logičan i kvalitetan izbor kao poboljšanje unutar nanokompozitnih materijala. No, zbog raznih razloga prilikom proizvodnje, kao i zbog geometrijskih karakteristika, ugljične nanocijevi dolaze u zakrivljenom obliku, s raznim defektima u strukturi. Ta zakrivljenost i defekti uvelike smanjuju njihove sposobnosti, što u konačnici dovodi do malih poboljšanja krajnjih mehaničkih svojstava nanokompozita. To je pokazano na promjeni uzdužnog modula elastičnosti konačnoelementnog modela jednostruke ugljične nanocijevi, s različitim omjerom zakrivljenosti i različitim brojem praznina u strukturi. Tako, uzdužni modul elastičnosti ravne ugljične nanocijevi drastično pada s porastom omjera zakrivljenosti, što je najizraženije kod nanocijevi bez praznina (sa 1069 GPa na 86 GPa; 92%), dok taj pad nije toliko drastičan, ali je i dalje vidljiv, s obzirom na porast broja praznina unutar nanocijevi iste kategorije zakrivljenosti (2,3% - 6%). Također, valja primijetiti da se poklapaju moduli elastičnosti u primjerima iste zakrivljenosti i istog broja praznina.

Literatura:

- [1] Iijima, S. "Helical microtubules of graphitic carbon", Nature 354, 1991, str. 56.
- [2] Treacy, M.M.J. i sur., "Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes", Nature 381, 1996, str. 678-680.
- [3] Xie, S. i sur., "Mechanical and physical properties on carbon nanotube", Journal of Physics and Chemistry of Solids, 61, 1996, str. 2511-2514.
- [4] Lu, J.P., "Elastic Properties of Carbon Nanotubes and Nanoropes", Phys. Rev. Lett., 79, 1997, str. 1297.
- [5] Ruoff, R.S. i sur., "Mechanical properties of carbon nanotubes: theoretical predictions and experimental measurements", Comptes Rendus Physique, 4, 2003, str. 993.
- [6] Brcic, M., Canadija, M., Brnic, J., "FE modeling of a multi-walled carbon nanotubes", Estonian Journal of Engineering, 15, 2009, str. 79-86.
- [7] Brcic, M., Canadija, M., Brnic, J., "A finite element model for thermal dilatation of carbon nanotubes", Review on Advanced Materials Science, 33, 2013, str. 1-6.
- [8] Brcic, M., Canadija, M., Brnic, J., "Estimation of material properties of nanocomposite structures", Meccanica, 48, 2013, str. 2209-2220.
- [9] Ginga, J.N. i sur., "Waviness reduces effective modulus of carbon nanotube forests by several orders of magnitude", Carbon, 66, 2014, str. 57-66.
- [10] Fisher, F.T. i sur., "Effects of nanotube waviness on the modulus of nanotube - reinforced polymers", Applied Physics Letters, 80, 2002, str. 4647-4649.

- [11] Qian, D. i sur., "Mechanics of Carbon nanotube", Appl. Mech. Rev., 55, 2002, str. 495-533.
- [12] Ajayan, P.M. i sur., "Single – Walled Nanotube – Polymer Composites: Strength and Weaknesses", Adv. Mater., 12, 2000, str. 750-753.
- [13] Tan, H., i sur., "The effect of van der Waals – based interface cohesive law on carbon nanotube – reinforced composite materials", Composites Science and Technology, 67, 2007, str. 2941-2946.
- [14] Jiang, L.Y., Huang, Y., Jiang, H., Ravichandran, G., Gao, H., Hwang, K.C., Liu, B., A cohesive law for carbon nanotube / polymer interfaces based on the van der Waals force, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54, 2006, str. 2436-2452.
- [15] Shaffer, M.S.P., Windle, A.H., "Fabrication and Characterization of Carbon Nanotube / Poly (vinyl alcohol) Composites", Adv. Mater., 11, 1999, str. 937-941.
- [16] Vigolo B. i sur., "Macroscopic Fibers and Ribbons of oriented Carbon Nanotubes", Science, 290, 2000, str. 1331-1334.
- [17] Farsadi, M. i sur., "Numerical investigation of composite materials reinforced with waved carbon nanotubes", Journal of Composite Materials, 0, 2012, str. 1-10.
- [18] Banhart, F., "Irradiation effects in carbon nanostructures", Reports on Progress in Physics, 62, 1999, str. 1181.
- [19] Iijima, S. i sur., "Pentagons, heptagons and negative curvature in graphite microtubule growth", Nature, 356, 1992, str. 776-778.
- [20] Hou, W., Xiao, S., "Mechanical Behaviour of Carbon Nanotubes with Randomly Located Vacancy Defects", Journal of Nanoscience and Nanotechnology, 7, 2007, str. 1-8.

Autori:

Marino Brčić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651-560, e-mail: mbracic@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Brcic.htm

Marko Čanađija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651-496, e-mail: markoc@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Canadija.htm

Josip Brnić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651-491, e-mail: brnic@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/osoblje_files/Brnic/HP_Brnic.htm

STUDIJA UTJECAJA NEVERTIKALNOSTI KRUTOG BLOKA NA PERIODIČNOST NE-GLATKOG DINAMIČKOG PONAŠANJA PRI HARMONIJSKOJ POBUDI

Čeh, N. i Bićanić, N.

Sažetak: U radu se promatra ponašanje ne-glatkog dinamičkog sustava – odziva krutog bloka na podlozi, uz pretpostavku da je trenje između baze bloka i podloge dovoljno veliko da je spriječeno klizanje bloka po podlozi. Na blok djeluje dinamička pobuda harmonijskog ubrzanja podloge.

Numerička integracija jednadžbe kretanja je provedena Newmarkovom metodom prosječnog ubrzanja ($\beta=1/4$, $\gamma=1/2$), a gubitak energije pri sudaru baze bloka i podloge je uzet u obzir pomoću koeficijenta restitucije.

Rezultati su prikazani u obliku grafova zaokreta, kutne brzine i kutnog ubrzanja u vremenu, te u faznoj ravnini. Promatrana je periodičnost dinamičkog ponašanja i simetričnost, odnosno nesimetričnost, orbita u faznoj ravnini. Analizirana je osjetljivost orbita u faznoj ravnini na male perturbacije početnih uvjeta vertikalnosti bloka.

Simulacije ne-glatkog dinamičkog ponašanja krutih blokova pokazuju postojanje periodičnosti, ovisno o parametrima sustava (geometriji bloka, koeficijentu restitucije i funkciji ubrzanja podloge) te početnim uvjetima nagnutosti bloka. Uočena je nesimetričnost orbita pri određenim perturbacijama početnih uvjeta i, kao posljedica, manja amplituda funkcije ubrzanja podloge potrebna za prevrtanje bloka.

Ključne riječi: *dinamički odziv, kruta tijela, fazna ravnina, prevrtanje bloka*

1 UVOD

Dinamička analiza krutih tijela je jedan od osnovnih problema nelinearne mehanike. Kruta tijela koja nisu povezana niti međusobno niti s podlogom predstavljaju model koji opisuju dinamičko ponašanje konstrukcija različite složenosti - spomenika, grafitnih jezgri u nuklearnim elektranama ili zidanih elemenata.

Osnovni model krutog bloka koji se slobodno oslonjen nalazi na podlozi, uz uvjet da je trenje između bloka i podloge dovoljno veliko da je spriječeno klizanje bloka po podlozi, je prikazan na Slici 1 [1-3].

Dinamički model je najjednostavnije opisan jednadžbom gibanja [1, 2]:

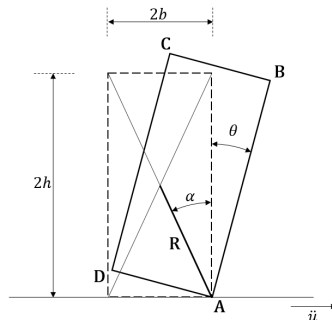
$$I_0 \ddot{\theta} = -WR \sin[\text{sign}(\theta)\alpha - \theta] - mR\ddot{u} \cos[\text{sign}(\theta)\alpha - \theta], \quad (1)$$

gdje je I_0 moment inercije pravokutnog bloka s obzirom na jedan od njegovih donjih vrhova, m i W masa, odnosno, težina bloka, R udaljenost bilo kojeg vrha bloka od njegovog težišta, α kut vitkosti bloka, \ddot{u} funkcija ubrzanja podloge, $\theta, \ddot{\theta}$ rotacija, odnosno, kutno ubrzanje bloka, a funkcija $\text{sign}(\theta)$ je definirana kao 1, 0 ili -1 za $\theta > 0$, $\theta = 0$ i $\theta < 0$, respektivno.

Funkcija ubrzanja podloge je harmonijska funkcija [1-3, 7]:

$$\ddot{u} = a_0 \sin(\omega t + \psi), \quad (2)$$

gdje je a_0 amplituda funkcije ubrzanja podloge, ω kružna frekvencija funkcije ubrzanja podloge, t vrijeme i ψ fazni pomak funkcije ubrzanja podloge (u nastavku rada jednak nuli).



Slika 1. Dinamički model krutog bloka s jednim stupnjem slobode

2 NUMERIČKA INTEGRACIJA JEDNADŽBE KRETANJA, PROBLEM NE-GLATKOSTI I PRIKAZI REZULTATA

Provedena je numerička analiza dinamičkog ponašanja u programskom jeziku Matlab. Jednadžba kretanja (1) je linearizirana i riješena za svaki vremenski korak Newmarkovom metodom za direktnu integraciju. Korištena je Newmarkova metoda prosječnog ubrzanja s parametrima $\beta = 1/4$ i $\gamma = 1/2$.

Osnovni izvor ne-glatkosti dinamičkog problema je u opisu dinamičkih parametara. Budući da je rotacija bloka, θ , definirana u odnosu na vertikalni položaj bloka, kutna brzina i kutno ubrzanje su također definirani ovisno o smjeru rotacije bloka u odnosu na vertikalni položaj. Pri prijelazu iz rotacije oko vrha A u rotaciju oko vrha D u funkciji koja opisuje brzinu bloka u vremenu se javlja diskontinuitet, dok se u funkciji koja opisuje ubrzanje bloka u vremenu javlja skok.

Osim toga, pri svakom prijelazu rotacije iz negativne u pozitivnu vrijednost i obrnuto blok se sudara s bazom. Pri sudaru dva tijela gubi se određena količina energije u sustavu, gdje se pretpostavlja da se uslijed toga brzina trenutno smanjuje. Trenutno smanjenje brzine predstavlja skok u funkciji koja opisuje brzinu bloka u vremenu i diskontinuitet u funkciji koja opisuje rotaciju bloka u vremenu.

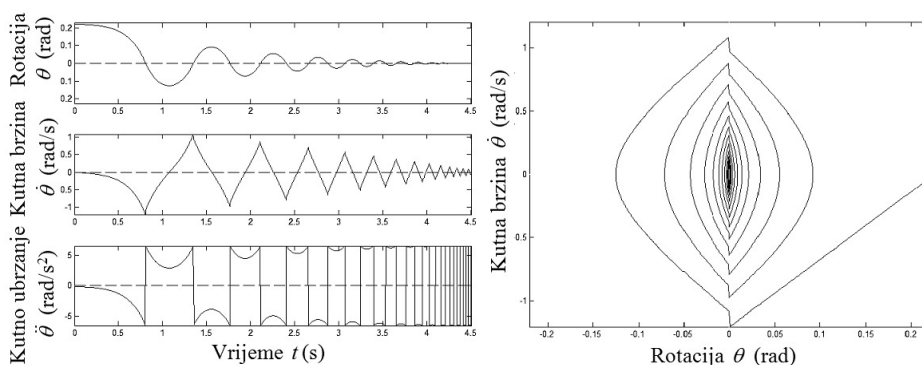
Gubitak energije pri sudaru bloka s bazom je u numeričkoj analizi uzet u obzir uvođenjem dodatnog parametra – koeficijenta restitucije – u jednadžbu kretanja. Koeficijent restitucije opisuje odnos kutne brzine bloka neposredno prije i neposredno nakon sudara s bazom, odnosno [1, 3-6]:

$$\eta = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}. \quad (3)$$

Koeficijent restitucije ovisi o materijalu od kojeg su sačinjeni blok i podloga, a njegovu vrijednost treba dobiti eksperimentalno za određenu kombinaciju materijala.

U nastavku je analiziran blok dimenzija 0.115/0.5 m, mase 6.329 kg, a uzet je koeficijent restitucije $\eta = 0.9$.

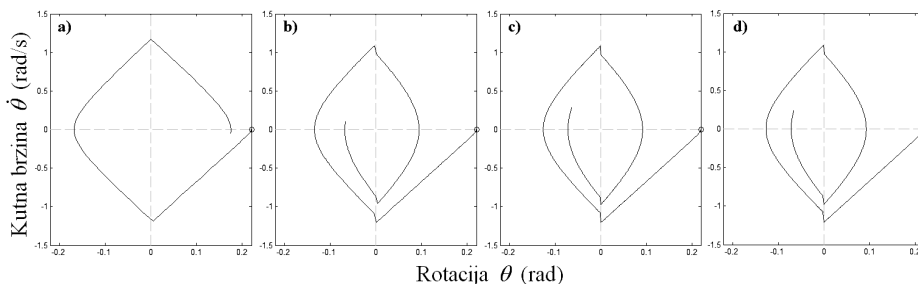
Kao rezultat numeričke analize dinamičkog ponašanja dobiveni su grafovi rotacije, brzine i ubrzanja u vremenu za blok na nepomičnoj podlozi ispušten iz početnog nagnutog položaja od $\theta_0 = 0.22$ rad (Slika 2, lijevo).



Slika 2. Grafovi rotacije, kutne brzine i kutnog ubrzanja u vremenu te trag u faznoj ravnini kod dinamičke analize bloka na nepomičnoj podlozi ispuštenog iz početnog nagnutog položaja od 0.22 rad

Na grafovima u vremenu moguće je vidjeti neke karakteristike dinamičkog ponašanja bloka, no mnoge pojave se mogu previdjeti. Drugi način da se prikažu vrijednosti dobivene u dinamičkoj analizi je prikaz rezultata u faznoj ravnini. Fazna ravnina predstavlja ravninu omeđenu horizontalnom osi koja predstavlja rotaciju i vertikalnom osi koja predstavlja kutnu brzinu bloka u jednom trenutku [3-6]. Ukoliko se sve fazne ravnine od početka do kraja dinamičke analize „poslože“ jedna za drugom, rezultat je prostorna krivulja koja prikazuje odnos rotacije i kutne brzine od početka do kraja analize (Slika 2, desno).

Veličina vremenskog koraka utječe na točnost prikaza dinamičkog ponašanja bloka u faznoj ravnini. Rezultati četiri numeričke analize s veličinama vremenskog koraka od 0.02, 0.004, 0.001 i 0.0005 sekundi su prikazani na Slikama 3.a, 3.b, 3.c i 3.d, respektivno.



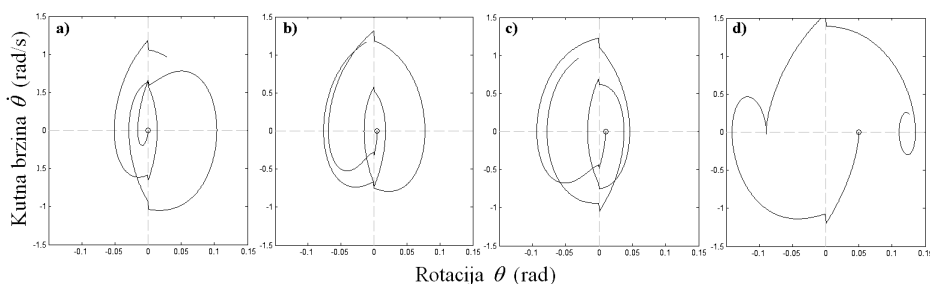
Slika 3. Fazne ravnine prve dvije sekunde dinamičke analize bloka pri slobodnom lujanju dobivene upotrebom vremenskog koraka od 0.02 (a), 0.004 (b), 0.001 (c) i 0.0005 sekundi (d)

Numeričke analize dinamičkog ponašanja bloka pri djelovanju harmonijske funkcije ubrzanja podloge su potvrdile da veličina vremenskog koraka pri korištenju Newmarkove metode integracije uvelike utječe na točnost rezultata pa je potrebno odabrati dovoljno mali vremenski korak da se izbjegne umjetno povećanje perioda i da se mogu promatrati pojave vezane za najveće frekvencije funkcije ubrzanja podloge.

3 OSJETLJIVOST DINAMIČKOG PONAŠANJA NA MALE PERTURBACIJE POČETNE VERTIKALNOSTI BLOKA

Većina analiza dinamičkog ponašanja krutog bloka (analitička rješenja i numeričke analize) dostupnih u literaturi je provedeno s pretpostavkom da je blok u početku u stanju mirovanja i idealno vertikalnom položaju [1, 2, 7]. Prethodne pretpostavke idealiziraju stvarno stanje u kojem se mogu naći kruti blokovi, posebice zato što idealna vertikalnost rijetko može biti osigurana, kako kod stvarnih konstrukcija, tako i kod provođenja eksperimenata.

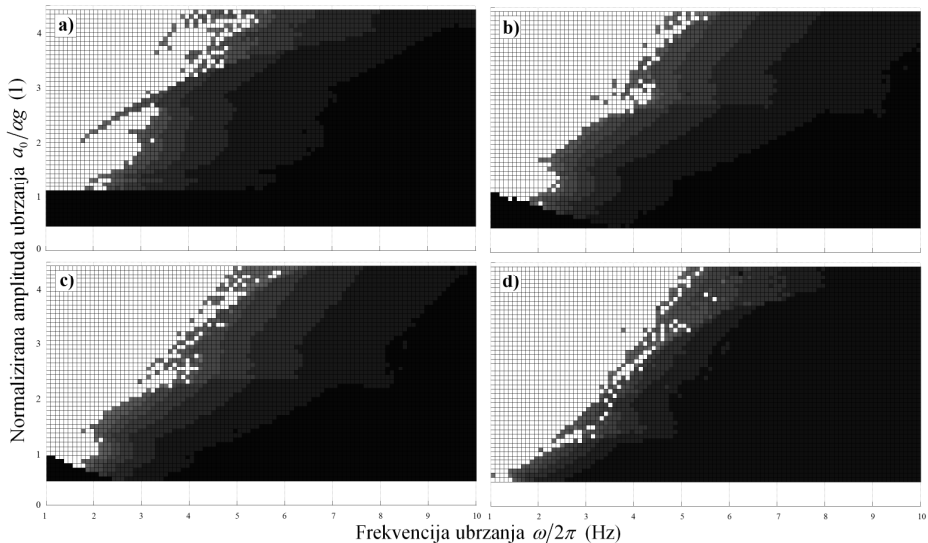
S ciljem procjene utjecaja malih perturbacija (nevertikalnosti) početnog položaja bloka, provedena je studija s nizom analiza dinamičkog ponašanja bloka kroz 10 sekundi pri neprestanoj pobudi u obliku harmonijske funkcije ubrzanja podloge (Slike 4.a, 4.b, 4.c i 4.d).



Slika 4. Fazne ravnine prve sekunde dinamičke analize bloka pri harmonijskoj pobudi s amplitudom od $1.5g$ i kružnom frekvencijom od 6π s početnom rotacijom od 0 rad (a), 0.005 rad (b), 0.01 rad (c) i 0.05 rad (d)

Dodatni niz analiza s različitim parametrima funkcije ubrzanja podloge, odnosno, različitim amplitudama funkcije, a_0 , u rasponu od $0.1g$ do $1g$ i kružnim frekvencijama funkcije ubrzanja, ω , u rasponu od 2π do 20π , je pokazao da male perturbacije znatno utječu na dinamičko ponašanje i moguće prevrtanje krutih blokova. Funkcije rotacije, kutne brzine i kutnog ubrzanja su različite, no i kvantitativno su primjećene razlike u najvećim rotacijama koje blok doživi tijekom analize (Slika 5).

Područje u kojem se blokovi prevrnu u 10 sekundi dinamičke pobude se ne širi u smjeru većih frekvencija funkcije ubrzanja, ali se širi u smjeru manjih amplituda. U slučaju idealne vertikalnosti bloka na početku, područje prevrtanja je omeđeno linijom koja odgovara amplitudi od $g\alpha$, dok je pri malim perturbacijama početne vertikalnosti dovoljna manja amplituda za prevrtanje bloka.



Slika 5. Grafovi s najvećim rotacijama bloka tijekom 10 sekundi dinamičke analize u ovisnosti o amplitudi i frekvenciji harmonijske funkcije ubrzanja podloge za blok koji je u početku idealno vertikalno (a) te zarotiran za 0.005 rad (b), 0.01 rad (c) i 0.05 rad (d); bijela boja predstavlja prevrtanje bloka, a najtamnija nijansa sive blok u mirovanju

4 ZAKLJUČAK

Početna vertikalnost bloka, kao jedna od osnovnih pretpostavki s kojima su provedene gotovo sve dinamičke analize u literaturi, je idealizacija stvarnog stanja konstrukcije ili modela. U radu je pokazano da vrlo male perturbacije početnog položaja bloka utječu na dinamički odziv bloka i mogućnost prevrtanja. Perturbacije do veličine početne rotacije od 0.05 rad (ili približno 2.86°) ne samo da utječu na prirodu dinamičkog odziva već i potpuno eliminiraju područje u kojem blok teoretski ne dostiže ljuljanje. Dakle, mnogo manje amplitude od onih potrebnih da blok pokrenu u ljuljanje mogu izazvati prevrtanje bloka ukoliko blok na samom početku nije u idealno vertikalnom položaju.

Navedeni zaključci ujedno predstavljaju važan problem u laboratorijskim ispitivanjima dinamičkog ponašanja krutih blokova zbog osjetljivosti osiguranja ponovljivosti eksperimenata.

ZAHVALA

Istraživanje je provedeno u okviru Unity Through Knowledge znanstvenog projekta 3/13 *Evidence Based Characterisation of Dynamic Sensitivity of Multiblock Structures – Numerical Simulation and Experimental Validation*.

Literatura:

- [1] Dimitrakopoulos, E.G., DeJong, M.J., “Revisiting the Rocking Block: Closed-form Solutions and Similarity Laws”, *Proceedings of the Royal Society A*, 2012.
- [2] Housner, G.W., “The Behavior of Inverted Pendulum Structures During Earthquakes”, *Bulletin the Seismological Society of America*, Vol. 53, No. 2, 1963, str. 403-417.

- [3] Hogan, S.J., "On the Dynamics of Rigid-block Motion under Harmonic Forcing", Proceedings of the Royal Society London A 452, 1989, str. 441-476.
- [4] Hogan, S.J., "Slender Rigid Block motion", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, No. 1, 1994, str. 11-24.
- [5] Hogan, S.J., "The Many Steady State Responses of a Rigid Block under Harmonic Forcing", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, 1990, str. 1057-1071.
- [6] Hogan, S.J., "On the Dynamics of Rigid Block Motion under Harmonic Forcing", Tenth World Conference on Earthquake Engineering, 1992, Rotterdam.
- [7] Makris, N., Rousses, Y., "Rocking Response and Overturning of Equipment under Horizontal Pulse-Type Motions", Report PEER 1998.

Autori:

Nina Čeh, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, Rijeka, tel. 051/265-956, e-mail: nina.ceh@gradri.uniri.hr

Nenad Bićanić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, Rijeka, tel. 051/265-954, e-mail: nenad.bicanic@gradri.uniri.hr

VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA PRIMJENOM METODA DIGITALNE KORELACIJE SLIKE I TERMOGRAFIJE

Frančeski, J., Tonković, Z., Skozrit, I., Surjak, M., Krstulović-Opara, L., Vesenjak, M., Kodvanj, J. i Domazet, Ž.

Sažetak: U radu su prikazani rezultati eksperimentalnih i numeričkih istraživanja procesa deformiranja dviju aluminijskih legura Al2024 i AlCu5BiPb-T8. Eksperimentom su obuhvaćena statička i dinamička vlačna ispitivanja legure Al2024 za više različitih brzina deformiranja te testovi savijanja u tri točke legure AlCu5BiPb-T8. Raspodjele pomaka i temperatura na vanjskim plohama epruveta za vrijeme eksperimenata određene su pomoću metoda fotogrametrije i infracrvene termografije. U okviru numeričkog modeliranja epruvete su diskretizirane dvodimenzijskim konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja uz neizotermni elastoplastični konstitutivni model. Rezultati eksperimentalnih mjerenja dobiveni na cijeloj plohi epruvete omogućili su točnije kalibriranje parametara materijala u konstitutivnim relacijama. Za usporedbu eksperimentalnih i numeričkih rezultata razvijen je algoritam koji je implementiran u programsku skriptu. Osim toga, provedena je i usporedba rezultata promjene temperature određene infracrvenom termografijom i numeričkom simulacijom.

Ključne riječi: *eksperiment, digitalna korelacija slike (DIC), termografija, metoda konačnih elemenata, termoplastičnost*

1 UVOD

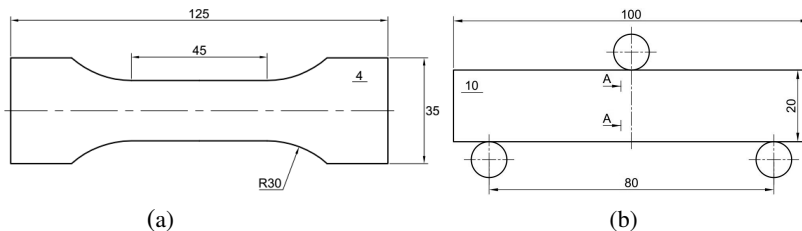
Novi zahtjevi na pouzdanost i sigurnost, zajedno s upotrebom novih materijala i novih tehnologija proizvodnje mogu se realizirati jedino primjenom naprednih metoda analize konstrukcije i opisivanja ponašanja materijala. Kao i kod većine drugih problema, numeričke simulacije sve više zamjenjuju, odnosno nadopunjuju mnogo skuplji eksperiment. Primjena metode konačnih elemenata omogućuje simuliranje procesa deformiranja materijala sve do potpunog loma konstrukcijske komponente. S druge strane, numeričke simulacije su toliko moćne koliko i fizikalni i matematički modeli koji stoje iza njih. Značajan utjecaj na točnost numeričkog postupka ima opisivanje materijalnog modela koji se definira konstitutivnim relacijama, ali i ispravnost algoritma za rješavanje konstitutivnih jednadžbi na razini točke integracije.

Za što točnije određivanje parametara materijala u konstitutivnim modelima, cilj istraživanja prikazanih u ovom radu je izvesti algoritam koji omogućuje direktnu usporedbu numeričkih rezultata na cijelom području diskretizacije s eksperimentalnim rezultatima dobivenim optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M (www.gom.com) za analizu pomaka i deformacija na vanjskim plohama tijela [1]. To omogućuje izvod novih originalnih i numerički učinkovitih algoritama za modeliranje složenih procesa deformiranja materijala, čime se numerička simulacija to više približava realnom ponašanju konstrukcije. Osim toga, cilj istraživanja je dovesti u korelaciju elastoplastične deformacije određene sustavom ARAMIS i prirast površinskih temperatura tijela [2] mjerenih srednjevalnom hlađenom infracrvenom termokamerom FLIR SC 5000. Na

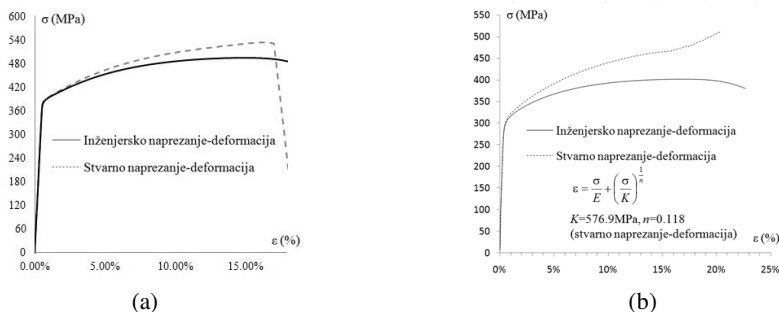
primjeru statičkih i dinamičkih vlačnih testova aluminijske legure Al2024 te testova savijanja u tri točke legure AlCu5BiPb-T8, pokazana je učinkovitost i točnost izvedenog algoritma za validaciju numeričkog modela primjenom metoda koje se temelje na principu digitalne korelacije slike (ARAMIS) i termografije [3, 4, 5].

2 EKSPERIMENTI

Za vlačni eksperiment korištene su plosnate epruvete geometrije prema slici 1(a), izrađene od aluminijske legure Al2024-T3, kemijskog sastava izraženog u postocima kako slijedi: 0,1Cr; 3,8Cu; 0,5Fe; 1,2Mg; 0,3Mn; 0,5Si; 0,15Ti; 0,15Zn. Epruvete za vlačno ispitivanje ispitane su brzinama deformiranja 0,0125 mm/s, 1 mm/s i 10 mm/s. Za test savijanja u tri točke korištene su epruvete geometrije prema slici 1(b), izrađene od aluminijske legure AlCu5BiPb-T8, kemijskog sastava: 0,4Si; 5Cu; 0,7Fe; 0,4Pb; 0,4Bi; 0,3Zn. Dijagrami ovisnosti naprežanja o deformaciji dani su na slici 2. Za slučaj kvazistatičkog vlačnog testa mehaničke karakteristike aluminijske legure Al2024-T3 su: granica razvlačenja $\sigma_{0,2}=385,9$ MPa, vlačna čvrstoća $\sigma_M=493$ MPa, modul elastičnosti $E=72,56$ GPa, Poissonov faktor $\nu=0,33$ te gustoća $\rho=2780$ kg/m³. Za potrebe numeričke analize toplinska svojstva materijala preuzeta su iz [6]: koeficijent toplinske rastezljivosti $\alpha=23,2$ $\mu\text{m/K}$, specifični toplinski kapacitet $c=875$ J/(kgK) i koeficijent toplinske vodljivosti $\lambda=121$ W/(mK). Mehanička svojstva legure AlCu5BiPb-T8 su prema [7]: $\sigma_{0,2} = 305$ MPa, $\sigma_M=400$ MPa, $E=200$ GPa te $\nu=0,3$.



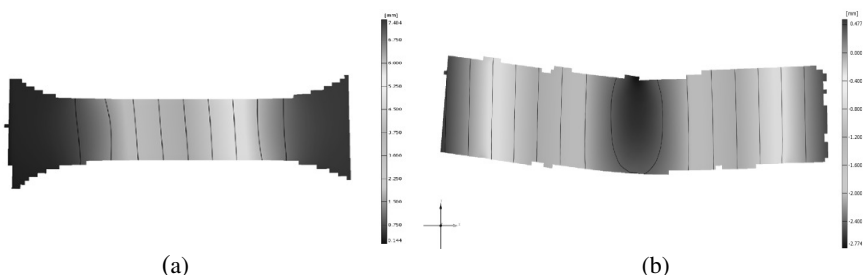
Sl. 1. Geometrija epruveta: a) plosnata epruveta za vlačno ispitivanje, b) epruveta za test savijanja u tri točke



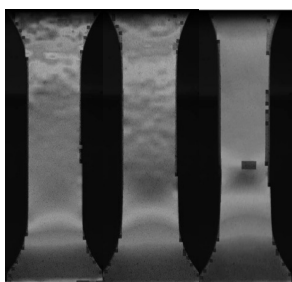
Sl. 2. Ovisnost naprežanja o deformaciji: (a) Al2024-T3, (b) AlCu5BiPb-T8 [7]

Na slikama 3(a) i 3(b) prikazani su eksperimentalni rezultati raspodjele osnih pomaka za vlačni test te progiba kod testa savijanja u tri točke određeni pomoću optičkog sustava ARAMIS 4M. Rezultati deformiranja epruvete na vlak, brzinom 10 mm/s, dobiveni metodom digitalne korelacije slike (ARAMIS) i infracrvene termografije dani su na slikama 4 i 5. Usporedbom rezultata može se primijetiti kako temperaturna raspodjela

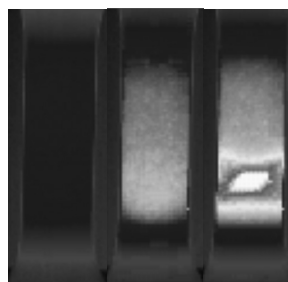
odgovara raspodjeli plastičnih zona izračunatih digitalnom korelacijom slike. To omogućuje detaljnu analizu korelacije između elastoplastičnih deformacija i prirasta površinskih temperatura dinamički opterećenih konstrukcijskih elemenata, od početka procesa deformiranja pa sve do njenog potpunog loma.



Sl. 3. Eksperimentalno određena raspodjela pomaka, mm: (a) vlačni test (osni pomaci), (b) test savijanja u tri točke (progibi)



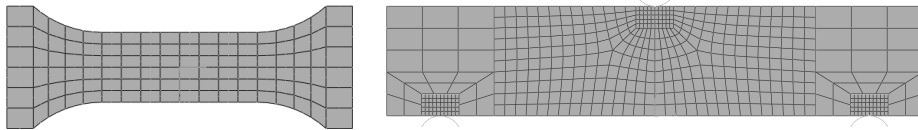
Sl. 4. Ekvivalentne deformacije prema energijskoj teoriji čvrstoće određene ARAMISom



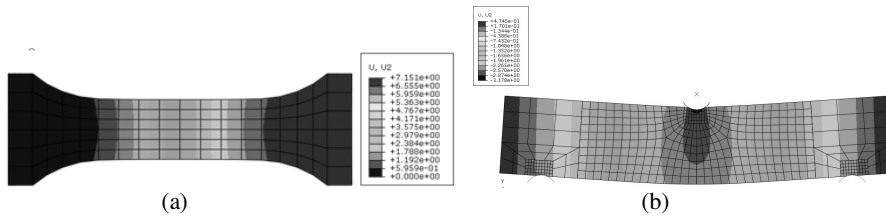
Sl. 5. Raspodjela temperature na vlačnoj epruveti tijekom procesa deformiranja

3 NUMERIČKA FORMULACIJA

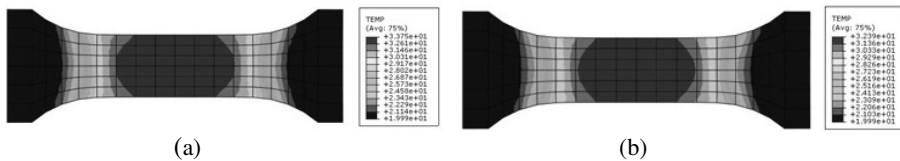
U radu [2] detaljno je prikazan izvod konstitutivnih relacija, kao i numeričkog algoritma za integriranje adijabatskog neizoternog elastoplastičnog materijalnog modela. Prikazani konstitutivni model analogan je modelu koji je implementiran u programski paket ABAQUS/Standard [8]. Ovaj model primijenjen je za opisivanje procesa deformiranja aluminijskih legura Al2024 i AlCu5BiPb-T8. U numeričkom modelu epruvete za vlačno ispitivanje i test savijanja u tri točke diskretizirane su četverokutnim konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja (slika 6). Za test savijanja u tri točke bilo je potrebno dodatno modelirati kontakt između površine valjaka i epruvete putem kontaktnih ploha. Rubni uvjeti pomaka i sila kontrolirani su samo na valjcima, koji su modelirani kao kruta tijela. Za rješavanje kontaktnog problema, korištena je Penalty metoda s faktorom trenja $\mu=0,1$. Na slikama 7(a) i 7(b) prikazani su rezultati numeričke simulacije za osne pomake kod vlačnog testa te progiba kod testa savijanja u tri točke. Numerički rezultati za raspodjelu temperature po površini epruvete za slučaj vlačnog ispitivanja pri brzinama deformiranja 1 mm/s i 10 mm/s dana je na slikama 8(a) i 8(b).



Sl. 6. Geometrije epruveta diskretizirane konačnim elementima



Sl. 7. Numerički određena raspodjela pomaka, mm: (a) vlačni test (osni pomaci), (b) test savijanja u tri točke (progibi)

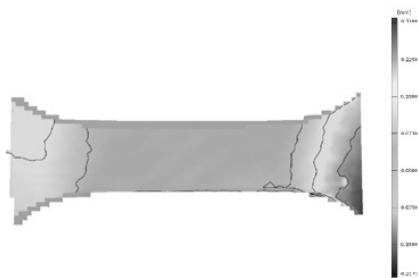


Sl.8. Raspodjela temperature po površini epruvete, °C: (a) 1 mm/s; (b) 10 mm/s

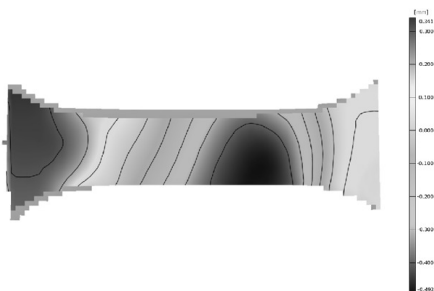
5 USPOREDBA EKSPERIMENTALNIH I NUMERIČKIH REZULTATA

Na slici 9 prikazana je numerički modelirana geometrija epruvete za vlačno ispitivanje mapirana na geometriju epruvete za vlačno ispitivanje određenu fotogrametrijom. Uslijed nepotpunog podudaranja geometrija dolazi do lokalnih razlika koje utječu na točnost rezultata korelacije. Razlike osnih pomaka između podataka određenih numeričkom simulacijom i eksperimentom dane su na slici 10. Analogno, za test savijanja u tri točke, na slici 11 prikazane su lokalne razlike geometrije, a na slici 12 razlike u progibima. Kod epruvete za savijanje u tri točke, do najvećih razlika dolazi u područjima kontakta epruvete i valjaka zbog velikih plastičnih deformacija uslijed koncentracije naprezanja.

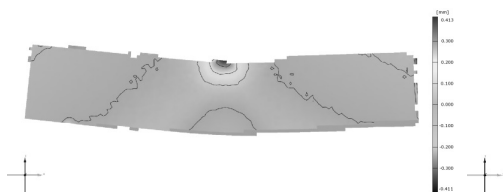
Na slikama 13 i 14 prikazani su dijagrami promjene maksimalne temperature (crvena linija) i minimalne temperature (plava linija) na površini epruvete za brzinu deformiranja 1 mm/s za vlačni pokus. Eksperimentalni podaci su zabilježeni u ovisnosti o brzini snimanja kamere, koja iznosi 600 slika u sekundi (*frame per second*), dok su numerički podaci izraženi u ovisnosti o vremenu inkrementa opterećenja. Vrijeme inkrementa opterećenja ne predstavlja realno vrijeme te dolazi do razlike u grafovima. Izuzev toga, kod eksperimenta dolazi do temperaturnih promjena u elastičnom i plastičnom području, dok se u numeričkom modeliranju zanemaruje utjecaj rada elastične deformacije zbog svoje povratne prirode. Na slikama 15 i 16 prikazani su dijagrami promjene maksimalne temperature na površini epruvete za brzinu deformiranja 10 mm/s za vlačni pokus.



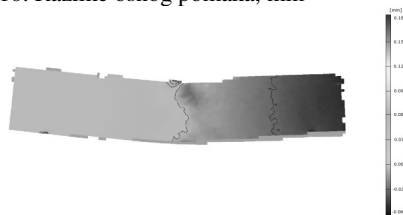
Sl. 9. Lokalne razlike geometrije, mm



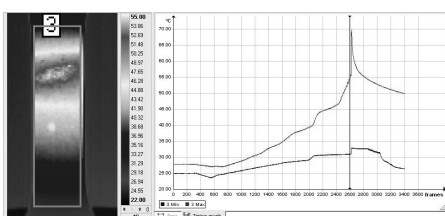
Sl. 10. Razlike osnovnog pomaka, mm



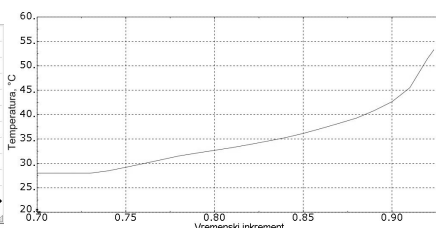
Sl. 11. Lokalne razlike geometrije, mm



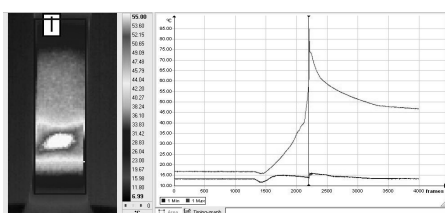
Sl. 12. Razlike u progibima, mm



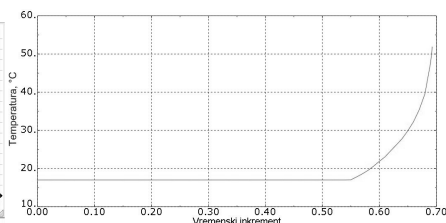
Sl. 13. Eksperimentalni rezultati promjene temperature, °C, za 1 mm/s



Sl. 14. Numerički rezultati promjene temperature, °C, za 1 mm/s



Sl. 15. Eksperimentalni rezultati promjene temperature, °C, za 10 mm/s



Sl. 16. Numerički rezultati promjene temperature, °C, za 10 mm/s

6 ZAKLJUČAK

U radu je izveden algoritam za direktnu usporedbu numerički izračunatih pomaka i deformacija na cijelom području diskretizacije s eksperimentalnim rezultatima dobivenim optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M. Za dovođenje u korelaciju elastoplastičnih deformacija određenih sustavom ARAMIS i prirasta površinskih temperatura na epruveti primijenjena je infracrvena srednjevalna termokamera. Na primjeru statičkih i dinamičkih vlačnih testova aluminijske legure Al2024 te testova savijanja u tri točke legure AlCu5BiPb-T8, pokazana je učinkovitost i točnost izvedenog algoritma za validaciju numeričkog modela.

ZAHVALA

Rad je izrađen u okviru RCOP projekta "Centre of Excellence for Structural Health" (CEEStructHealth) sufinanciranog iz sredstava Europske unije (ugovor IPA2007/HR/16IPO/001-040513). Posebnu zahvalnost dugujemo dr. sc. Nenadu Drvaru za pomoć pri definiranju programske skripte za sustav Aramis 4M.

Literatura:

- [1] Čanžar, P., Tonković, Z., Kodvanj, J., "Microstructure influence on fatigue behaviour of nodular cast iron", *Materials Science & Engineering A*, Vol.556, 2012, str. 88-99.
- [2] Tonković, Z., Sorić, J., Krätzig, W.B., "On nonisothermal elastoplastic analysis of shell-components employing realistic hardening responses", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.38, 2001, str. 5019-5039.
- [3] Perić, M., Tonković, Z., Rodić, A., Surjak, M., Garašić, I., Boras, I., Švaić, S., "Numerical analysis and experimental investigation of welding residual stresses and distortions in a T-joint fillet weld", *Materials & Design*, Vol.53, 2014, str. 1052-1063.
- [4] Vesenjajk, M., Krstulović-Opara, L., Ren, Z., "Characterization of irregular open-cell cellular structure with silicone pore filler", *Polymer Testing*, Vol.32, 2013, str. 1538-1544.
- [5] Duarte, I., Vesenjajk, M., Krstulović-Opara, L., "Dynamic and quasi-static bending behaviour of thin-walled aluminium foam", *Composite Structures*, Vol.109, 2014, str. 48-56.
- [6] ASM Metals Reference Book, Third edition, Michael Baucchio, Ed. ASM International, Materials Park, OH, 1993.
- [7] Čanžar, P., "Eksperimentalno i numeričko modeliranje zamornog ponašanja nodularnog lijeva", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, doktorska disertacija, 2012.
- [8] ABAQUS/Standard (2013), Dassault Systemes.

Autori:

Joško Frančeski, student Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, e-mail: jf172669@stud.fsb.hr

Zdenko Tonković; Ivica Skozrit; Martin Surjak; Janoš Kodvanj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-450; 115; 445; 425, e-mail: ztonkov@fsb.hr; ivica.skozrit@fsb.hr; martin.surjak@fsb.hr; janos.kodvanj@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lnm/staff/

Lovre Krstulović-Opara; Željko Domazet, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, R. Boškovića 32, 21000 Split, tel. 021/305-981; 983, e-mail: Lovre.Krstulovic-Opara@fesb.hr; Zeljko.Domazet@fesb.hr, web stranica: www.fesb.hr/kontakt/zsb

Matej Vesenjajk, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Inštitut za konstrukterstvo in oblikovanje, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija, tel. +385 2 220 77 17, e-mail: matej.vesenjajk@um.si, web stranica: <http://lace.uni-mb.si/vesenjajk/index.htm>

PARAMETRIZACIJA POMAKA I ROTACIJA ŠESTERODIMENZIONALNIM VEKTORIMA

Gaćeša, M. i Jelenić, G.

Sažetak: U radu je dan prikaz ideje konfiguracijskog tenzora koju su predložili Bottasso i Borri, a temelji se na generalizaciji rotacija, koje pripadaju specijalnoj grupi ortogonalnih transformacija $SO(3)$, na konfiguracije, koje pripadaju specijalnoj grupi krutih pomaka $SR(6)$. Kao rezultat dobili su formulaciju konačnog elementa u kojoj su stupnjevi slobode objedinjeni pa se popravci i pomaka i rotacija tretiraju na analogan način na koji se tretiraju popravci rotacija u standardnim formulacijama.

Ključne riječi: rotacijski tenzor, velike rotacije, fixed-pole pristup, konfiguracijski tenzor

1 UVOD

Prostorne rotacije predstavljaju jedan od izazova modeliranja problema iz raznih područja mehanike, bez obzira na to radi li se o krutim tijelima, deformabilnim tijelima ili mehanizmima. S obzirom na to da se rotacija može predstaviti kao kretanje točke u trodimenzionalnoj nelinearnoj mnogostrukosti, Liejevoj grupi $SO(3)$ specijalnih ortogonalnih transformacija [2], njihova parametrizacija potrebna je pri formulaciji takvih problema. Bauchau i Trainelli [2] dali su vrlo detaljan prikaz postojećih parametrizacija rotacija (vektorskih i nevektorskih) te su pokazali da se sve vektorske parametrizacije mogu svesti u istu familiju parametrizacija koje se samo razlikuju u odabiru generirajuće funkcije. Borri, Trainelli i Bottasso [3] predložili su analogan prikaz parametrizacija konfiguracija (položaj i rotacija) u grupi koju su nazvali $SR(6)$ (specijalna grupa krutih pomaka). U ovome radu ukratko sažimamo te rezultate i naglašavamo njihovu povezanost.

2 LIEJEVE GRUPE

Liejeva grupa je glatka mnogostrukost koja zadovoljava svojstva grupe i zadovoljava svojstvo da su operacije grupe diferencijabilne. Za svaku Liejevu grupu uvijek postoji odgovarajuća Liejeva algebra između kojih je definirano preslikavanje pomoću eksponencijalne mape [5]. Općenito, eksponencijalnu mapu proizvoljne matrice \mathbf{A} možemo prikazati beskonačnim redom [4]

$$\exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \quad (1)$$

Izraz (1) u posebnim slučajevima (zbog rekurzivnih svojstava potencija matrice \mathbf{A}) može imati zatvoreni oblik i dva takva slučaja ćemo prikazati u nastavku.

3 ROTACIJSKI TENZOR

Kao što je rečeno u uvodu, rotacijski tenzori pripadaju specijalnoj diferencijabilnoj grupi ortogonalnih transformacija, $\Lambda \in \text{SO}(3)$. Rotacijski tenzor Λ je, dakle, ortogonalna matrica za koju vrijedi $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$, $\det \Lambda = +1$ i koja je, eksponentnom mapom povezana s odgovarajućim elementom Liejeve algebre, $\widehat{\psi} \in \text{so}(3)$. Elementi Liejeve algebre $\text{so}(3)$ su antisimetrične matrice trećega reda s komponentama ψ_1, ψ_2, ψ_3 u obliku

$$\widehat{\psi} = -\widehat{\psi}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

U kontekstu trodimenzionalnih rotacija vektor $\psi = \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle^T$ nazivamo rotacijskim pseudovektorom. Važno je napomenuti da komponente ovog vektora *ne* označavaju rotacije s obzirom na odgovarajuće koordinatne osi. Zamislimo neku poznatu početnu orijentaciju Λ_0 ortonormirane baze u prostoru. Zamislimo da sada želimo tu orijentaciju zarotirati oko osi ψ za iznos $\psi = |\psi| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$ u novu orijentaciju Λ . Tada su te dvije orijentacije povezane na sljedeći način [1]

$$\Lambda = \exp \widehat{\psi} \Lambda_0. \quad (3)$$

Ukoliko izračunamo $\exp \widehat{\psi}$ pomoću formule za eksponencijalnu mapu (1), imamo

$$\exp \widehat{\psi} = \mathbf{I} + \widehat{\psi} + \frac{1}{2} \widehat{\psi}^2 + \frac{1}{6} \widehat{\psi}^3 + \frac{1}{24} \widehat{\psi}^4 + \dots, \quad (4)$$

što se, zbog svojstva rekurzivnosti matrica u $\text{so}(3)$ [4]

$$\widehat{\psi}^{2k-1} = (-1)^{k-1} \psi^{2(k-1)} \widehat{\psi}, \quad (5)$$

$$\widehat{\psi}^{2k} = (-1)^{k-1} \psi^{2(k-1)} \widehat{\psi}^2, \quad (6)$$

može zapisati u zatvorenom obliku kao

$$\exp \widehat{\psi} = \mathbf{I} + \frac{\sin \psi}{\psi} \widehat{\psi} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \widehat{\psi}^2. \quad (7)$$

Izraz (7) često nazivamo Rodriguesovom formulom i predstavlja najjednostavniji oblik vektorske parametrizacije rotacija [2]. Agryris [1] je dao vrlo zornu geometrijsku interpretaciju trodimenzionalnih rotacija kao i svojstava trodimenzionalnih rotacija koja slijede iz svojstava elemenata grupe $\text{SO}(3)$.

4 KONFIGURACIJSKI TENZOR

Bottasso i Borri [4] su vrlo temeljito prikazali mogućnost objedinjavanja definicije položaja i orijentacije ortonormirane baze konfiguracijskim tenzorom \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Prva matrica, nazvana transportnim operatorom, proizlazi iz uspostavljanja relacije između brzine ortonormiranog okvira i brzina s obzirom na neku fiksnu točku u prostoru, nazvanu *fixed-pole* brzinom. $\mathbf{0}$ predstavlja trodimenzionalnu nul-matricu, dok \mathbf{r} predstavlja vektor položaja promatrane točke. Druga matrica se sastoji od standardnih rotacijskih matrica Λ koje su elementi $\text{SO}(3)$ grupe sa svojstvima prikazanim u prethodnom poglavlju. Autori

su pokazali vrlo jasnu analogiju između konfiguracijskog tenzora, za koji su pokazali da je element specijalne grupe krutih pomaka SR(6), i rotacijskih matrica koje su elementi specijalne grupe ortogonalnih transformacija SO(3).

Ako je SR(6) Liejeva grupa, to znači da mora postojati i Liejeva algebra sr(6). Neka je $\nu = \langle \nu_1 \ \nu_2 \rangle^T$, ν_1 i $\nu_2 \in \mathbb{R}^3$, $\overset{\times}{\nu}$ je

$$\overset{\times}{\nu} = \begin{bmatrix} \widehat{\nu}_2 & \widehat{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & \widehat{\nu}_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ako je taj tenzor element odgovarajuće Liejeve algebre sr(6), između dvije konfiguracije \mathbf{C} i \mathbf{C}_0 postoji veza u obliku eksponencijalne mape

$$\mathbf{C} = \exp \overset{\times}{\nu} \mathbf{C}_0. \quad (10)$$

Da bismo to pokazali, uvrstimo $\overset{\times}{\nu}$ u (1),

$$\exp \overset{\times}{\nu} = \mathbf{I} + \overset{\times}{\nu} + \frac{1}{2} \overset{\times}{\nu}^2 + \frac{1}{6} \overset{\times}{\nu}^3 + \frac{1}{24} \overset{\times}{\nu}^4 + \frac{1}{5!} \overset{\times}{\nu}^5 + \frac{1}{6!} \overset{\times}{\nu}^6 + \dots, \quad (11)$$

i uočimo rekurzivnost matrica u sr(6) [4],

$$\overset{\times}{\nu}^{2k} = (-1)^k \left[(k-1) \nu_2^{2(k-2)} \overset{\times}{\nu}^4 + (k-2) \nu_2^{2(k-1)} \overset{\times}{\nu}^2 \right], \quad (12)$$

$$\overset{\times}{\nu}^{2k+1} = (-1)^k \left[(k-1) \nu_2^{2(k-2)} \overset{\times}{\nu}^5 + (k-2) \nu_2^{2(k-1)} \overset{\times}{\nu}^3 \right], \quad (13)$$

uz $\nu_2 = |\nu_2|$. Tako dolazimo do toga da će i $\exp \overset{\times}{\nu}$ imati zatvoreni oblik [4]

$$\exp \overset{\times}{\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^5 \delta_k \overset{\times}{\nu}^k, \quad (14)$$

gdje su δ_k trigonometrijske funkcije ν_2 koje sljede iz suma redova članova uz odgovarajuće potencije $\overset{\times}{\nu}$ [4]

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1, & \delta_2 &= \alpha_2(1 + \psi^2 \gamma_2), & \delta_3 &= \frac{1}{2}(5\beta_2 - \alpha_2), \\ \delta_4 &= \alpha_2 \gamma_2, & \delta_5 &= \frac{1}{2\psi^2}(3\beta_2 - \alpha_2), \\ \alpha_1 &= \frac{\sin \psi}{\psi}, & \alpha_2 &= \beta_1 = \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}, \\ \beta_2 &= \frac{\psi - \sin \psi}{\psi^3}, & \gamma_2 &= \frac{1}{\psi^2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Daljnjim sređivanjem dobijemo izraz

$$\exp \overset{\times}{\nu} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\nu}_2 & \heartsuit \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\nu}_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

gdje smo oznakom \heartsuit označili matricu¹ koja je izražena preko $\widehat{\nu}_1$ i $\widehat{\nu}_2$ na sljedeći način

$$\heartsuit = \alpha_1 \widehat{\nu}_1 - (\nu_1 \cdot \psi) (\alpha_2 - \beta_2) \widehat{\psi} - (\nu_1 \cdot \psi) 2\alpha_2 \gamma_2 \widehat{\psi}^2 + \alpha_2 (\widehat{\psi} \widehat{\nu}_1 + \widehat{\nu}_1 \widehat{\psi}), \quad (17)$$

¹Poduži izvod izostavljen je zbog sažetosti rada

s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ i γ_2 definiranim u (15). Uvrstimo li (8) i (16) u (10) dobivamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\nu}_2 & \heartsuit \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\nu}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Lambda & \widehat{\mathbf{r}}\Lambda \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\nu}_2 \Lambda_0 & \exp \widehat{\nu}_2 \widehat{\mathbf{r}}_0 \Lambda_0 + \heartsuit \Lambda_0 \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\nu}_2 \Lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

odakle slijedi

$$\Lambda = \exp \widehat{\nu}_2 \Lambda_0. \quad (19)$$

Ovdje prepoznajemo vezu (3) pa zaključujemo da donji dio vektora ν mora biti jednak rotacijskom pseudovektoru, dakle, $\nu_2 = \psi$. Izjednačavanje preostalog bloka u (18) daje

$$\widehat{\mathbf{r}}\Lambda = \exp \widehat{\nu}_2 \widehat{\mathbf{r}}_0 \Lambda_0 + \heartsuit \Lambda_0, \quad (20)$$

što, uvođenjem $\nu_2 = \psi$, kao i veze (3) dovodi do

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{r}} \exp \widehat{\psi} \Lambda_0 &= \exp \widehat{\psi} \widehat{\mathbf{r}}_0 \Lambda_0 + \heartsuit \Lambda_0 \\ \Rightarrow \widehat{\mathbf{r}} &= \exp \widehat{\psi} \widehat{\mathbf{r}}_0 \exp^{-1} \widehat{\psi} + \heartsuit \exp^{-1} \widehat{\psi}, \end{aligned} \quad (21)$$

Da bismo odredili čemu je jednak gornji dio vektora ν , potrebno je prepoznati da se $\widehat{\nu}_1$ krije u matrici \heartsuit (17). Uvažavajući činjenicu da je $\exp \widehat{\psi}$ antisimetrična matrica ($\exp^{-1} \widehat{\psi} = \exp^T \widehat{\psi}$), sređivanjem (21) uz prepoznavanje da s obje strane imamo antisimetrične matrice konačno dobivamo

$$\nu_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \widehat{\psi} + \gamma_2 \widehat{\psi}^2 \right) \mathbf{r} - \left(\mathbf{I} - \beta_1 \widehat{\psi} + \beta_2 \widehat{\psi}^2 \right) \mathbf{r}_0, \quad (22)$$

što nam daje konačni oblik vektora ν

$$\nu = \left\{ \begin{array}{l} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \widehat{\psi} + \gamma_2 \widehat{\psi}^2 \right) \mathbf{r} - \left(\mathbf{I} - \beta_1 \widehat{\psi} + \beta_2 \widehat{\psi}^2 \right) \mathbf{r}_0 \\ \psi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}^{-1}(\psi) \widehat{\mathbf{r}} - \mathbf{H}^T(\psi) \mathbf{r}_0 \\ \psi \end{array} \right\}, \quad (23)$$

koji je topološki ekvivalentan odgovarajućem elementu Liejeve algebre $sr(6)$ putem (9).

5 ZAKLJUČAK

Analogno vektorskoj parametrizaciji rotacija u $SO(3)$, Bottasso i Bori su pokazali da je moguća i vektorska parametrizacija konfiguracija u $SR(6)$ eksponencijalnom mapom u zatvorenom obliku! Ovo svojstvo omogućuje formuliranje problema kod kojih su stupnjevi slobode združeni te omogućuje objedinjeno popravljanje položaja i rotacija u iterativnim metodama.

Na temelju prikazanog izvedena je formulacija geometrijski točnog prostornog konačnog elementa temeljena na principu virtualnog rada čiji će rezultati biti prikazani u budućim radovima.

ZAHVALA

Istraživanje koje je rezultiralo ovim radom je provedeno u sklopu znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025: “Unapređivanje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama” koji je financijski podržalo Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske i u sklopu potpore Sveučilišta u Rijeci br. 13.05.1.3.06 “Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela”. Dodatno se zahvaljujemo Hrvatskoj zakladi za znanost koja je sufinancirala projekt br.

03.01/129 iz programa “Stipendije za doktorante” s naslovom “Očuvanje mehaničkih konstanti pri numeričkoj integraciji nelinearnih jednadžbi kretanja grede u vremenu”.

Literatura

- [1] Argyris, J., “An excursion into large rotations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, No. 1-3, 1982, str. 85–155.
- [2] Bauchau, O.A., Trainelli, L., “The Vectorial Parameterization of Rotation”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 32, No. 1, 2003, str. 71–92.
- [3] Borri, M., Trainelli, L., Bottasso, C.L., “On Representations and Parameterizations of Motion”, *Multibody System Dynamics*, Vol. 4, No. 2-3, 2000, str. 129–193.
- [4] Bottasso, C., Borri, M., “Integrating finite rotations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 3-4, 1998, str. 307–331.
- [5] Hall, B., “Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction”, 2003.

Autori

Maja Gaćeša, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265957,
e-mail: maja.gacesa@uniri.hr

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265955,
e-mail: gordan.jelenic@gradri.hr

PRIMJENA NAVAL HYDRO PAKETA ZA PRORAČUN VALNIH OPTEREĆENJA

Gatin, I., Vukčević, V. i Jasak, H.

Sažetak: Ovaj rad prikazuje mogućnosti primjene programskog paketa `NavalHydro` u programu `OpenFOAM` na probleme određivanja valnih opterećenja u brodogradnji. Diskretizacija Navier-Stokesovih jednadžbi se provodi metodom kontrolnih volumena, dok se za praćenje slobodne površine koristi „Volume of Fluid“ metoda.

Paket `NavalHydro` prilagođen je provođenju proračuna gdje su prisutni značajni utjecaji slobodne površine, što ga čini pogodnim za određivanje valnih opterećenja. U ovom radu je prikazan proračun opterećenja vertikalnog cilindra uslijed nailaska harmonijskih valova. Rezultati su uspoređeni s eksperimentalnim podacima. Uz to je prikazana simulacija ekstremnog vala (eng. „*freak wave*“), koja pokazuje mogućnost određivanja opterećenja uslijed ovakvih pojava.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida, valna opterećenja, ekstremni val, Volume of Fluid, OpenFOAM

1 UVOD

Proračun valnih opterećenja na nepomične konstrukcije te ostale objekte pomorske tehnike predstavlja složen problem. Valna opterećenja predstavljaju dominirajući projektni parametar prilikom projektiranja pučinskih nepomičnih objekata. Velik dio problema vezan za valna opterećenja nije moguće izračunati pomoću konvencionalnih linearnih potencijalnih metoda. Zbog toga se u ovom radu ispituje mogućnost korištenja računalne dinamike fluida (eng. „*Computational Fluid Dynamics*“, CFD) u svrhu opisivanja pojava vezanih uz valna opterećenja.

Ovaj rad je organiziran na sljedeći način. U sljedećem poglavlju su kratko opisane matematičke jednadžbe na kojima se zasnivaju proračuni. Tu su obuhvaćene Navier-Stokesove jednadžbe i jednadžba na kojoj se temelji „Volume of Fluid“ metoda. Kratko je opisana i metoda modeliranja valova. U trećem poglavlju dani su rezultati provedenih simulacija. Prvom simulacijom se provodio proračun opterećenja vertikalnog cilindra u polju pravilnih harmonijskih valova, dok se u drugoj simulirao ekstremni val (eng. „*freak wave*“). Na kraju je dan zaključak.

2 MATEMATIČKI MODEL

Strujanje viskoznog fluida opisano je Navier–Stokesovim jednadžbama koje predstavljaju zakon očuvanja količine gibanja, te jednadžbom kontinuiteta koja predstavlja zakon očuvanja mase. Ovdje su ukratko opisane spomenute jednadžbe te je dan kratki prikaz formulacije modela indikatorske funkcije korištene za „Volume of Fluid“ metodu. Kratko je prikazan i korišten način modeliranja valova.

2.1 Navier-Stokesove jednadžbe

Nestlačivo viskozno strujanje je opisano jednadžbom očuvanja mase i Navier-Stokesovim jednadžbama koje predstavljaju zakon očuvanja količine gibanja.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \mu + \sigma \kappa \nabla \alpha, \quad (2)$$

gdje je \mathbf{U} polje brzine, p je tlak, ρ je gustoća dok je μ dinamička viskoznost. \mathbf{g} je gravitacijsko ubrzanje. σ je koeficijent površinske napetosti, dok je κ srednja zakrivljenost slobodne površine [1]. α predstavlja vrijednost indikatorske funkcije korištene u „Volume of Fluid“ metodi za modeliranje slobodne površine.

2.2 „Volume of Fluid metoda modeliranja slobodne površine

Ova metoda opisuje slobodnu površinu pomoću indikatorske funkcije α koja predstavlja udio volumena pojedine faze u promatranom kontrolnom volumenu [1]. Svojstva fluida određuju se pomoću funkcije α pomoću izraza:

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2, \quad (3)$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2. \quad (4)$$

Funkcija α ima sljedeća svojstva:

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{za točku u fluidu 1,} \\ 0 < \alpha < 1, & \text{za prijelazno područje,} \\ 0, & \text{za točku u fluidu 2.} \end{cases} \quad (5)$$

2.3 Modeliranje valova pomoću relaksacijskih zona

Modeliranje valova se provodi stapanjem rješenja potencijalne valne teorije i rješenja koje nudi CFD proračun. U relaksacijskim zonama se vrši postepen prijelaz sa jednog na drugo rješenje [2]. Relaksacijske zone koriste se i za sprječavanje refleksije valova od kraja domene.

3 REZULTATI SIMULACIJA

U ovom poglavlju pokazani su rezultati simulacija provedenih za ovaj rad. U prvoj simulaciji vertikalni cilindar izložen je pravilnim harmonijskim valovima te su dobivene sile opterećenja uspoređene s eksperimentalnim podacima. Druga simulacija prikazuje mogućnost proračuna opterećenja uslijed nailaska ekstremnog vala (eng. „*freak wave*“).

3.1 Simulacija valnih opterećenja vertikalnog cilindra

Provedene su simulacije za pet različitih nailaznih harmonijskih valova te su rezultati uspoređeni s eksperimentalnim podacima iz [3]. Simulacija je u potpunosti provedena u skladu s eksperimentalnim ispitivanjem.

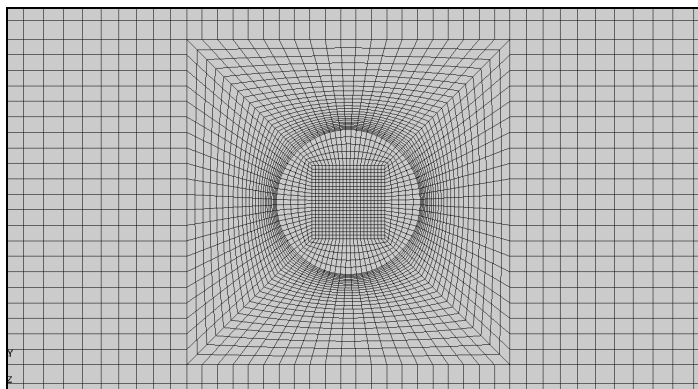
Eksperimentalno ispitivanje provedeno je u bazenu dugačkom 36.5 m, širokom 2.4 m i dubokom 1.5 m. Cilindrični stup uronjen je vertikalno u bazen do dubine od 27 cm. Dakle, cilindar se ne proteže do dna. Promjer cilindra je 89 mm. Cilindar je postavljen na udaljenosti od 13.7 m od generatora valova. Dani su podatci o maksimalnim silama u smjeru uzdužne osi bazena koji su utvrđeni na temelju mjerenja sile tokom deset perioda vala. U Tabl. 1 dani su parametri ispitivanih valova. Domena simulacije je smanjena u odnosu na eksperimentalne postavke zbog uštede proračunskog vremena. Valovi su

modelirani koristeći relaksacijske zone [2] gdje se nameću brzine iz potencijalne teorije. Na kraju domene postavljena je izlazna relaksacijska zona koja sprječava refleksiju valova o stražnji zid domene.

Tabl. 1. Karakteristike nailaznih valova

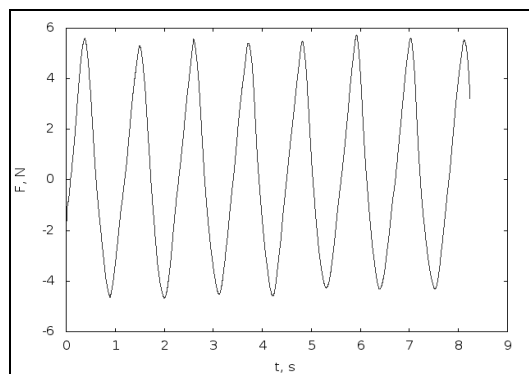
N	Frekvencija f , Hz	Nagib vala $k*\eta_a$, rad	Valni broj k , rad/m	Valna visina h , m	Valna duljina λ , m	Period T , s
1	0.70	0.06	1.97	0.060	3.19	1.43
2	0.70	0.12	1.97	0.120	3.19	1.43
3	0.90	0.20	3.26	0.123	1.93	1.11
4	1.10	0.12	4.87	0.050	1.30	0.90
5	1.43	0.20	8.83	0.049	0.76	0.70

Mreža kontrolnih volumena u blizini cilindra prikazana je na Sl. 1. Korišteno je linearno skaliranje veličina kontrolnih volumena na način da je mreža finija blizu oplakane površine cilindra. Na Sl. 2 je prikazan primjer signala sile dobiven simulacijom za slučaj val broj 3 iz Tabl. 1. Za svaki val je iz dobivenog signala određen maksimum sile i uspoređen sa eksperimentalnim podacima. Usporedba rezultata i podaci o pojedinim simulacijama dani su u Tabl. 2.



Sl. 1. Prikaz mreže kontrolnih volumena u blizini cilindra

Iz Tabl. 2 može se vidjeti da se rezultati vrlo dobro slažu sa eksperimentalnim podacima za prva tri vala. Za valove viših frekvencija odstupanja su veća. Za te valove su stoga provedene simulacije sa profinjenim mrežama što je za val broj 5 dovelo do znatnog smanjenja greške. Treba napomenuti da je mreža od 2 800 000 ćelija još uvijek relativno gruba mreža za promatrani problem. Daljnjim profinjavanjem mreže zasigurno bi se došlo do točnijih rezultata. Rezultati pokazuju zavisnost o vertikalnoj finoći mreže, odnosno o broju ćelija po valnoj visini. Courantov broj također utječe na rezultat.



Sl. 2. Prikaz signala sile za val broj 3

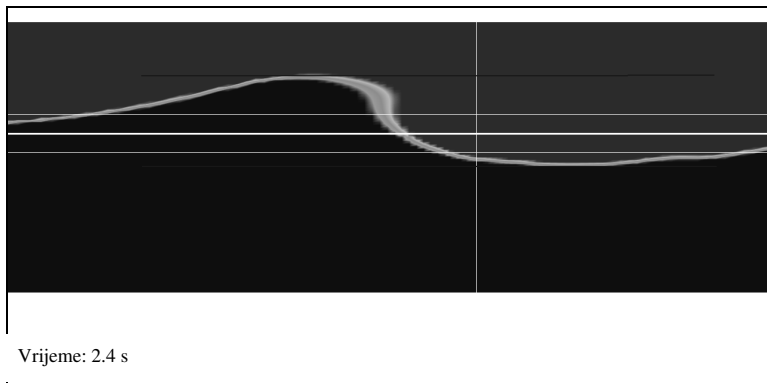
Tabl. 2. Usporedba eksperimentalnih podataka i CFD rezultata

Broj vala N	CFD rezultati F_x, N	Eksp. rezultati F_x, N	Relativna pogreška $Err, \%$	Broj ćelija	Courantov broj Co
1	1.778	1.80	1.22	1 728 490	6.0
2	4.790	5.00	4.20	1 728 490	6.0
3	5.573	5.70	2.23	1 728 490	2.0
4	2.390	2.80	14.64	1 728 490	1.5
4	2.361	2.80	15.68	2 805 810	1.5
5	2.650	3.08	13.96	1 728 490	2.0
5	2.854	3.08	7.34	2 629 410	2.0

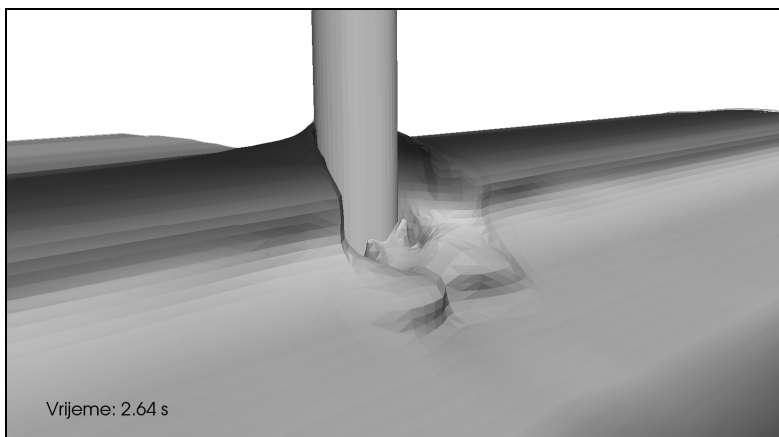
3.2. Generiranje ekstremnog vala

Ekstremni val je prema najšire prihvaćenoj teoriji val čija visina premašuje značajnu valnu visinu pripadnog stanja mora za dva ili više puta [4]. U ovom podpoglavlju je prikazana simulacija ekstremnog vala koji je inicijaliziran pomoću standardnog valnog spektra. Ekstremni val dobiven je metodom fokusiranja valova, odnosno linearnom superpozicijom 30 valnih komponenti prema preporuci iz [5]. Amplitude valnih komponenti određene su pomoću Pierson-Moskovitz valnog spektra. Fazni pomaci dobiveni su optimizacijskim alatom na način da se dobije pozitivna superpozicija valnih komponenti na točno željenom mjestu i u željenom trenutku. Korištena je ista domena kao u simulacijama prethodnog podpoglavlja.

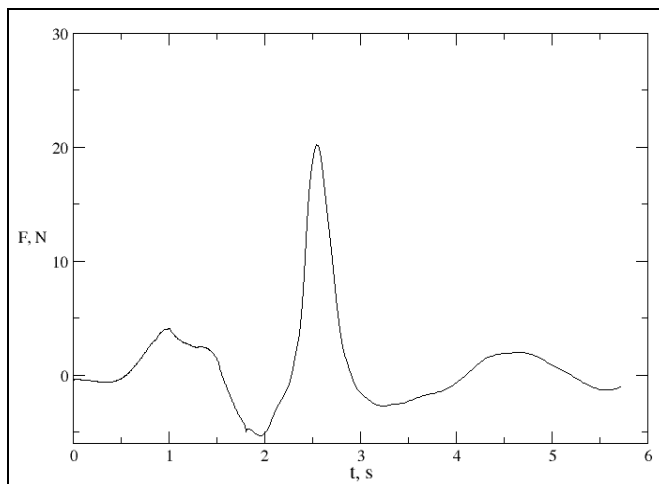
Sl. 3 prikazuje profil vala u simulaciji u trenutku neposredno prije vremena fokusiranja. Plavom bojom prikazano je područje gdje je vrijednost funkcije α jednaka 1 (voda), dok je crvenom bojom prikazan zrak ($\alpha = 0$). Zelena boja predstavlja prijelazno područje vrijednosti funkcije α . Na Sl. 3 horizontalna deblja bijela linija označava položaj razine mirne slobodne površine. Tanke bijele horizontalne linije prikazuju pozitivnu i negativnu amplitudu koja odgovara značajnoj valnoj visini. Crne horizontalne linije prikazuju brijeg i dol ekstremnog vala. Razlika u visini je očita, te kvalificira ovaj val kao ekstreman val. Bijela vertikalna linija pokazuje položaj središta cilindričnog stupa, val propagira s lijeva na desno. Sl. 4 prikazuje trenutak udara vala u cilindar. Očito je da je riječ o vrlo nelinearnoj pojavi.



Sl. 3. Prikaz profila vala u simulaciji



Sl. 4. Prikaz simulacije u trenutku udara ekstremnog vala



Sl. 5. Sila opterećenja cilindra u ovisnosti o vremenu

Na Sl. 5 je prikazan iznos sile opterećenja u smjeru uzdužne osi u ovisnosti o vremenu. Vidljivo je da dolazi do vrlo naglog porasta sile, što ovaku pojavu čini iznimno opasnom za pučinske objekte i brodove.

4 ZAKLJUČAK

U ovom radu su prikazane simulacije koje pokazuju mogućnost korištenja CFD proračuna u svrhe rješavanja problema valnih opterećenja. Za diskretizaciju je korištena metoda kontrolnih volumena, dok je za modeliranje slobodne površine korištena metoda "Volume of Fluid"

Simulacije provedene u prvom slučaju prikazanom u podpoglavlju 3.1. pokazuju dobra slaganja s eksperimentalnim podacima. Drugi slučaj pokazuje mogućnost određivanja opterećenja uslijed nailaska ekstremnog vala, što se vrlo teško postiže dosadašnjim metodama. U tom smislu može se reći da se numeričke simulacije u OpenFOAM-u svakako mogu koristiti za svrhe projektiranja objekata morske tehnike. Znatne uštede mogu se postići zahvaljujući smanjenju margina sigurnosti uslijed preciznijeg određivanja ekstremnih opterećenja te manjom cijenom simulacija u odnosu na eksperimentalna ispitivanja.

Literatura:

- [1] Ubbink, O., Issa, R.I., "A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes", Journal of Computational Physics, Vol.153, No.1, 1999, str. 26-50.
- [2] Jacobsen, N.G., Fuhrman, D.R., Fredsøe, J., "A Wave Generation Toolbox for the Open-Source CFD library: OpenFoam", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.70, No.9, 2012, str.1073-1088.
- [3] Boo, S.Y., "Measurements of higher harmonic wave forces on a vertical truncated circular cylinder", Ocean Engineering, Vol.33, 2006, str. 219-233.
- [4] Kharif, C., Pelinovsky, E., "Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon", European Journal of Mechanics - B/Fluids, Vol.22, 2003, str. 603-634.
- [5] Zhao, X., "Numerical simulation of extreme wave generation using VOF method", Journal of hydrodynamics, Vol.22, 2010, str. 466-477.

Autori:

Inno Gatin, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za brodogradnju, Ivana Lučića 5, e-mail: ig185258@stud.fsb.hr

Vuko Vukčević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, tel. 01/6168-239, e-mail: vuko.vukcevic@fsb.hr

Hrvoje Jasak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, tel. 01/6168-239, e-mail: hrvoje.jasak@fsb.hr

OPTIMALNI DIZAJN NEPNEUMATSKE GUME KOTAČA POMOĆU GENETIČKOG ALGORITMA

Ivić S., Ćiković K. i Družeta S.

Sažetak: Nepneumatske gume kotača, kao zanimljiva alternativa standardnim pneumaticima, u novije vrijeme se ubrzano razvijaju. U radu se opisuje metodologija optimizacije dizajna nepneumatske gume kotača, temeljena na strukturalnoj analizi ponašanja gume i provedena pomoću genetičkog algoritma. Geometrija gume dobiva se na temelju ponavljajućeg uzorka sačaste strukture, koji se parametarski određuje tijekom optimizacijskog procesa. Geometrija gume se u optimizacijskom procesu testira na četiri različite vrste opterećenja, rezultati čega se u kombinaciji sa ukupnom masom gume koriste za ocjenu kvalitete partikularnog dizajna. Rezultati dobiveni na korištenom test-primjeru pokazuje da je opisana metodologija vrlo uspješna te kao takva predstavlja potencijalno plodan smjer daljnjeg istraživanja.

Ključne riječi: nepneumatska guma, optimalni dizajn, strukturalna analiza

1 UVOD

Posljednjih nekoliko godina svjedočimo ubrzanom razvoju nepneumatskih guma kotača, kao modernog rješenja za kotače vojnih, teretnih i raznih specijalnih vozila, uz eventualnu buduću primjenu i kod običnih putničkih automobila. U usporedbi sa konvencionalnim pneumatskim kotačima, ovakve gume imaju veću otpornost na oštećenja (ne mogu se ispuhati), teoretski mogu dati bolja mehanička svojstva te bitno umanjuju ili potpuno eliminiraju pojavu akvaplaninga.

Cilj ovog rada bio je razviti metodologiju za optimalni dizajn nepneumatske gume kotača, a koja će biti temeljena na strukturalnoj analizi deformacije gume pri različitim vrstama opterećenja. Imajući u vidu zahtjev za robusnost optimizacijskog postupka i prisutnost diskretnih optimizacijskih parametara, kao optimizacijska metoda izabran je genetički algoritam.

2 PARAMETRIZACIJA DIZAJNA NEPNEUMATSKE GUME

Trodimenzionalnu strukturu nepneumatske gume moguće je modelirati pojednostavljenim ravninskim modelom konstantne širine temeljenim na grednim elementima. Geometrija nepneumatske gume se promatra u poprečnom presjeku gume i sačinjena je od linijskih segmenata.

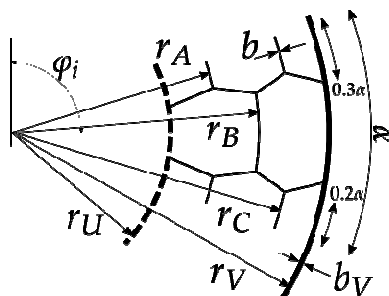
Dimenzioniranje nepneumatske gume temelji se na određivanju sačaste strukture gume koja je određena ponavljajućim kružnim uzorkom. Kako bi se omogućilo fleksibilno definiranje sačaste strukture potrebno je parametrizirati uzorak na temelju kojeg se određuje dizajn cijele gume. Zbog praktičnosti, parametrizacija i formulacija geometrije te numeričke mreže napravljena je u polarnom koordinatnom sustavu.

Broj uzoraka n definira veličinu pojedinog uzorka, a ona se može izraziti pomoću kuta kružnog isječka kojeg uzorak opisuje: $\alpha = 360^\circ/n$. Svaki i -ti uzorak je osno-simetričan s

obzirom na radijalnu os uzorka koja je postavljena pod kutom $\varphi_i = i \cdot \alpha$ u odnosu na vertikalnu os poprečnog presjeka.

Pretpostavljeno je da je ponavljajući uzorak sačinjen od dužina i kružnih lukova kojima su omeđene šesterokutne i četverokutne praznine gume. Radijalne koordinate točaka definirane su pomoću parametara r_A , r_B i r_C dok se kutne koordinate indirektno definirane preko broja uzoraka n , a izračunavaju se kao udio širine uzorka (Slika 1). Polumjeri unutarnjeg i vanjskog plašta gume su unaprijed zadani i iznose $r_U = 203$ mm i $r_V = 403$ mm.

Osim navedenim radijalnim dimenzijama, dizajn nepneumatske gume je definiran širinom gume a te debljinom elemenata sačaste strukture b i debljinom vanjskog plašta gume b_V . Debljina unutarnjeg cilindričnog plašta iznosi 1 cm.



Sl. 1. Parametrizacija geometrije nepneumatske gume

3 STRUKTURALNA ANALIZA

Simulacija deformacije nepneumatske gume [2, 3] pri raznim opterećenjima provedena je u softveru Abaqus Student Edition, na modelima koji su u automatiziranom procesu generirani tijekom optimizacijskog procesa.

Parametarski definirana geometrija je diskretizirana i omrežena grednim elementima (B21 i B31 Abaqus elementima). Gustoća mreže se određuje automatski na temelju parametara geometrije na način da je svaki generirani gredni element duljine približno 1 cm.

Materijal koji se koristi u modelu je tvrda industrijska guma gustoće 1522 kg/m^3 . Odabrani materijal gume za potrebe ovog rada uzet je kao idealno elastičan, što predstavlja zadovoljavajuću aproksimaciju. Youngov modul gume iznosi 300 MPa, a Poissonov broj 0,5.

Za potrebe strukturalne analize, tj. ocjene mehaničkih performansi gume, osmišljena su četiri scenarija opterećenja gume, za svaki od kojih je definirana sila sa različitim hvatištem, iznosom i smjerom (Slika 2). U svim scenarijima opterećenja gume na unutarnji prsten modela gume su postavljeni fiksni oslonci tj. spriječeno je gibanje u svim stupnjevima slobode.

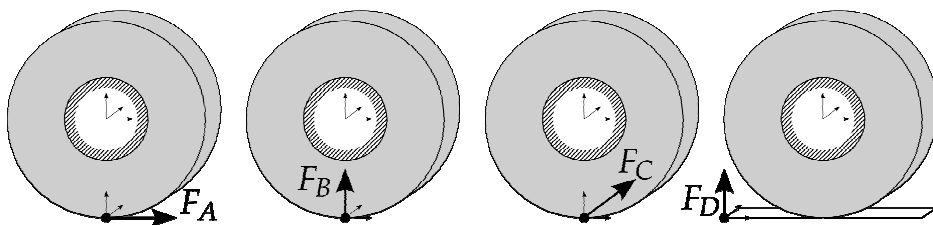
U prvom je scenariju sila iznosa 4500 N zadana u jednom čvoru modela te djeluje tangencijalno na vanjski prsten kotača. S tako postavljenom silom modelira se slučaj naglog pokretanja i zaustavljanja vozila.

Drugi scenarij simulira prelazak gume preko prepreke, gdje je ukupna aplicirana sila iznosa 7500 N raspoređena na tri čvora u dnu gume i djeluje vertikalno u smjeru središta kotača.

Skretanje vozila i naprezanja u zavoju modelirali smo u trećem scenariju, gdje sila od 7500 N, raspoređena na tri čvora u dnu gume, djeluje u smjeru z-osi, bočno na gumu. Ovo opterećenje zahtjeva modeliranje strukture u trodimenzionalnom prostoru i korištenje B31 Abaqus prostornih grednih elemenata.

U posljednjem scenariju, najsloženijem i numerički najzahtjevnijem slučaju, modelira se kontakt gume i podloge [2, 3]. Radi jednostavnosti guma je postavljena fiksno, a na podlogu, kao kruto tijelo, aplicirana je vertikalna sila. Podloga se tako giba prema gumi u smjeru sile te se ostvaruje kontakt. Ovaj slučaj istovjetan je stvarnom slučaju kada bi podloga bila fiksna, a guma pod utjecajem vlastite težine i težine vozila vršila pritisak na podlogu. Sila je iznosa 4500 N, tj. otprilike $\frac{1}{4}$ težine vozila.

Diskretizacija kontakta se provodi *surface-to-surface* formulacijom uz praćenje kontaktne interakcije metodom malog klizanja (*small sliding*). Kontakt između gume i podloge je modeliran kao tvrdi kontakt.



Sl. 2. Četiri različita scenarija opterećenja gume

Za svaki navedeni scenarij opterećenja, nakon provedene simulacije, može se više izračunatih veličina uzeti kao kriterij za ocjenu dizajna gume. Za potrebe kriterija čvrstoće u obzir je uzeto maksimalno von Misesovo naprezanje, a za procjenu voznih svojstava gume korišten je maksimalni pomak.

4 OPTIMIZACIJSKI POSTUPAK

Problem optimalnog dizajna nepneumatske gume spada u probleme optimizacije oblika. Optimizacija oblika se može temeljiti na različitim formulacijama problema, parametrizaciji geometrije, kriterijima i ciljevima, dok se optimizacijski proces može provesti primjenom niza različitih optimizacijskih tehnika.

4.1 Definicija optimizacijskog problema

Optimizacijski problem definiran je optimizacijskim varijablama, ciljevima optimizacije i ograničenjima. Optimizacijske varijable su oni parametri kojima je definiran dizajn nepneumatske gume (opisanog u poglavlju 2), a to su: broj uzoraka n , geometrijski parametri r_A , r_B , r_C , širina gume a te debljine stijenki b i b_v .

Cilj optimizacije je minimizacija mase nepneumatske gume, što direktno utječe na proizvodnu cijenu gume, ali i na energetska efikasnost vozila. Ograničenja su temeljena na rezultatima strukturalne analize i razlikuju se s obzirom na promatrano opterećenje gume (Tablica 1).

Tabl. 1. Ograničenja optimizacijskog problema

Scenarij opterećenja	A	B	C	D
Maksimalno dopušteno naprezanje [MPa]	25	25	25	25
Maksimalni dopušteni pomak [mm]	35	50	10	10

4.2 Funkcija cilja

Funkcija cilja se koristi za izračunavanje dobrote (*fitness*) rješenja. Vrijednost dobrote prvenstveno se temelji na cilju optimizacije, ali i na ograničenjima. Osnovu funkcije cilja tako ovdje predstavlja masa gume, koja je uvedena u funkciju cilja kao normirana vrijednost:

$$O = \frac{m}{m_0}, \quad (1)$$

gdje je m_0 očekivana masa gume i iznosi 30 kg.

Provjera ograničenja implementirana je u funkciju cilja pomoću penalizacije [1], gdje se za svako propisano ograničenje izračunava kazneni dodatak na funkciju cilja, ovisno o tome da li je, i u kojoj mjeri, dotično ograničenje prekršeno:

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{za } c_i \leq c_{dop} \\ \frac{c_i}{c_{dop}} & \text{za } c_i > c_{dop} \end{cases}, \quad (2)$$

gdje je c_i maksimalno naprezanje ili maksimalni pomak, a c_{dop} su dopuštena naprezanja ili pomaci, zadani u Tablici 1. Ukupni penal se dobiva kao suma svih penala:

$$P = \sum p_i. \quad (3)$$

Konačna vrijednost funkcije cilja se izračunava kao zbroj cilja optimizacije i penala:

$$F = O + P, \quad (4)$$

te se zahtjeva minimizacija funkcije cilja F , što će osim minimizacije same mase gume odnosno cilja O dati ujedno i smanjenje odnosno poništavanje svih penala P , tj. poštivanje svih ograničenja.

4.3 Genetički algoritam

Za optimizacijsku metodu za rješavanje opisanog optimizacijskog problema odabran je genetički algoritam. Genetički algoritam je stohastička optimizacijska metoda koja je inspirirana mehanizmima biološke evolucije kao što su reprodukcija, mutacija i prirodna selekcija [1]. Kao i kod većine evolucijskih algoritama, svaka jedinka predstavlja jedno moguće rješenje optimizacijskog problema, a definirana je vrijednostima optimizacijskih varijabli i ocjenjena dobrotom (eng. *fitness*) koju izračunava funkcija cilja.

Algoritam započinje generiranjem nasumičnih rješenja (jedinki) koje predstavljaju početnu populaciju nakon čega se odvija evolucijski proces. Evolucijski proces se odvija generacijski gdje u svakoj generaciji iz stare populacije rješenja nastaje nova populacija. Transfer genetičkog materijala u novu populaciju sastoji se od: selekcije tj. odabira boljih rješenja iz stare populacije, križanja, tj. razmjene genetičkog materijala (vrijednosti optimizacijskih varijabli) među odabranim jedinkama i mutacije, tj. nasumičnog mijenjanja vrijednosti optimizacijskih varijabli.

Zbog svoje robusnosti i primjenjivosti na raznovrsne optimizacijske probleme, a posebno na probleme sa diskretnim varijablama, genetički algoritam predstavlja adekvatnu metodu za rješavanje ovog problema. Genetički algoritam je implementiran koristeći Python modul *Inspyred*, uz postavke metode kako su dane u Tablici 2.

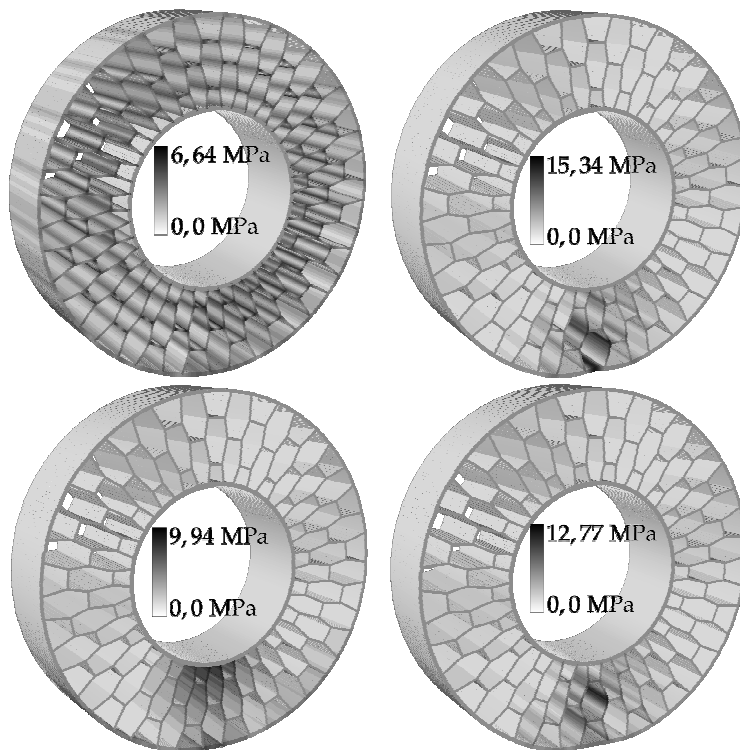
Tabl. 2. Parametri genetičkog algoritma

Veličina populacije:	20	Metoda križanja:	Aritmetičko križanje
Broj generacija:	100	Vjerojatnost križanja:	0,6
Metoda mutacije:	Gaussova mutacija	Metoda selekcije:	Turnirska selekcija
Vjerojatnost mutacije:	0,2	Turnirski uzorak:	3

5 REZULTATI

Najbolji dizajn nepneumatske gume dobiven opisanim optimizacijskim postupkom je definiran sljedećim parametrima: broj uzoraka $n = 22$, radijusi $r_A = 243$ mm, $r_B = 287$ mm, $r_C = 338$ mm, širina gume $a = 194$ mm, te debljine stijenki $b = 5,3$ mm i $b_V = 8,0$ mm.

Na Slici 3 prikazane su deformacije i naprezanja za sva četiri scenarija opterećenja najboljeg dizajna dobivenog optimizacijskim postupkom. Ovaj dizajn daje masu gume od 26,46 kg (88% od očekivane mase m_0) te maksimalna naprezanja i pomaci kako je dano u Tablici 3.



Sl. 3. Rezultati najboljeg rješenja za četiri različita scenarija opterećenja gume

Usporedbom dobivenih rezultata (Tab. 3) sa zadanim dopuštenim vrijednostima (Tab. 1) vidljivo je da su svi kriteriji u sva četiri slučaja opterećenja zadovoljeni i to često uz prilično veliku sigurnost naspram dopuštenih vrijednosti.

Tabl. 3. Maksimalna naprezanja i pomaci za najbolje rješenje

Scenarij opterećenja	A	B	C	D
Maksimalno naprezanje [MPa]	6,64	15,34	9,94	12,77
Maksimalni pomak [mm]	18,91	10,97	9,97	7,47

Detaljnijim uvidom u ponašanje optimizacijskog procesa može se vidjeti da je optimizacija dominantno vođena prema kriteriju krutosti u scenariju opterećenja C (bočna sila na gumu). Interesantno je da je u scenariju C od samog početka optimizacijskog

procesa ograničenje pomaka na granici dopuštenog. Naprezanja i deformacije u ostalim scenarijima opterećenja tijekom optimizacijskog procesa pretežno rastu ili osciliraju.

Također, detaljnom analizom dobivenih rezultata uočeno je da se broj ponavljajućih uzoraka n povećava tijekom optimizacijskog procesa, iz čega slijedi da je izbor manjih ćelija sačaste strukture gume prikladniji za korištene scenarije opterećenja i propisane kriterije.

6 ZAKLJUČAK

Postupak korišten u radu dobiven je integracijom strukturalne analize na parametarski zadanoj geometriji nepneumatske gume kotača te genetičkog algoritma kao optimizacijske metode. Prikazani rezultati pokazuju da je tako definirana optimizacijska metodologija adekvatna i vrlo uspješna u rješavanju problema optimalnog dizajna nepneumatske gume kotača.

Opisana metodologija mogla bi se unaprijediti upotrebom naprednijih odnosno dinamičkih scenarija opterećenja kotača te korištenjem fleksibilnije parametrizacije geometrije kotača, koja bi omogućavala raznovrsne osnovne uzorke geometrije kotača.

Literatura:

- [1] Engelbrecht, A. P., "Computational Intelligence". John Wiley & Sons, 2007.
- [2] Jagadish, R., "A computational investigation of contact pressure for a non-pneumatic wheel with a meta-material shear band", doktorska disertacija, Clemson University, 2010.
- [3] Veeramurthy, M., "Modeling finite element analysis, and optimization of Non-Pneumatic Tire (NPT) for the minimization of rolling resistance", doktorska disertacija, Clemson University, 2011.

Autori:

Stefan Ivić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-497, e-mail: stefan.ivic@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/stefan>

Karlo Ćiković, I. G. Strinina 12a, Rijeka, tel. 091 766 9313, e-mail: kciko@riteh.hr
Siniša Družeta, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-497, e-mail: sinisa.druzeta@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/sinisa>

PSO OPTIMIZACIJA MREŽE CJEVOVODA S OBZIROM NA TROŠKOVE INSTALACIJE I EKSPLOATACIJE

Ivić, S., Staver, I. i Kranjčević, L.

Sažetak: U radu se opisuje metodologija određivanja najboljeg dizajna mreže cjevovoda s obzirom na troškove instalacije i eksploatacije. Optimizacija se provodi na inicijalnoj mreži cjevovoda koja predstavlja mrežu svih mogućih trasa cjevovoda. Optimizacija rojem čestica (*Particle swarm optimization*) koristi se za određivanje promjera svih segmenata mreže cijevi, uz mogućnost isključivanja pojedinih segmenata mreže. Za svaki mogući segment cjevovoda poznata je cijena instalacije u ovisnosti o promjeru cijevi. U više čvorova mreže definirani su potrošači za koje je poznat potreban protok te minimalan tlak. Hidraulički proračun mreže cijevi izvodi se pomoću softvera EPANET kako bi se odredila potrebna dobavna visina pumpe koja zadovoljava propisane tlakove potrošača. Ocjena rasporeda mreže cijevi definira se troškovima instalacije, troškovima eksploatacije za zadani period. Rezultat optimizacijske procedure je dimenzionirana mreža cjevovoda za navodnjavanje poljoprivredne površine, koja predstavlja najisplativiju investiciju.

Ključne riječi: mreža cjevovoda, navodnjavanje, particle swarm optimization

1 UVOD

U projektiranju cjevovodnog sustava jedan od prvih koraka jest određivanje optimalne trase i promjera cijevi. Projektiranje optimalne mreže cjevovoda uzima u obzir troškove instalacije tj. izgradnje cjevovoda (cijena cijevi, građevinski radovi) te operativnih troškova rada cjevovoda (energija potrebna za rad crpki i hidraulički gubici). Često se inicijalne uštede u fazi projektiranja s jednostavnijom trasom kasnije skupo plaćaju kroz dugogodišnje više troškove eksploatacije.

Upotrebom računalnog postupka koji u sebi objedinjuje optimizaciju i hidrauličku analizu kreira se digitalni model mreže cijevi. Takav računalni model omogućuje fleksibilnost i adaptivnost glede promjenjivog početnog rasporeda mreže cjevovoda, pozicioniranja pumpe i potrebne dobave u čvorovima mreže cjevovoda. Primjena sličnog optimizacijskog postupka genetskim algoritam na sustav mreže za navodnjavanje uz dodatnu analizu pouzdanosti mreže, dana je u [1].

Predložena metodologija optimizacije testirana je na primjeru mreže navodnjavanja.

2 TROŠKOVI INSTALACIJE I EKSPLOATACIJE

Glavni kriterij predloženog dizajna mreže cjevovoda je trošak instalacije tj. izgradnje i trošak eksploatacije u zadanom periodu. Ukupni trošak je zbroj troškova instalacije i eksploatacije:

$$C = C_I + C_E, \quad (1)$$

gdje je C ukupni trošak, C_I je trošak instalacije, a C_E je trošak eksploatacije.

2.1 Troškovi eksploatacije i hidraulička analiza

Pretpostavljeno je stacionarno strujno polje u mrežnom sustavu cijevi pod tlakom, npr. fiksna otvorenost ventila, fiksna dobava u čvorove mreže, kontinuirani rad pumpi, veliki

spremnici, i dr. Jedna od najčešće korištenih metoda za analizu mreže cijevi je Hardy-Cross metoda. Ta metoda bazira se na pretpostavci da je pad tlaka zbog hidrauličkih gubitaka u svakom zatvorenom krugu jednak nuli te radi na principu balansiranja pada tlaka u zatvorenim krugovima mreže cijevi korigiranjem pretpostavljenih protoka pritom zadovoljavajući zakon očuvanja mase u svakom cijevnom spoju u sustavu. Iz matematičke perspektive, potrebno je numerički riješiti sustav nelinearnih algebarskih jednadžbi. Kod određenih konfiguracija mreže cjevovoda moguće je očekivati probleme konvergencije te numeričku nestabilnost. U ovom radu za hidrauličku analizu mreže koristi se računalni program EPANET [3], koji računa na principu spomenutog matematičkog i numeričkog modela.

Izračun troškova eksploatacije temelji se na potrebnoj snazi pumpe, cijeni električne energije te periodu eksploatacije. Snaga električne struje potrebna za eksploataciju cjevovoda dobivena je iz izraza:

$$P = \frac{Q \cdot \rho \cdot g \cdot h}{\eta}, \quad (2)$$

gdje su Q protok, ρ gustoća vode, g ubrzanje sile teže, h potrebna dobavna visina pumpe i η iskoristivost pumpe. Potrebna dobavna visina pumpe je ona za koju je u svim čvorovima potrošača zadovoljen potreban tlak.

Trošak eksploatacije predstavlja potrebna financijska sredstva za rad sustava cjevovoda u zadanom periodu, a jednak je:

$$C_E = 1000 \cdot P \cdot T \cdot c_E, \quad (3)$$

gdje T period eksploatacije izražen u satima, a c_E cijena električne energije u €/kW/h). Za potrebe ovog rada usvojena je cijena električne energije $c_E=0.1$ €/kW/h).

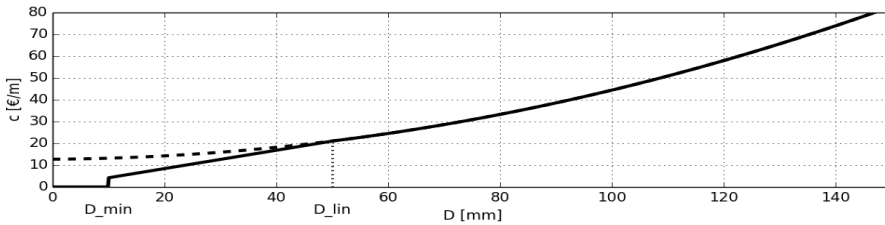
2.2 Troškovi instalacije

Procjena troška izgradnje cjevovoda obuhvaća cijenu cijevi te troškove građevinskih radova. Zbog jednostavnosti, pretpostavljeno je da je trošak građevinskih radova proporcionalan cijeni cijevi. Cijena izgradnje mreže cjevovoda je zbroj cijena svakog segmenta [4]:

$$C_I = k_G \cdot \sum_i c_i \cdot l_i, \quad (4)$$

$$c_i = 0.003 \cdot D_i^2 + 0.0169 \cdot D_i + 12.708, \quad (5)$$

gdje je k_G koeficijent troškova građevinskih radova, c_i jedinična cijena u €/m i-tog segmenta, l_i duljina i-tog segmenta i D_i promjer i-tog segmenta mreže cjevovoda izražen u milimetrima. Za primjer u ovom radu usvojen je $k_G=2$, što znači da je trošak građevinskih radova jednak cijeni cijevi. Iako je izraz (5) dobra procjena jedinične cijene cijevi ovisno o promjeru, zbog mogućnosti isključivanja segmenata mreže cjevovoda potrebno je korigirati jediničnu cijenu za male promjere kako bi krivulja jedinične cijene imala strmiji pad i time omogućila lakše isključivanje segmenata zbog niže cijene. Jedinična cijena cijevi za promjere manje od 50 mm je linearno ovisna o promjeru, dok se cijevi promjera manjeg od 10 mm smatraju isključenim i njihova cijena jednaka je nuli (Sl. 1).



Sl. 1. Ovisnost jedinične cijene cijevi o promjeru

3 OPTIMIZACIJSKI POSTUPAK

Optimizacijski postupak objedinjava PSO (*Particle Swarm Optimization*) optimizacijsku metodu i funkciju cilja temeljenu na hidrauličkom EPANET proračunu te procjeni građevinskih troškova. U nastavku poglavlja biti će detaljnije opisan optimizacijski postupak.

3.1 Definicija optimizacijskog problema

Dizajn mreže cjevovoda definiran je promjerima segmenata mreže. U formulaciji optimizacijskog problema u ovom radu nema drugih optimizacijskih varijabli, pa vektor optimizacijskih varijabli (*design vector*) sadrži promjere svih segmenata:

$$X = (D_1, D_2, \dots, D_n). \quad (6)$$

Sve optimizacijske varijable tj. promjeri segmenta su realni brojevi na temelju čega se ovaj optimizacijski problem može klasificirati kao kontinuirani, iako ima karakteristike kombinatornog problema zbog mogućnosti uključivanja i isključivanja segmenata mreže cjevovoda.

Prostor pretraživanja definiran je granicama optimizacijskih varijabli, koje su u ovom slučaju jednake za sve segmente, pa vrijedi:

$$D_i \in [0 \text{ mm}, 850 \text{ mm}]. \quad (7)$$

Funkcija cilja izračunava dobrotu (*fitness*) svakog vektora optimizacijskih varijabli, a izračun se temelji na cilju optimizacije i penalima:

$$F(X) = C(X) + \sum_i p_i(X), \quad (8)$$

gdje F dobrotu, C su ukupni troškovi (opisano u poglavlju 2), a p_i je penal i -tog segmenta zbog kršenja propisanih ograničenja.

U funkciju cilja je implementirano penaliziranje kako bi se povećala učinkovitost optimizacijskog postupka [2]. Penalizira se svaki segment u kojem je protok manji od 1.0 l/min kako bi se pospješilo gašenje nepotrebnih segmenata:

$$p_i = \begin{cases} 0,05 \cdot c_i & \text{ako je } Q_i < 1 \text{ l/min} \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \quad (9)$$

gdje je c_i cijena instalacije i -tog segmenta te Q_i protok u i -tom segmentu.

3.2 PSO metoda

Optimizacija rojem čestica (PSO, *Particle Swarm Optimization*) je heuristička optimizacijska metoda inspirirana gibanjem rojeva ili jata [2]. Osnovni mehanizam metode je zakon gibanja svake čestice (*particle*) unutar roja (*swarm*), dok je njihovo kolektivno gibanje složeno i omogućuje inteligentno ispitivanje prostora pretraživanja (*swarm intelligence*). Gibanje čestica i cijelog roja dešava se u n -dimenzionalnom prostoru, gdje je n broj optimizacijskih varijabli. Svaka čestica predstavlja jedno potencijalno rješenje

optimizacijskog problema, a njen je položaj definiran vektorom optimizacijskih varijabli. Osim položaja, svaka čestica ima vlastitu brzinu (n-dimenzionalni vektor) te dobrotu koja ovisi o trenutnom položaju čestice.

Prilikom inicijalizacije PSO algoritma, generira se jato čestica nasumičnih položaja i brzina te se funkcijom cilja izračunava dobrotu svake čestice. Nakon inicijalizacije započinje iterativna procedura koju se može smatrati kvazi-dinamičkom simulacijom gibanja čestica. Novi položaj k -te čestice definiran je izrazom:

$$x_i^{k,t+1} = x_i^{k,t} + v_i^{k,t+1}, \quad (10)$$

gdje je x položaj čestice, v brzina čestice, i je indeks dimenzije, k je indeks čestice u jatu, a t je indeks iteracije (kvazi vremenski korak).

Nova brzina čestice definirana je sa tri komponente: inercijalna (djelomično se zadržava brzina iz prošlog koraka), kognitivna (težnja prema najboljem prošlom položaju čestice) i socijalna (težnja prema najboljem položaju susjeda). Cijeli izraz za izračun brzine je:

$$v_i^{k,t+1} = w_I \cdot v_i^{k,t} + w_C (c_i^{k,t} - x_i^{k,t}) + w_S (s_i^{k,t} - x_i^{k,t}), \quad (11)$$

gdje su w_I , w_C i w_S težinski faktori, c je najbolji položaj k -te čestice do iteracije t , a s je najbolji položaj susjednih čestica. U ovom radu, svaka čestica ima 10 susjednih čestica koje su određene nasumično iz cijelog jata.

3.3 Implementacija optimizacijskog postupka

Optimizacijski postupak implementiran je u Python softverskoj aplikaciji koristeći PSO algoritam iz modula *Inspyred* te *EPANET* za hidrauličku simulaciju mreže cjevovoda. Izračun funkcije cilja za cijelo jato čestica se izvršava paralelno.

Za razliku od uobičajenog PSO algoritma, u ovom slučaju početni položaji čestica se ne inicijaliziraju na cijelom dopuštenom intervalu [0 mm, 850 mm] već na intervalu [600mm, 650 mm]. Ovakva inicijalizacija početnih položaja omogućava usmjeravanje optimizacijskog procesa na način da postepeno isključuje segmente inicijalno velikih promjera što se je pokazalo učinkovito. Posljedica ograničenja prostora inicijalizacije čestica je značajno smanjivanje cijene instalacije dok cijena eksploatacije ostaje relativno nepromijenjena tijekom optimizacijskog procesa. Postavke PSO algoritma su sljedeće: veličina jata $n=250$, broj iteracija $i_{\max}=1500$, inercijski faktor $w_I=0.9$, kognitivni faktor $w_C=1.0$, socijalni faktor $w_S=1.0$.

4 OPTIMALNI DIZAJN SUSTAVA NAVODNJAVANJA

4.1 Opis primjera

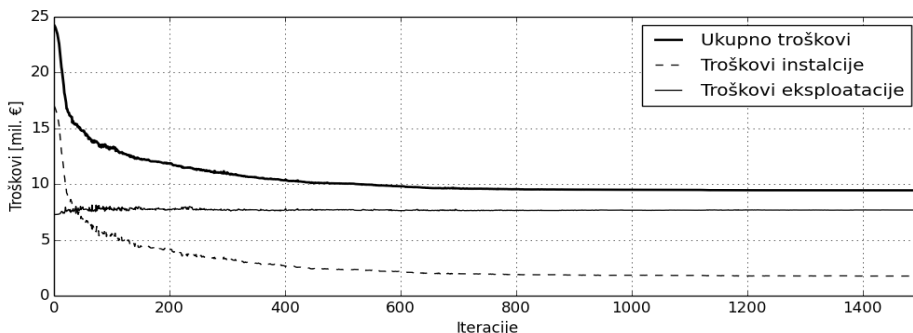
Kao testni primjer uzet je problem navodnjavanja Čepičkog polja, a svi mogući segmenti mreže cjevovoda prikazani su crtkano na Sl. 3. Postavljeno je ukupno 10 potrošača s različitim potrebnim protocima, ovisno o veličini površine koju navodnjavaju dok minimalni tlak u čvorovima potrošača iznosi 5 bara. Potreban protok na pumpi suma je svih protoka na potrošačima te iznosi 22450 l/min. Ukupno ima 10 čvorova potrošača u kojima je zahtijevana dobava od 1200 do 3600 l/min, ovisno o površini koju pojedini potrošač opskrbljuje.

Geometrijske značajke nadmorskih visina čvorova preuzete su s web servisa „Google Maps“ te je prema tim koordinatama i visinama napravljena mreža u *EPANETU*.

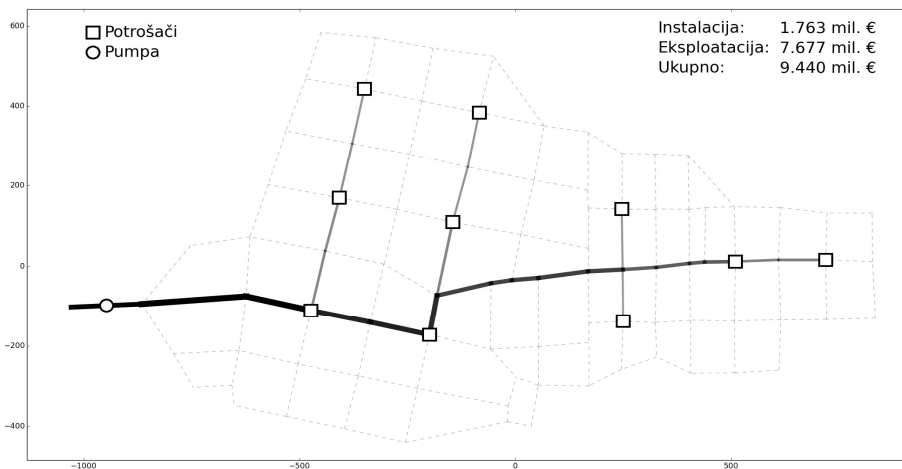
Početna mreža se sastoji od ukupno 89 čvorova i 151 cijevi te zatvara površinu veću od 1000 hektara. Zadatak optimizacije je pronaći idealnu geometriju mreže cjevovoda, dimenzionirati cijevi te odrediti tlak na pumpi, a da pritom zahtjevi potrošača budu zadovoljeni i troškovi najmanji. Period eksploatacije iznosi 7300 dana.

4.2 Rezultati

Mimimizacija ukupnih troškova mreže cjevovoda tijekom optimizacijskog procesa prikazana je na Sl. 2. Zbog velikih početnih promjera segmenata, što daje male hidrauličke gubitke i nisku potrebnu dobavnu visinu pumpe, vidljivo je da se troškovi eksploatacije ne smanjuju tijekom iteracija optimizacijske metode, štoviše čak se lagano povećavaju. Smanjenje ukupnih troškova svodi se na gašenje nepotrebnih segmenata mreže cjevovoda i postavljanje minimalnih potrebnih promjera preostalih segmenata.



Sl. 2. Konvergencija optimizacijskog procesa



Sl. 3. Finalni dizajn mreže cjevovoda

Finalno rješenje dizajna mreže cjevovoda (Sl. 3) sadrži samo 38 segmenata (od inicijalnih 151) čiji su promjeri od oko 200 do 800 mm (ovisno da li su glavni ili sporedni vodovi). Za dobivenu trasu i promjere cijevi troškovi instalacije iznose 1.763 milijuna €, troškovi eksploatacije u danom periodu 7.677 milijuna €, a ukupni su troškovi 9.440 milijuna €.

5 ZAKLJUČAK

Postupak opisan u ovom radu određuje optimalnu trasu mrežu cjevovoda koja povezuje izvorišnu točku sa svim potrošačima, uzimajući u obzir troškove instalacije cjevovoda (troškovi cijevi, korištenja zemljišta i izgradnje cjevovoda) i operativne troškove eksploatacije cjevovoda (troškovi rada pumpi). Optimizacijska metoda PSO pokazuje se kao efikasan postupak alternativan genetičkom algoritmu [1] tj. pokazuje povoljan odnos broja evaluacija prema broju cijevi mreže. Korištena metodologija pronalaženja optimalne mreže cjevovoda može se osim na pokazani primjer poljoprivrednog navodnjavanja primijeniti i na različite probleme u inženjerstvu (optimizacija vodovodne mreže, optimizacija u prometu, mreže u računalstvu).

Mogućnost korištenja više pumpi, ocjena pouzdanosti mreže, više scenarija/režima rada, tranzijentno strujanje u cijevima, korištenje drugih optimizacijskih metoda su samo neka od mogućih proširenja izloženog optimizacijskog problema koja otvaraju potpuno novo istraživačko područje.

Složenost problematike današnjeg efikasnog navodnjavanja pokazuje važnost ispravnog projektiranja trasa i promjera cjevovodnog sustava, koji će zajedno sa dodatnim sustavima kontrole smanjiti ukupne troškove izgradnje i dugogodišnje upotrebe kroz smanjenu potrošnju vode i energije te znatan ekološki učinak.

Literatura:

- [1] Afshar, M.H., Jabbari, E., "Simultaneous layout and pipe size optimization of pipe networks using genetic algorithm", Arabian Journal for Science & Engineering (Springer Science & Business Media BV), Vol.33, 2008, str. 391-409.
- [2] Engelbrecht, A.P., "Computational Intelligence", John Wiley & Sons, 2007.
- [3] Rossman, L.A. "EPANET 2: users manual", 2000.
- [4] "Underground products 2012 Price List", M Con Pipe & Products Inc, 2012.

Autori:

Stefan Ivić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-497, e-mail: stefan.ivic@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/stefan>

Ivan Staver, Šapjane, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Vukovarska 58, 51000 Rijeka: ivan.staver@riteh.hr

Lado Kranjčević, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-554, e-mail: lado.kranjcevic@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/lado>

MIJEŠANA FORMULACIJA U ANALIZI GREDE NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Jagodnik, V. i Jelenić, G.

Sažetak: Primjena Hellinger-Reissnerovoga varijacijskog pristupa od velike je koristi u formuliranju miješanih konačnih elemenata grednog nosača. Jedan od najznačajnijih primjena takvog pristupa je kod formuliranja Timošenkovog konačnog elementa grede prilikom čega se izbjegava tzv. "shear-locking" efekt. U geotehničkom inženjerstvu, primjena grednog elementa je vrlo česta pogotovo kod analiza horizontalno opterećenih pilota. Uobičajeno modeliranje takvih sistema sastoji se od grednih konačnih elemenata (Bernoullijev ili Timošenkov gredni element) i konačnih elemenata opruge koje oponašaju tlo te se uobičajeno postavljaju u rubne točke grednoga konačnog elementa. U radu je analiziran mješoviti pristup formuliranja konačnog elementa grede pritom uzimajući u obzir energiju deformacije kontinuirano raspoređene opruge duž elementa čime se postiže drugačija matrica krutosti utjecaja tla.

Ključne riječi: Bernoullijev konačni element, Timošenkov konačni element, Winklerov model tla, mješoviti pristup

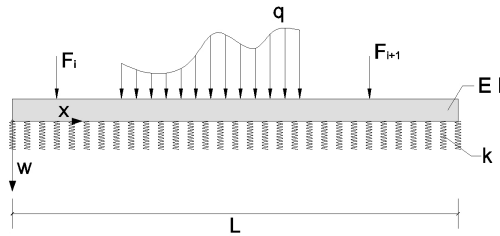
1 UVOD

Teorija grede na elastičnoj podlozi i dalje se široko primjenjuje unatoč dostupnosti velikog broja sofisticiranih računalnih programa na tržištu koji omogućuju realnije modeliranje interakcije tla i konstrukcije. Tlo se u ovom slučaju modelira kao niz opruga određene krutosti. Jednostavnost ovakvog modeliranja čini pristup manje računalno zahtjevan, a rezultati koji proizlaze iz analize daju relativno bliske vrijednosti ponašanja u stvarnosti. Vrlo često se gredni konačni element i konačni element opruge promatraju kao zasebni elementi prilikom formiranja globalne matrice krutosti sustava. Krutost tla, odnosno opruge, definirana je na osnovu modula reakcije tla k prema izrazu kojeg je postavio Vesić [4]:

$$k = 0.65 \sqrt[12]{\frac{E_s \cdot B^4}{E \cdot I}} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu^2}. \quad (1)$$

gdje je E_s modul elastičnosti tla, ν Poissonov koeficijent, E Youngov modul elastičnosti, B širina grednog nosača i I moment inercije.

U radu će se razmotriti ravna greda duljine L i konstantnog poprečnog presjeka te krutosti EI opterećena proizvoljnim opterećenjem koja je slobodno položena na tlo čija reakcija $f(x) = k w(x)$ djeluje na promatranu gredu. Funkcija $f(x)$ proporcionalna je modulu reakcije tla i pomaku grednog nosača $w(x)$ (pretpostavka Winklerovog modela tla). Slika 1 prikazuje jedan takav analizirani gredni element.



Sl. 1: Ravna greda na elastičnoj podlozi

2 BERNOULLIJEV ELEMENT KAO POSMIČNO KRUTI TIMOŠENKOV ELEMENT

Već poznatu matricu krutosti Bernoullijevog konačnog elementa moguće je dobiti i korištenjem Timošekove gredne teorije [3] i miješane metode konačnih elemenata, pritom uzimajući u obzir beskonačnu krutost na smicanje. Za interpolaciju pomaka i rotacija u čvorovima koristi se kvadratna interpolacijska funkcija dok se za funkciju oblika za poprečne sile koristi linearna interpolacija, a pretpostavlja se da je poprečna sila konstantna. Na taj način se izbjegava fenomen "shear-locking". Ukoliko statički kondenziramo stupnjeve slobode srednjeg čvora matricu krutosti Timošenkovog konačnog elementa dobivamo u slijedećem obliku:

$$K_{b,i} = \frac{EI}{(1 + \phi)l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l_i & -12 & -6l_i \\ -6l_i & (4 + \phi)l_i^2 & 6l_i & (2 - \phi)l_i^2 \\ -12 & 6l_i & 12 & 6l_i \\ -6l_i & (2 - \phi)l_i^2 & 6l_i & (4 + \phi)l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdje je l_i dužina konačnog elementa, $\phi = \frac{12EI}{GA l_i^2}$, G posmični modul i A površina poprečnog presjeka. Kada posmična krutost teži k beskonačnosti, $\phi = 0$ te matrica krutosti prikazana jednačbom (2) postaje jednaka matrici krutosti Bernoullijevog konačnog elementa.

3 GREDA NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Diferencijalna jednačbza grede na elastičnoj podlozi prikazana na Slici 1 može se zapisati u obliku:

$$EIw^{IV}(x) + kw(x) = q(x). \quad (3)$$

U nastavku teksta, razmotriti će se mješoviti pristup formuliranja konačnog elementa grede na elastičnoj podlozi.

3.1 Interpolacija polja pomaka

U ovome slučaju formuliranje konačnog elementa isto je kao i kod formuliranja običnog Bernoullijevog konačnog elementa uz dodatak energije deformacije opruge. Unutar-
nja energija deformacije definirana je kao $V_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L (EIw''^2 + kw^2) dx$. Ukupni
konačni element grede na elastičnoj podlozi sastoji od dvije matrice krutosti, matrice
krutosti grede, $\mathbf{K}_{b,i}$, i matrice krutosti tla, $\mathbf{K}_{s,i}$, gdje je matrica krutosti tla:

$$\mathbf{K}_{s,i} = \int_{-1}^1 \frac{kl_i}{2} \mathbf{N}_i^t \mathbf{N}_i d\xi, \quad (4)$$

Interpolacijske funkcije N_i definirane su preko Hermiteovih polinoma, a sama ma-
trica krutosti tla odatle se dobiva kao:

$$\mathbf{K}_{s,i} = kl_i \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_i & \frac{9}{70} & \frac{13}{420}l_i \\ -\frac{11}{210}l_i & \frac{1}{105}l_i^2 & -\frac{13}{420}l_i & -\frac{1}{140}l_i^2 \\ \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l_i & \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l_i \\ \frac{13}{420}l_i & -\frac{1}{140}l_i^2 & \frac{11}{210}l_i & \frac{1}{105}l_i^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

3.2 Interpolacija polja pomaka i reakcije

U nastavku teksta primijenjen je Hellinger-Reissnerov varijacijski pristup na Bernoullijev
konačni element grede na elastičnoj podlozi. Uvedena je komplementarna potencijalna
energija tla, u kojoj je funkcija $f(x)$ interpolirana nezavisno od pomaka. Odgovarajući
miješani funkcional tako se može zapisati kao $V_{\text{def}}^* - U$, gdje je U rad vanjskog op-
terecjenja, a $V_{\text{def}}^* = \frac{1}{2} \int_0^L EIw''^2 dx + \int_0^L fwdx - \frac{1}{2k} \int_0^L f^2 dx$. Iz stacionarnosti tog
funkcionala proizlazi matrica krutosti tla u obliku:

$$\mathbf{K}_{s,i} = -\mathbf{K}_{bf,i} \mathbf{K}_{f,i}^{-1} \mathbf{K}_{bf,i}^t, \quad (6)$$

gdje je:

$$\mathbf{K}_{bf,i} = \frac{l_i}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_i^t \mathbf{N}_{f,i} d\xi \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{f,i} = -\frac{l_i}{2k} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{f,i}^t \mathbf{N}_{f,i} d\xi. \quad (8)$$

a $N_{f,i}$ je matrica funkcija oblika kojima interpoliramo reakciju tla. Jagodnik i sur. [2]
pokazali su da je najtočnije interpolirati funkciju reakcije tla linearno, čime se dobiva
sljedeća matrica krutosti:

$$\mathbf{K}_{s,i} = \frac{kl_i}{1800} \begin{bmatrix} 666 & -93l_i & 234 & 57l_i \\ -93l_i & 14l_i^2 & -57l_i & -11l_i^2 \\ 234 & -57l_i & 666 & 93l_i \\ 57l_i & -11l_i^2 & 93l_i & 14l_i^2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

3.3 Interpolacija polja pomaka, rotacije presjeka grede i poprečnih sile

Ovaj pristup formuliranju grede na elastičnoj podlozi bazira se na formuliranju Timošenkovog konačnog elementa kojemu se dodaje utjecaj opruga. Matrica krutosti od utjecaja tla slijedi kao:

$$\mathbf{K}_{s,i} = \frac{kl_i}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N} d\xi. \quad (10)$$

Funkcije oblika \mathbf{N} za ovaj slučaj definirane su kao Lagrangeovi polinomi drugog reda. Statičkom kondenzacijom stupnjeva slobode srednjeg čvora dobivamo istu matricu krutosti vrednog elementa kao u jednadžbi (2), no matrica krutosti od utjecaja tla postaje različita i glasi

$$\mathbf{K}_{s,i} = \frac{kl_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{l_i}{4} & 1 & \frac{l_i}{4} \\ -\frac{l_i}{4} & \frac{l_i^2}{20} & -\frac{l_i}{4} & -\frac{l_i^2}{20} \\ 1 & -\frac{l_i}{4} & 2 & \frac{l_i}{4} \\ \frac{l_i}{4} & -\frac{l_i^2}{20} & \frac{l_i}{4} & \frac{l_i^2}{20} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3.4 Interpolacija polja pomaka, rotacije presjeka, poprečnih sila i reakcije tla

Formulacija konačnog elementa interpoliranjem četiri različita polja bazira se na interpolaciji pomaka i rotacija, poprečnih sile i reakcije tla, sve sa različitim funkcijama oblika. Matrica krutosti od utjecaja grede formira se kao u prethodnom slučaju, dok se matrica krutosti od utjecaja tla formira na isti način kao u odlomku 3.2 koja dobiva drugačiji oblik prilikom statičke kondenzacije stupnjeva slobode srednjeg čvora konačnog elementa. Jagodnik i sur. [2] su pokazali da se najbolja aproksimacija pomaka dobiva kada se za matricu krutosti od utjecaja tla koristi linearna interpolacijska funkcija za polje reakcije tla. Matrica krutosti tada ima oblik

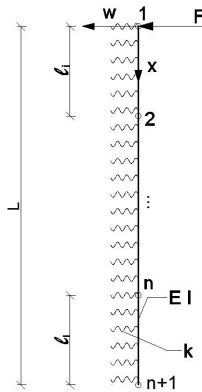
$$\mathbf{K}_{s,i} = \frac{kl_i}{144} \begin{bmatrix} 48 & -6l & 24 & 6l \\ -6l & l^2 & -6l & -l^2 \\ 24 & -6l & 48 & 6l \\ 6l & -l^2 & 6l & l^2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

4 NUMERIČKI PRIMJER

Analiziran je primjer horizontalno opterećenog pilota čija je skica prikazana na Slici 2. Pilot je modeliran kao ravna greda duljine $L = 3m$, širine i visine $0.3m$ te krutosti $EI = 21262.5kNm^2$, te opterećen silom u glavi pilota $P = 1kN$.

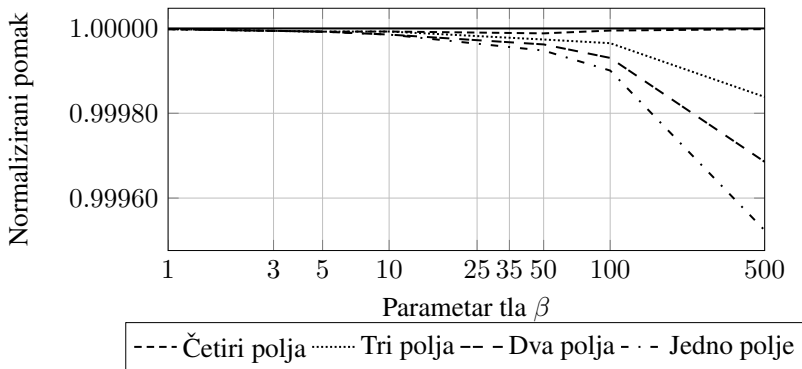
Dobiveni rezultati analize normirani su sa vrijednosti pomaka dobivenim iz analitičkog izraza prema Hetenyiju [1]:

$$\bar{w} = \frac{P \cdot L^3}{2 \cdot \beta^{3/4} \cdot EI} \cdot \frac{\sinh(2\sqrt[4]{\beta}) - \sin(2\sqrt[4]{\beta})}{\cos(2\sqrt[4]{\beta}) + \cosh(2\sqrt[4]{\beta}) - 2}, \quad (13)$$



Sl. 2: Horizontalno opterećeni pilot u Winklerovom tlu

gdje je $\beta = \frac{k \cdot L^4}{4 \cdot EI}$, a označava parametar tla. Rezultati četiri navedene formulacije uspoređeni su na Slici 3, gdje je prikazana ovisnost normaliziranog pomaka o parametru β . Za ilustraciju $\beta = 1$ predstavlja slabo zbijeni pijesak, $\beta = 5$ krutu glinu, $\beta = 10$ srednje zbijeni pijesak, $\beta = 50$ vrlo zbijeni šljunak, $\beta = 100$ slabu stijensku masu, a $\beta = 500$ predstavlja krutu stijensku masu.



Sl. 3: Normalizirani pomaci u glavi pilota za 8 elemenata

5 ZAKLJUČCI

U radu je prikazana primjena miješanog principa formiranja konačnog elementa grede na elastičnoj podlozi. Uspoređeni su Bernoullijev i posmično kruti Timošenkov konačni element sa statički kondenziranim unutarnjim stupnjevima slobode dodatno i to oba za slučaj kada reakciju tla interpoliramo nezavisno. Iako matrica krutosti grede ostaje ista, matrica krutosti tla se mijenja. Na primjeru horizontalno opterećenog pilota jasno se može uočiti da je interpolacija s tri polja točnija od interpolacije s jednim poljem, a ako

promatramo deformaciju opruge i funkciju reakcije tla kao zasebne funkcije, možemo zaključiti da je interpolacija sa četiri polja bolja od interpolacije sa dva polja.

ZAHVALA

Istraživanje koje je rezultiralo ovim radom je provedeno u sklopu znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025: “Unapređivanje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama ” koji je financijski podržalo Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske i u sklopu potpore Sveučilišta u Rijeci br. 13.05.1.3.06 “Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela”.

Literatura

- [1] Hetenyi, M., “Beams on Elastic Foundation”, University of Michigan Press: Ann Arbor, Michigan, 1964.
- [2] Jagodnik, V., Jelenić, G., Arbanas, Ž., “On application of mixed finite element approach to beam soil interaction”, Acta Geotechnica Slovenica, , No. 2, 2013, str. 15–27.
- [3] Timoshenko, S., “Strength of Material, Part 1: Elementary Theory and Problems”, Van Nostrand Reinhold, New York, 1958.
- [4] Vesić, A., “Beams on elastic subgrade and the Winkler’s hypothesis”, Proceedings of 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, University of Michigan, Michigan, 1961, str. 845–850.

Autori

Vedran Jagodnik, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265934,

e-mail: vedran.jagodnik@gradri.hr

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265955,

e-mail: gordan.jelenic@gradri.hr

BEZMREŽNA NUMERIČKA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Jalušić, B., Jarak, T. i Sorić, J.

Sažetak: U radu je prikazana primjena mješovite bezmrežne lokalne Petrov-Galerkinove kolokacijske metode za rješavanje jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema deformiranja heterogenih materijala sastavljenih od dva homogena izotropna dijela. U numeričkim primjerima točnost dobivenih rezultata uspoređena je s točnošću rezultata osnovne formulacije temeljene samo na aproksimaciji komponenata pomaka.

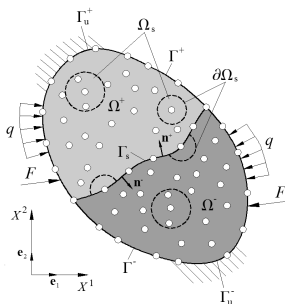
Ključne riječi: *bezmrežne kolokacijske metode, modeliranje heterogenih materijala*

1 UVOD

U ovom radu prikazana je bezmrežna mješovita lokalna Petrov-Galerkinova metoda za rješavanje problema rubnih vrijednosti pri modeliranju procesa deformiranja heterogenih materijala. Ovdje razmatrani heterogeni materijal sastavljen je od više homogenih izotropnih područja s različitim materijalnim karakteristikama. Diskretizacija različitih homogenih područja kao i aproksimacija nepoznatih veličina provodi se po svakom području zasebno. Jednostavnije definiranje aproksimacijskih funkcija visokog stupnja kontinuiteta kod bezmrežnih metoda [1] predstavlja u općem slučaju prednost u odnosu na metodu konačnih elemenata (MKE) međutim uzrokuje poteškoće u rješavanju problema kada u točnom rješenju postoji diskontinuitet derivacija pomaka. Stoga se za modeliranje heterogenih materijala pomoću bezmrežnih metoda primjenjuju posebni numerički postupci [2]. U tu svrhu ovdje je primijenjen postupak direktnog zadovoljavanja rubnih uvjeta pomaka i sila na spoju različitih homogenih dijelova [3]. Za rješavanje problema deformiranja primjenjuje se mješoviti pristup gdje su komponente pomaka i komponente naprezanja aproksimirane pomoću istih aproksimacijskih funkcija. Jednadžbe ravnoteže diskretizirane su pomoću aproksimiranih naprezanja, a sustav jednadžbi je zatvoren postavljanjem konstitutivnih relacija koje povezuju pomake i naprezanja. Budući da su jednadžbe zadovoljene u jakoj formi, izbjegnuto je numeričko integriranje pa je izračunavanje matrice sustava vrlo jednostavno i brzo. Primjenom mješovitog pristupa smanjuje se potrebni red kontinuiteta aproksimacijskih funkcija [4] što povećava točnost i stabilnost metode. Primijenjene su funkcije koje posjeduju interpolacijska svojstva u čvorovima tako da su rubni uvjeti pomaka na vanjskim granicama zadovoljeni izravno kao kod MKE. Globalni rubni uvjeti sila zadovoljeni su primjenom direktne kolokacijske metode [5]. U izvedenom konačnom sustavu jednadžbi kao nepoznanice javljaju se samo čvorni pomaci. U 2. poglavlju detaljno je prikazana i objašnjena mješovita kolokacijska metoda za modeliranje heterogenih materijala. Učinkovitost izvedenog pristupa prikazana je pomoću dva numerička primjera u 3. poglavlju.

2 MJEŠOVITA BEZMREŽNA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Na slici 1 shematski je prikazan dvodimenzijski heterogeni materijal koji zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ . Krivulja Γ_s predstavlja granicu između dva područja Ω^+ i Ω^- s različitim homogenim materijalnim svojstvima. Γ_s dijeli Ω tako da vrijedi $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ i $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.



Sl. 1. Dvodimenzijski heterogeni materijal

Jednadžbe za sustav prema slici 1 su jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svim čvorovima unutar Ω , koje je podijeljeno na Ω^+ i Ω^-

$$\sigma_{ij,x^j}^+ + b_i^+ = 0, \text{ unutar } \Omega^+, \quad \sigma_{ij,x^j}^- + b_i^- = 0, \text{ unutar } \Omega^-. \quad (1)$$

Jednadžbe (1) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$

$$u_i^+ = \bar{u}_i^+, \text{ na } \Gamma_u^+, \quad u_i^- = \bar{u}_i^-, \text{ na } \Gamma_u^-, \quad (2)$$

$$t_i^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ = \bar{t}_i^+, \text{ na } \Gamma_t^+, \quad t_i^- = \sigma_{ij}^- n_j^- = \bar{t}_i^-, \text{ na } \Gamma_t^- \quad (3)$$

te uvjete kontinuiteta na granici Γ_s . Na granici Γ_s diskretizacija se vrši pomoću dvostrukih čvorova, odnosno pozicije čvorova koji pripadaju područjima Ω^+ i Ω^- se međusobno poklapaju. U svakom od čvorova na Γ_s postavlja se kontinuitet pomaka i recipročnosti vektora naprezanja [3]

$$u_i^+ - u_i^- = 0, \quad t_i^+ + t_i^- = 0. \quad (4)$$

Vrijedi da je $\partial\Omega = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^- \cup \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$, gdje $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-$ označava dio $\partial\Omega$ s zadanim pomacima \bar{u}_i , dok su na $\Gamma_t = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$ zadane površinske sile \bar{t}_i . 2D kontinuum se diskretizira pomoću dvaju skupova čvorova $I=1,2,\dots,N$, i $M=1,2,\dots,P$ gdje su N i P ukupni brojevi čvorova u području Ω^+ , odnosno Ω^- . Prema mješovitom kolokacijskom postupku iz [4] nepoznate veličine polja su komponente naprezanja i pomaka. Sve nepoznate veličine aproksimirane su zasebno u područjima Ω^+ i Ω^- , pri čemu se koriste iste aproksimacijske funkcije za sve komponente pomaka i naprezanja. Za Ω^+ vrijedi

$$u_i^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{X}) (\hat{u}_i^+)_j, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{X})(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J, \quad (6)$$

gdje ϕ_J predstavlja čvornu vrijednost 2-D funkcije oblika za čvor J , a $(\hat{u}_i^+)_J$ i $(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J$ pripadne čvorne vrijednosti za pomake i naprezanja. Analogno su aproksimirani pomaci i naprezanja po području Ω^- . Za konstrukciju funkcija oblika u radu koriste se metoda najmanjih pomičnih kvadrata (*Moving Least Squares*, MLS) [1] prema kojoj se funkcija oblika izračunava

$$\phi_J(\mathbf{X}) = \sum_k^m p_k(\mathbf{X}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \right]_{kJ}, \quad (7)$$

i metoda radijalne interpolacije po točkama s polinomnom reprodukcijom (*Radial Point Interpolation Method with Polynomial Reproduction*, RPIM) [1] gdje je funkcija oblika definirana

$$\phi_J(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{X})(\mathbf{S}_a)_J + \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{X})(\mathbf{S}_b)_J. \quad (8)$$

U izrazima (7) i (8) m označava broj monoma u vektoru bazne funkcije $\mathbf{p}(\mathbf{X})$, dok se n odnosi na broj radijalnih baznih funkcija. Kod MLS aproksimacije $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ označava momentnu matricu, a matrica $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ matricu umnoška odabrane težinske MLS funkcije i vektora bazne funkcije $\mathbf{p}(\mathbf{X})$. U relaciji (8) s $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ označen je vektor radijalnih funkcija, dok su matrice \mathbf{S}_a i \mathbf{S}_b svojstvene RPIM aproksimaciji te su konstantne sve dok se za aproksimaciju koriste isti čvorovi. Sve funkcije korištene u radu posjeduju interpolacijska svojstva što omogućava izravno nametanje rubnih uvjeta pomaka u čvorovima. Kod MLS aproksimacije to je postignuto definiranjem težinske funkcije prema [6]. Diskretizacijom jednadžbi (1)-(4) pomoću aproksimacija (5) i (6) dobiva se nerješivi sustav jednadžbi jer je ukupni broj nepoznatih čvornih naprezanja i pomaka veći od broja raspoloživih jednadžbi. Stoga se u svim čvorovima uvide konstitutivne relacije

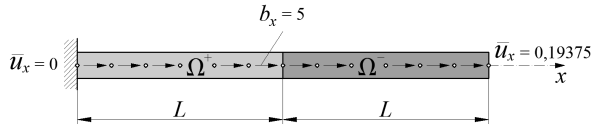
$$(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^+ (u_{i,j}^{+(h)} + u_{j,i}^{+(h)}), \quad (\hat{\sigma}_{ij}^-)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^- (u_{i,j}^{-(h)} + u_{j,i}^{-(h)}), \quad (9)$$

iz kojih je moguće izračunati čvorna naprezanja pomoću aproksimiranih pomaka iz (5). C_{ijkl}^+ , C_{ijkl}^- u jednadžbi (9) predstavljaju komponente materijalnih tenzora u Ω^+ i Ω^- . Eliminacijom čvornih naprezanja, dobiva se zatvoreni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima se kao nepoznanice javljaju samo čvorni pomaci.

3 NUMERIČKI PRIMJERI

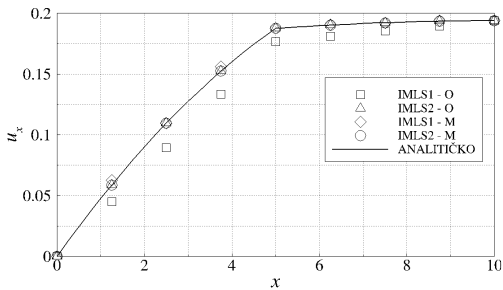
3.1 Oso opterećeni štap

Štap sastavljen od dva homogena izotropna područja jedinične površine i duljine $L = 5$ opterećen je konstantnim kontinuiranim osnim opterećenjem $b_x = 5$. Na oba kraja štapa nametnuti su rubni uvjeti pomaka prema slici 2 dobiveni iz analitičkog rješenja.

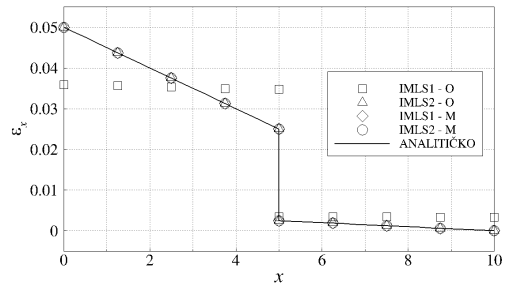


Sl. 2. Heterogeni štap

Modul elastičnosti lijevog dijela štapa jednak je $E^+ = 1000$, dok je isti za desni dio jednak $E^- = 10000$. Na slikama 3 i 4 prikazane su raspodjela pomaka u_x i deformacije ε_x po duljini štapa izračunate korištenjem osnovnog pristupa (O) temeljenog na metodi pomaka i opisanog mješovitog pristupa (M). Štap je diskretiziran s 10 jednako razmaknutih čvorova dok je za konstrukciju funkcija oblika korištena IMLS aproksimacija 1. i 2. reda.



Sl. 3. Raspodjela pomaka u_x

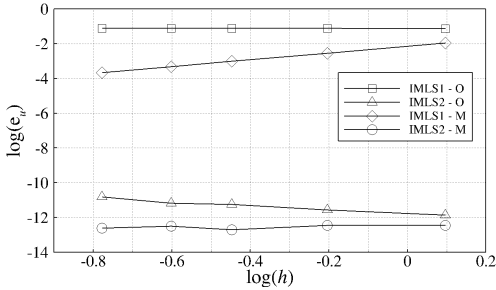


Sl. 4. Raspodjela deformacije ε_x

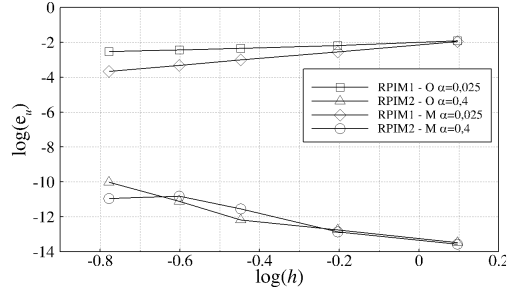
Na slikama 3 i 4 vidljivo je da se primjenom mješovitog pristupa uz korištenje IMLS aproksimacije 1. reda može točno opisati raspodjela pomaka u_x i diskontinuitet derivacije pomaka na spoju dvaju homogenih područja, dok to nije slučaj kada se koristi osnovni pristup. Korištenjem aproksimacija 2. reda oba pristupa rezultiraju točnim rješenjima s obzirom da mogu točno opisati polinom 2. reda koji je funkcija rješenja pomaka po pojedinim homogenim područjima. Izrađeni su također i testovi konvergencije rješenja u ovisnosti o prosječnom razmaku čvorova (h) te su isti prikazani na slikama 5 i 6. Uspoređena je ovisnost globalne greške za pomake definirane pomoću diskretne norme izračunate u kolokacijskim čvorovima kao

$$e_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{\text{num}} - u_i^a)^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^a)^2}}. \quad (10)$$

Za potrebe izračuna odabrani su optimalni iznosi parametra oblika Gauss-ove radialjalne funkcije [1] $\alpha = 0,025$ i $\alpha = 0,4$ za pojedine redove RPIM aproksimacije.



Sl. 5. Konvergencija diskretne greške norme pomaka e_u - IMLS aproksimacija

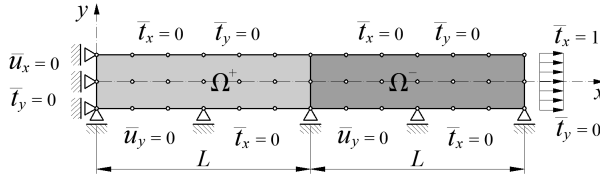


Sl. 6. Konvergencija diskretne greške norme pomaka e_u - RPIM aproksimacija

Na slikama 5 i 6 jasno je vidljivo da se primjenom mješovitog pristupa dobivaju točniji ili jednako dobri rezultati u usporedbi s onima dobivenima osnovnim pristupom.

3.2 Vlačno opterećena membrana

Membrana jedinične debljine i visine sastavljena od dva homogena izotropna područja duljine $L=5$ opterećena je na desnom kraju jediničnim opterećenjem vlačno u smjeru osi x . Preostali rubni uvjeti pomaka i sila prikazani su na slici 7.



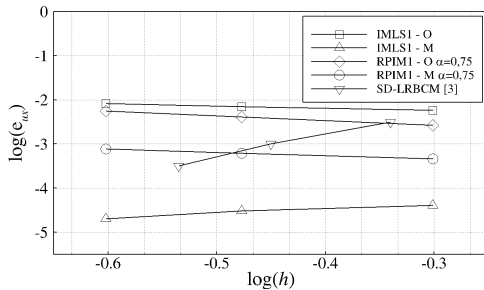
Sl. 7. Heterogena membrana

Konstante elastičnosti lijevog dijela membrane jednake su $E^+ = 1000$ i $\nu^+ = 0,25$, dok su iste za desni dio jednake $E^- = 10000$ i $\nu^- = 0,3$. Membrana je diskretizirana jednoliko razmaknutim čvorovima u oba smjera. Kao referentno rješenje za izračun grešaka uzeto je rješenje MKE dobiveno programskim paketom Abaqus s 16000 pravokutnih linearnih konačnih elemenata (CPS4). Analizirane su pogreške za komponente pomaka i normalnih deformacija u smjeru osi x , u_x i ϵ_x , za čvorove duž osi $y=0$ s obzirom na diskretne norme definirane kao

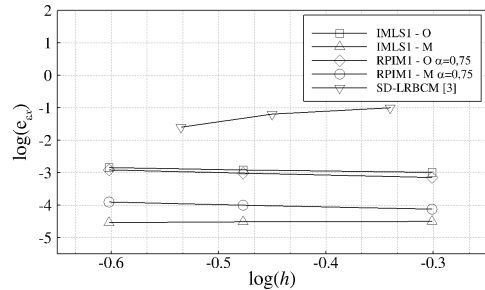
$$e_{ux} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{xi}^{\text{num}} - u_{xi}^{\text{ref}})^2}, \quad e_{\epsilon_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\epsilon_{xi}^{\text{num}} - \epsilon_{xi}^{\text{ref}})^2}. \quad (11)$$

U svrhu usporedbe točnosti formulacija temeljenih na osnovnom odnosno mješovitom pristupu provedeni su testovi konvergencije u ovisnosti prosječnog razmaka čvorova (h) te su isti prikazani na slikama 8 i 9. S obzirom da su ovdje funkcije koje opisuju točnu raspodjelu pomaka po pojedinim homogenim dijelovima polinomi 1. reda za analizu su korištene samo bezmrežne aproksimacijske funkcije prvog reda. Za izračun korištenjem RPIM aproksimacije 1. reda odabran je optimalni iznos parametra oblika Gauss-ove funkcije $\alpha=0,75$. Rješenja su uspoređena s dostupnim rješenjima iz

literature [3] za membranu jednakih dimenzija i identičnih rubnih uvjeta analiziranu kolokacijskom metodom temeljenom na osnovnom pristupu.



Sl. 8. Konvergencija diskretne greške norme e_{ux}



Sl. 9. Konvergencija diskretne greške norme e_{ex}

U radu iz literature se za konstrukciju funkcija oblika koristi metoda reproduciranja jezgre (*Reproducing Kernel*, RK) [3] u kombinaciji s radijalnim baznim funkcijama (*Radial Basis Functions*, RBF) [1]. Za konstrukciju RK dijela aproksimacije primijenjen je vektor baznih funkcija 3. reda, a kao težinska funkcija korišten je spline 5. reda. Na slikama 8 i 9 može se vidjeti prednost primjene mješovitog pristupa u odnosu na osnovni pristup i kod računanja dvodimenzijskih problema deformiranja heterogenih materijala. S obzirom da su norme grešaka (11) računane u odnosu na referentna rješenja dobivena metodom konačnih elemenata, koja su dostupna samo na određeni broj decimalnih mjesta, teško je postići visoku točnost rješenja. Stoga se može smatrati da rješenja dobivena mješovitim pristupom vrlo dobro opisuju realno deformiranje heterogenog materijala unatoč tome što konvergencija rješenja na dijagramima nije vidljiva. Prednost u vidu točnosti rezultata dobivenih mješovitim pristupom također se očituje i u usporedbi s rezultatima dostupnima iz literature [3] gdje je za aproksimaciju korištena funkcija 3. reda.

4 ZAKLJUČAK

Sve do sada dostupne bezmrežne metode za modeliranje heterogenih materijala temeljene su na metodi pomaka (osnovni pristup) u kojima je potrebno izračunavati derivacije bezmrežnih funkcija drugog reda što povećava računalne troškove, također pritom aproksimacijske funkcije moraju posjedovati C^2 kontinuitet. U prikazanoj bezmrežnoj mješovitoj kolokacijskoj metodi za modeliranje deformiranja heterogenih materijala sve komponente pomaka i naprezanja aproksimirane su istim funkcijama koje moraju imati samo C^1 kontinuitet. Numerička učinkovitost i točnost modeliranja heterogenih materijala ovdje je stoga povećana smanjenjem potrebnog reda derivacija aproksimacijskih funkcija čime je povećana točnost metode što se i očituje analizom grešaka na prikazanim numeričkim primjerima.

Literatura:

- [1] Liu, G.R., "Mesh Free Methods - Moving Beyond The Finite Element Method", CRC Press, 2003.
- [2] Jalušić, B., Jarak, T., Sorić, J., "O Bezmrežnom Modeliranju Heterogenih Materijala", Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Donja Stubica, Hrvatska, 2013, str. 73-78.
- [3] Chen, J-S., Wang, L., Hu, H-Y., Chi, S-W., "Subdomain Radial Basis Collocation Method for Heterogeneous Media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.80, 2009, str. 163-190.
- [4] Atluri, S.N., Liu, H.T., Han, Z.D., "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems", CMES, Vol.14, No.3, 2006, 141-152.
- [5] Jalušić, B., Jarak, T., Sorić, J., "On the Enforcement of Neumann Boundary Conditions in the Mixed MLPG Collocation Method for 2-D Linear Elastic Problems", ICCES MM, Budva, 2012, str. 16.
- [6] Most, T., Bucher, C., "New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.32, No.6, 2008, 461-470.

Autori:

Boris Jalušić, Tomislav Jarak, Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 016168/115, 514, 103, fax: 01 6168 187, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr, tomislav.jarak@fsb.hr, jurica.soric@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/

RJEŠAVANJE TORZIJE PRIZMATIČNIH ŠTAPOVA OPĆENITOG PRESJeka METODOM R-FUNKCIJA

Karačić, M., Gotovac, B., Kozulić, V. i Brajčić Kurbaša N.

Sažetak: U ovom radu opisan je postupak rješavanja problema torzije prizmatičnih štapova općenitog presjeka metodom R-funkcija (MRF) korištenjem atomskih baznih funkcija.

Metoda R-funkcija razvijena je u Harkivu tijekom druge polovice 20. stoljeća, kada je V. L. Rvačev razvio polualgebru u kojoj je ujedinio logiku, geometriju i matematičku analizu na način pogodan za primjenu na računalima. Funkcije koje se koriste u Rvačevoj polualgebri nazivaju se R-funkcijama i imaju svojstvo da je njihov predznak potpuno određen predznakom argumenta, pa je ovom metodom moguće točno opisati geometriju područja i svih rubnih uvjeta, a jedina je nepoznanica, koju je potrebno numerički odrediti, vezana za fizikalne posebnosti promatranog problema.

Osnovna prednost metode je ta što u potpunosti razdvaja informacije o geometriji problema i rubnim uvjetima od rješavanja fizikalnog problema numeričkim postupkom. Kako bi se problem matematički opisao, konstruirala se struktura rješenja koja ovisi o obliku područja, rubnim uvjetima i diferencijalnoj komponenti. Prve dvije komponente zadaju se točno korištenjem MRF, a preostala diferencijalna komponenta rješenja se određuje u obliku linearne kombinacije baznih funkcija.

U ovom radu se MRF koristi za točno opisivanje geometrije domene i rubnih uvjeta, dok atomske bazne funkcije omogućavaju jednostavnu primjenu metode kolokacije (jaka formulacija) pri rješavanju problema torzije prizmatičnih štapova.

Ključne riječi: Metoda R-funkcija, atomske bazne funkcije $Fup_2(x,y)$, torzija prizmatičnih štapova

1 UVOD

U ovome radu predstavljen je postupak rješavanja problema torzije prizmatičnih štapova koji je baziran na metodi R-funkcija, uz korištenje algebarskih atomskih baznih funkcija.

Metoda R-funkcija (MRF) odvaja informacije o geometriji domene i rubnim uvjetima od fizikalnog problema koji se rješava, što je njena osnovna prednost. Opis MRF, uz primjere opisivanja zahtijevnijih oblika područja kao i rubnih uvjeta, dan je u [1].

Atomske bazne funkcije prema svojim svojstvima nalaze se između klasičnih polinoma i spline funkcija. Pregled osnovnih baznih funkcija iz klase atomskih funkcija dan je u [2] i [3], a najdetaljnije su do sada obrađene atomske bazne funkcije algebarskog tipa $Fup_n(x)$. U ovome radu koristiti će se atomske bazne funkcije $Fup_2(x,y)$.

Ovdje predstavljena numerička metoda koristi MRF za točno opisivanje geometrije domene i rubnih uvjeta, dok atomske bazne funkcije omogućavaju jednostavnu primjenu metode kolokacije (jaka formulacija).

2 METODA R-FUNKCIJA

V. L. Rvačev šezdesetih je godina 20. stoljeća, inspiriran Boolovom algebrom, razvio polualgebru u kojoj je ujedinio logiku, geometriju i matematičku analizu, na način pogodan za primjenu na računalima [1]. Funkcije koje se koriste u Rvačevoj polualgebri nazivaju se R-funkcijama i imaju svojstvo da je njihov predznak potpuno određen predznakom argumenta.

Funkcije se mogu konstruirati prema algoritmu R-funkcija pomoću binarnih operatora konjunkcije i disjunkcije te unarnog operatora komplementa, koji su za R-funkcije definirani kao:

$$\begin{aligned}x \wedge y &= x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y} \\x \vee y &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y} \\ \bar{x} &= -x\end{aligned}\tag{1}$$

Polualgebra R-funkcija jednim se dijelom oslanja na Boolovu algebru, ali ima također i niz vlastitih pravila i pretpostavki. Izrazi (1) predstavljaju dovoljno definiran sustav za konstruiranje R-funkcija [1].

Metodom R-funkcija moguće je točno opisati geometriju područja i rubne uvjete, a jedina je nepoznanica, koju je potrebno numerički odrediti, vezana za karakteristike diferencijalnog operatora, odnosno fizikalne posebnosti promatranog problema.

Po volji točno rješenje zadanog problema traži se u obliku sljedeće strukture rješenja:

$$u = u(\omega_0, \Psi, \Phi)\tag{2}$$

Funkcija ω_0 naziva se osnovnom funkcijom, i ona unosi podatke o geometriji područja u rješenje. Konstruira se djelovanjem R-operacija (1) na elementarne funkcije ω_i koje opisuju pojedini dio granice, te ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}\omega_0|_{\Gamma} &= 0, \quad \omega_0 > 0 \text{ unutar područja} \\ \omega_0 &< 0 \text{ izvan područja}, \\ \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= 1; \quad \frac{\partial^j \omega_0}{\partial n^j} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad j = 2, \dots, k\end{aligned}\tag{3}$$

gdje je n unutarnja normala na granicu, a k najviši red derivacije koji je potreban u numeričkom postupku. Zahvaljujući svojstvima navedenim u (3), funkcija ω_0 služi kao točan indikator nalazi li se promatrana točka u traženom području ili ne.

Funkcija Ψ u izrazu (2) je glatka funkcija koja je definirana na cijelome području, točno opisuje rubne uvjete te je određena izrazom:

$$\Psi(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \omega_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \omega_j},\tag{4}$$

gdje je u_i komponenta rješenja $u(x, y)$, a ω_j komponenta osnovne funkcije $\omega_0(x, y)$ koja opisuje dio granice Γ_j .

U strukturi rješenja (2), funkcija Φ daje informaciju o diferencijalnom operatoru i jedina je nepoznata komponenta rješenja. Ona se u ovome radu određuje linearnom kombinacijom atomskih baznih funkcija $Fup_n(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^k C_i \cdot (Fup_n(x, y))_i, \quad (5)$$

gdje su C_i nepoznati koeficijenti koji se određuju numeričkim postupkom.

Struktura rješenja ovisi o fizikalnom problemu odnosno rubnim uvjetima, a oblici struktura za rješavanje čestih inženjerskih problema dani su u Tablici 1.

Tablica 1: Strukture rješenja u ovisnosti o tipu rubnog uvjeta

TIP RUBNOG UVJETA	MATEMATIČKA FORMULACIJA	ODGOVARAJUĆA STRUKTURA RJEŠENJA
Dirichlet	$u _{\partial\Omega} = \Psi$	$u = \omega_0 \cdot \Phi + \Psi$
Neumann	$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\partial\Omega} = \Psi$	$u = \Phi - \omega_0 \cdot D_1^{\omega}(\Phi) + \omega_0 \cdot \Psi + \omega_0^2 \cdot \Phi$
Treće vrste	$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h \cdot u \right) \Big _{\partial\Omega} = \Psi$	$u = \Phi - \omega_0 \cdot D_1^{\omega}(\Phi) - h \cdot \omega_0 \cdot \Phi + \omega_0 \cdot \Psi + \omega_0^2 \cdot \Phi$
Mješoviti	$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\partial\Omega} = \Psi_1$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h \cdot u \right) \Big _{\partial\Omega} = \Psi_2$	$u = \omega_1 \cdot \Phi + \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} (\Psi_2 - D_1^{\omega_2}(\omega_1 \cdot \Phi) - D_1^{\omega_2}(\Psi_1)) - h \cdot \omega_1 \cdot \Phi - h \cdot \Psi_1 + \Psi_1$

3 BAZNE FUNKCIJE $Fup_n(x, y)$

Atomske bazne funkcije su beskonačno derivabilne finitne funkcije s kompaktnim nosačem [4]. Postojeća saznanja o atomskim baznim funkcijama su sistematizirana u [2], gdje su bazne funkcije dovedene u numerički upotrebljiv oblik te su realizirani prvi koraci njihove praktične primjene. Ove bazne funkcije imaju dobra aproksimacijska svojstva, te posebno važno svojstvo univerzalnosti koje omogućuje hijerarhijsko povećavanje baze približnog rješenja na području [5].

Funkcije $Fup_n(x)$ pripadaju klasi atomskih baznih funkcija iz prostora koji sadrži algebarske polinome tj. linearnim kombinacijama međusobno pomaknutih baznih funkcija $Fup_n(x)$ mogu se točno prikazati algebarski polinomi. Indeks n označava najviši stupanj polinoma koji se može točno prikazati u obliku linearne kombinacije baznih funkcija dobivenih pomicanjem funkcije $Fup_n(x)$ za karakteristični interval 2^{-n} [5].

Bazna funkcija za numeričku analizu dvodimenzionalnih problema dobiva se kao Cartesijev produkt funkcija $Fup_n(x)$ po pojedinim koordinatnim osima:

$$Fup_n(x, y) = Fup_n(x) \cdot Fup_n(y) \quad (6)$$

Zahvaljujući beskonačnoj derivabilnosti funkcija $Fup_n(x,y)$, u numeričkom postupku se mogu direktno koristiti svi stupnjevi derivacija koje zahtjeva diferencijalna jednažba i rubni uvjeti, zbog čega je u razvoju numeričkog modela primjenjena metoda kolokacije koja osigurava efikasan, ekonomičan i jednostavan postupak [5].

4 FORMULACIJA PROBLEMA

Rješava se problem torzije prizmatičnih štapova opisan parcijalnom diferencijalnom jednažbom eliptičkog tipa.

Problem torzije može se rješavati metodom pomaka ili metodom funkcije naprezanja. U ovome radu koristi se metoda funkcije naprezanja pa se matematički model promatranog problema može zapisati kao:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2G\vartheta \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

gdje je u funkcija naprezanja, G modul posmika a ϑ kut zaokreta poprečnog presjeka.

Pošto je rubni uvjet Dirichletovog tipa, prema Tablici 1 se koristi struktura rješenja oblika:

$$u(x, y) = \omega_0 \cdot \Phi + \Psi \quad (8)$$

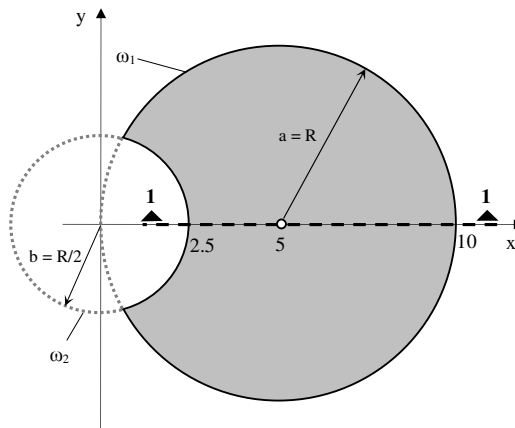
Nepoznata funkcija Φ računa se prema izrazu (5). Kod problema torzije (7) dovoljno je da je funkcija rješenja dvaput derivabilna, stoga se rješenje može aproksimirati linearnom kombinacijom funkcija $Fup_2(x, y)$. Uvrštavanjem (5) u (8) slijedi:

$$u(x, y) = \omega_0(x, y) \cdot \sum_{i=1}^m C_i \cdot (Fup_2(x, y))_i + \Psi(x, y) \quad (9)$$

U izrazu (9) jedine su nepoznanice koeficijenti C_i koji se mogu izračunati nekom od uobičajenih numeričkih metoda.

5 ILUSTRATIVNI PRIMJER

Analizira se torzija prizmatičnog štapa (osovine) modula posmika $G = 1$, opterećenog kutom zaokreta $\vartheta = 1$, čiji je poprečni presjek prikazan na Slici 1.



Slika 1 Poprečni presjek prizmatičnog štapa

Osnovna funkcija ω_0 u promatranom primjeru konstruirana je pomoću R-operatera od funkcija koje opisuju dvije kružnice, ω_1 i ω_2 :

$$\omega_0 = \omega_1 \vee \omega_2 \quad (10)$$

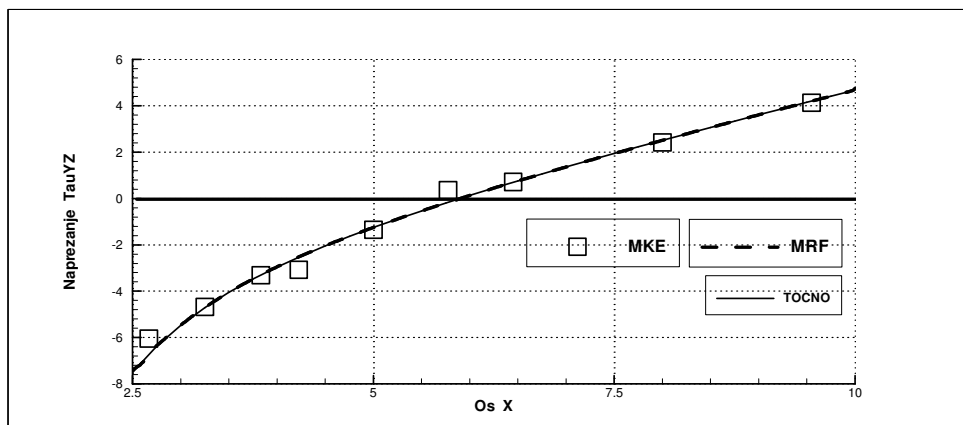
dok je funkcija Ψ koja opisuje rubne uvjete zbog prirode problema torzije na cijelom području jednaka nuli.

Uvrštavanjem strukture rješenja (8) u matematički model problema (7) slijedi:

$$\omega_0'' \cdot \Phi + 2 \cdot \omega_0' \cdot \Phi' + \omega_0 \cdot \Phi'' = -2G\vartheta - \Psi'' \quad (11)$$

Jedina nepoznanica u izrazu (11) je funkcija Φ čiji se nepoznati koeficijenti C_i računaju prema (5).

Na Slici 2 dana je usporedba posmičnih napreznaja τ_{yz} u presjeku 1-1 označenom na Slici 1. Prikazani rezultati su dobiveni korištenjem MRF sa 25 kolokacijskih točaka i pomoću metode konačnih elemenata sa sedam kvadrilateralnih elemenata, te uspoređeni sa Weberovim poznatim analitičkim rješenjem.



Slika 2 Usporedba numeričkih rješenja dobivenih pomoću MRF i MKE s točnim Weberovim rješenjem

6 ZAKLJUČAK

U ovom radu pokazan je postupak rješavanja problema torzije prizmatičnih štapova metodom R-funkcija (MRF) korištenjem atomskih baznih funkcija. Postupak je ilustriran primjerom torzije osovine.

Pokazane su važne odlike metode: mogućnost točnog zadovoljavanja rubnih uvjeta te jednostavno opisivanje geometrije područja. Nepoznata komponenta rješenja jednostavno je određena, pošto ne mora zadovoljavati nikakve posebne uvjete.

Usporedbom rezultata dobivenih predstavljenom metodom i metodom konačnih elemenata može se zaključiti kako se korištenjem MRF dobije glatka funkcija rješenja čija je prva derivacija neprekidna, kao što je ilustrirano na Slici 2, za razliku od rezultata dobivenih metodom konačnih elemenata, gdje je funkcija rješenja aproksimirana polinomom drugog reda na svakom konačnom elementu, pa su posmična napreznaja linearne funkcije, a praktično se izračunavaju samo diskretne vrijednosti u Gaussovima točkama.

Na Slici 2 pokazano je kako MKE u Gaussovim točkama na dijelu područja sa manjim gradijentom postiže zadovoljavajuću točnost, ali kod većih gradijenata dolazi do znatnih odstupanja, dok MRF daje u kontinuitetu rješenje zadovoljavajuće točnosti.

Literatura:

- [1] Shapiro, V., "Semi-Analytic Geometry with R-Functions", Acta Numerica, 2007, str. 1-65.
- [2] Gotovac, B., "Numerical modelling of engineering problems by smooth finite functions", doktorska disertacija, Građevinski fakultet u Zagrebu, Zagreb. 1986
- [3] Gotovac, B., Kozulić, V., "On a selection of basis functions in numerical analyses of engineering problems", Int.J.Engineering Modelling, Vol.12(1-4), 2002, str. 25-41.
- [4] Rvachev, V.L., Rvachev, V.A., „On a Finite Function“ (in Russian), DAN URSR. Ser. A, No. 6, 1971, str. 705-707.
- [5] Gotovac, B., Kozulić, V., "Numerical analyses of 2D problems using $F_{up_n}(x, y)$ basis functions", International Journal for Engineering Modelling, Vol.13, 2000, str. 1-2; 7-18

Autori:

Maja Karačić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Ulica Matice hrvatske 15, Split, tel. 021/ 303-379, e-mail: maja.karacic@gradst.hr

Blaž Gotovac, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Ulica Matice hrvatske 15, Split, tel. 021/ 303-335, e-mail: blaz.gotovac@gradst.hr

Vedrana Kozulić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Ulica Matice hrvatske 15, Split, tel. 021/ 303-365, e-mail: vedrana.kozulic@gradst.hr

Nives Brajčić Kurbaša, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Ulica Matice hrvatske 15, Split, tel. 021/ 303-335, e-mail: nives.brajcic@gradst.hr

TROSLOJNI NUMERIČKI MODEL STACIONARNOG TEČENJA U STRATIFICIRANOM ESTUARIJU

Krvavica, N., Travaš, V. i Ožanić, N.

Sažetak: U radu je predstavljen originalni numerički troslojni model stacionarnog tečenja u estuariju tipa slani klin, izveden iz 1D Saint-Venantovih jednadžbi. Prostorna diskretizacija je provedena konačnim razlikama implicitnom trapeznom metodom. Na nekoliko primjera se daje usporedba troslojnog i dvoslojnog modela kako bi se kvalitativno ocijenili utjecaji konvektivnih članova u donjim slojevima i posmičnog naprezanja pri dnu.

Gljučne riječi: Estuarij, slani klin, Saint-Venant, troslojni model, numerički model, metoda konačnih razlika

1 UVOD

Estuarij je u hidrauličkom smislu prijelazno područje u kojem rijeka utječe u more, a slatka se voda miješa sa slanom. Uslijed razlike u gustoći, slatka voda teče nizvodno prema ušću iznad sloja morske vode koja prodire po dnu vodotoka uzvodno. Kada je intenzitet miješanja među slojevima vrlo slab, prisutna je izrazita vertikalna stratifikacija gustoće, a duž estuarija se formira tzv. „slani klin“. U trenutku kada je postignuta ravnoteža između gravitacijskih i posmičnih sila, dostiže se stacionarno stanje, tzv. „zarobljeni slani klin“. [1]

Za razliku od postojećih dvoslojnih modela koji u potpunosti [2] ili djelomično [3] zanemaruju brzine donjeg sloja, u ovom se radu prikazuje troslojni model koji preciznije opisuje dinamiku unutar slanog klina. Naime, iako donji sloj prividno miruje, uslijed viskoznih sila javlja se unutarnja cirkulacija vode; u gornjem dijelu voda teče nizvodno prema ušću, dok u donjem dijelu voda teče uzvodno prema vrhu slanog klina. Dakle, umjesto jednog sloja koji miruje, tečenje morske vode opisuje se s dva sloja s protocima istih magnituda, ali različitih smjerova, čime se zadržava uvjet stacionarnosti slanog klina.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

Tečenje u otvorenim koritima se u 1D obliku najčešće opisuje Saint-Venantovim jednadžbama [4]. Postupno promjenjivo stacionarno tečenje se može promatrati kao poseban slučaj Saint-Venantovih jednadžbi, uz pretpostavku stacionarnosti toka (promjene dubine i brzine u vremenu su jednake nuli). [5]

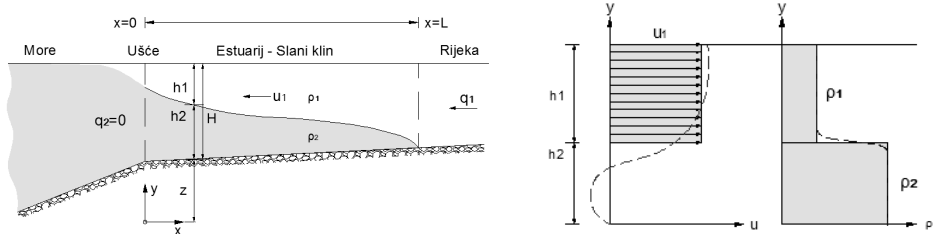
Zarobljeni slani klin nastaje kada se uspostavi ravnoteža između gravitacijskih i viskoznih sila; donji sloj poprima oblik klina koji se ne mijenja tijekom vremena. Prvu formulaciju jednadžbe koja opisuje slani klin razvili su Schijf i Schonfeld [2], koji su pretpostavili dva homogena sloja različite gustoće, svaki opisan jednadžbom kontinuiteta i dinamičkom jednadžbom. Uz pretpostavku stacionarnog toka,

konstantnog protoka u gornjem sloju ($q_1=\text{const}$) te donjeg sloja koji miruje ($q_2=0$) izveli su diferencijalnu jednačbu promjene dubine gornjeg sloja h_1 po dužini korita x

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{1}{1 - (1 - r_1) F_{d1}^2} \left(\frac{\tau_1}{\rho_1 g h_1} - \frac{\tau_2}{\rho_2 g h_2} \right). \quad (1)$$

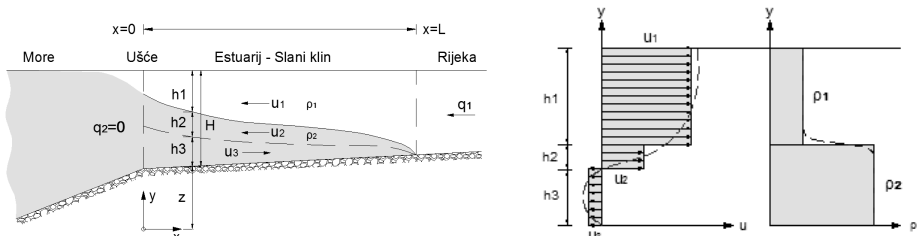
gdje su h_1 i h_2 dubine gornjeg i donjeg sloja, F_{d1} denzimetrijski Froudeov broj, ρ_1 i ρ_2 gustoće gornjeg i donjeg sloja te τ_1 i τ_2 posmična naprezanja među slojevima (Slika 1).

Iako se navedena formulacija problema pokazala kao koristan model pri preliminarnim analizama oblika i duljine slanog klina, terenska mjerenja vertikalnih profila brzina u estuariju potvrđuju kako donji sloj ne miruje, već da se unutar njega odvija recirkulacija vode, zbog čega mnogi autori smatraju da nije opravdano zanemariti dinamiku donjeg sloja [3].



Slika 1. Karakteristični uzdužni profil slanog klina te karakteristični vertikalni profil brzina i gustoća za dvoslojni model

Ako se problem promatra s gledišta vertikalne stratificiranosti gustoće, tada je uistinu logično modelirati slani klin s dva sloja, ali ako se promatra vertikalni profil brzina razvidne su tri različite zone; (a) gornji sloj slatke vode gustoće ρ_1 , dubine h_1 i protoka q_1 , (b) srednji sloj morske vode gustoće ρ_2 , dubine h_2 i protoka q_2 te (c) donji sloj morske vode gustoće ρ_2 , dubine h_3 i protoka $q_3=-q_2$. (Slika 2.) Dakle, predloženi model za razliku od modela opisanih u [2,3] donji sloj dijeli na dva podsloja iste gustoće s protocima jednake magnitude, ali suprotnih smjerova, kako bi se zadržao uvjet stacionarnosti, odnosno uvjet da je ukupni protok slanog klina jednak nuli ($q_2+q_3=0$), pritom u potpunosti uključujući konvektivne članove u donjem sloju i posmično naprezanje pri dnu.



Slika 2. Karakteristični uzdužni profil slanog klina te karakteristični vertikalni profil brzina i gustoća za troslojni model

3 OPIS MODELA

Uz pretpostvku da se radi o stacionarnom režimu strujanja u širokom koritu ($B \gg h$), Saint-Venantove jednačbe za prvi sloj poprimaju oblik

$$\frac{d(h_1 u_1)}{dx} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h_1 u_1^2 + \frac{g}{2} h_1^3 \right) = -g h_1 \frac{d}{dx} (h_2 + h_3 + z) + \frac{\tau_1}{\rho_1}, \quad (3)$$

dok se za drugi i treći sloj mogu napisati u obliku

$$\frac{d(h_2 u_2)}{dx} + \frac{d(h_3 u_3)}{dx} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h_2 u_2^2 + \frac{g}{2} h_2^3 \right) = -g h_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_3 + z \right) + \frac{\tau_2}{\rho_2} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h_3 u_3^2 + \frac{g}{2} h_3^3 \right) = -g h_3 \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_2 + z \right) + \frac{\tau_3}{\rho_2}. \quad (6)$$

gdje su h_1, h_2 i h_3 dubine slojeva, z koordinata dna, u_1, u_2 i u_3 brzine u slojevima, ρ_1 i ρ_2 gustoće slojeva te τ_1, τ_2 i τ_3 posmična naprezanja među slojevima odnosno s dnom u slučaju donjeg sloja. Ukupna dubina H je definirana uvjetom

$$h_1 + h_2 + h_3 = H. \quad (7)$$

Sustav jednačbi od (2) do (7) je moguće pojednostaviti uvodeći sljedeće pretpostavke:

1. konstantni protok u gornjem sloju, što slijedi iz (2),
2. protok srednjeg i donjeg sloja jednake magnitude, ali različitog predznaka, što slijedi iz (3),
3. ukupna razina vode konstantna po cijeloj dužini slanog klina, što je opravdano pretpostaviti ako ja Froudov broj gornjeg sloja manji od 1 (podkritično strujanje),
4. brzina srednjeg sloja unaprijed je definirana konstantnim omjerom u odnosu na brzinu gornjeg sloja $u_2 = u_1 / r_u$.

Uvrštavanjem jednačbi kontinuiteta (2) i (4) u dinamičke jednačbe (3), (5) i (6) eliminiraju se derivacije brzina u_1, u_2 i u_3 . Oduzimanjem jednačbe (6) od (3) i (5) eliminira se član dh_3/dx , čime (3) i (5) postaju

$$C_1 \frac{dh_1}{dx} = -C_2 \frac{dh_2}{dx} - C_3 \frac{dz}{dx} - C_4, \quad (8)$$

$$D_2 \frac{dh_2}{dx} = -D_1 \frac{dh_1}{dx} - D_3 \frac{dz}{dx} - D_4, \quad (9)$$

gdje su $C_{1..4}$ i $D_{1..4}$ funkcije varijabli $x, q_1, r_u, h_1, h_2, h_3, z, u_1, u_2$ i u_3 .

Oduzimanjem (9) od (8) dobije se

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{C_4 D_2 - C_2 D_4}{C_2 D_1 - C_1 D_2} + \frac{C_3 D_2 - C_2 D_3}{C_2 D_1 - C_1 D_2} \frac{dz}{dx}. \quad (10)$$

Jednačba (7) se može zapisati i u diferencijalnom obliku kao

$$\frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{dh_3}{dx} = -\frac{dz}{dx}. \quad (11)$$

4 NUMERIČKO RJEŠENJE

Kako bi se izračunale nepoznanice h_1 , h_2 i h_3 treba riješiti sustav jednačbi koje slijede iz (10), (9) i (11):

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{C_4 D_2 - C_2 D_4}{C_2 D_1 - C_1 D_2} + \frac{C_3 D_2 - C_2 D_3}{C_2 D_1 - C_1 D_2} \frac{dz}{dx}. \quad (12)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = -\frac{D_1}{D_2} \frac{dh_1}{dx} - \frac{D_3}{D_2} \frac{dz}{dx} - \frac{D_4}{D_2}, \quad (13)$$

$$\frac{dh_3}{dx} = -\frac{dh_1}{dx} - \frac{dh_2}{dx} - \frac{dz}{dx}. \quad (14)$$

Nepoznanice u_1 , u_2 i u_3 će se eliminirati koristeći algebarske izraze

$$u_1 = \frac{q_1}{h_1}, \quad u_2 = \frac{u_1}{r_u}, \quad u_3 = -u_2 \frac{h_2}{h_3}. \quad (15)$$

Naime, iz (2) slijedi kako je q_1 konstanta, a poznavajući dubinu h_1 definirana je i brzina gornjeg sloja u_1 . Brzina srednjeg sloja u_2 se računa zasebno za svaki prostorni korak pomoću unaprijed proizvoljno zadanog omjera $r_u = u_1/u_2$. Brzina donjeg sloja u_3 će se odrediti iz jednakosti (4).

Diferencijalne jednačbe (12)-(14) će se diskretizirati pomoću implicitne trapezne metode, te se tako može pisati

$$h_i^{(k+1)} = h_i^{(k)} + \frac{\Delta x}{2} (F_i^{(k+1)} + F_i^{(k)}) \quad (16)$$

gdje je F_i desna strana jednačbe (12)-(14), $i=1,2,3$ oznaka sloja, a $k=1..N$ gdje je N ukupni broj čvorova [4]. Ovakav tip integracije je bezuvjetno stabilan i drugog reda točnosti. U svakoj iteraciji sustav diskretiziranih jednačbi se u ovom radu rješavao Broydenovom metodom [6].

Kao početni uvjet zadana je dubina gornjeg sloja $h_1(x=0)$, koju je moguće iterativno izračunati iz uvjeta da je nazivnik jednačbe (12) jednak nuli. Dubine slojeva h_2 i h_3 za $x=0$ su definirane proizvoljnim omjerom, a brzine u_1 , u_2 i u_3 za $x=0$ se mogu izračunati pomoću (15).

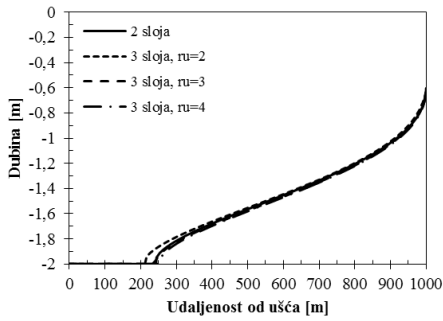
5 USPOREDBA REZULTATA

Na nekoliko karakterističnih primjera je troslojni model uspoređen s postojećim dvoslojnim modelom [2] koji zanemaruje dinamiku donjeg sloja i to, kako bi se kvalitativno mogao procijeniti utjecaj konvektivnih članova u donjem sloju i posmičnog naprezanja pri dnu.

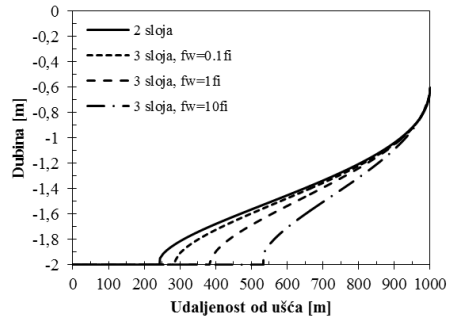
Prvi primjer je korito horizontalnog dna, dubine $H=2,0$ m, protoka $q_1=0,25$ m³/s i koeficijenta trenja $f_i=0,004$ (Slika 3a i 3b).

Drugi primjer je dan za istu dubinu i protok ali za znatno manji faktor trenja $f_i=0,0003$ te za slučaj dna s preprekom visine 1,0 m na sredini promatrane dionice korita (Slika 4a i 4b).

Koeficijent trenja među slojevima f_i je zadan na način da ukupno posmično naprezanje τ_i u slučaju dvoslojnog i troslojnog modela bude jednako. Kod troslojnog modela je variran omjer brzina gornjeg i srednjeg sloja r_u te iznos koeficijenta trenja pri dnu f_w , kako bi se kvalitativno ocijenio utjecaj promjena u troslojnom modelu u odnosu na postojeći dvoslojni model.

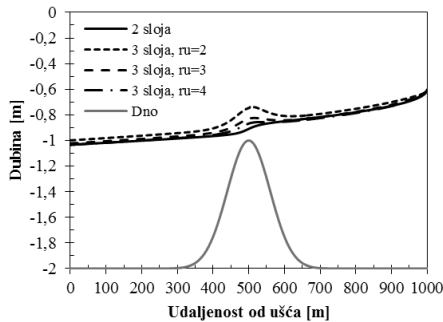


(a)

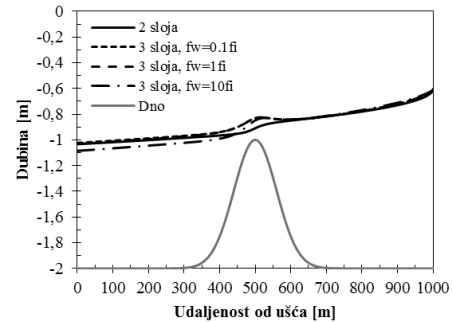


(b)

Slika 3. Primjer 1: razdjelnica slojeva prema dvoslojnom i troslojnom modelu za različite a) omjere brzina u donjem sloju, b) koeficijente trenja pri dnu



(a)



(b)

Slika 4. Primjer 2: razdjelnica slojeva prema dvoslojnom i troslojnom modelu za različite a) omjere brzina u donjem sloju, b) koeficijente trenja pri dnu

Iz prvog primjera proračuna dubine razdjelnice s horizontalnim dnom (Slika 3a) može se primijetiti da oba modela daju približno jednake rezultate neovisno o zadanom omjeru brzina prvog i srednjeg sloja (r_u) što je i očekivano s obzirom na to da je koeficijent renja pri dnu za troslojni model zadan jednakim nuli, a bez većih promjena dubina niti magnituda konvektivnih članova donja dva sloja ne dolaze do izražaja. S druge strane, razlike između dva modela postaju primjetnije ako se pri dnu zada veći koeficijent trenja (Slika 3b). Očekivano, razlika je proporcionalna veličini posmičnog naprezanja između donjeg sloja i dna korita.

Na drugom primjeru promatra se dno s preprekom, zadan je puno manji faktor trenja f_w uslijed čega je nagib razdjelnice znatno blaži pa se fronta slanog klina nalazi izvan promatrane dionice, ali iznad prepreke uslijed promjena dna korita, do izražaja dolaze konvektivni članovi donjih slojeva (Slika 4a). Utjecaj trenja pri dnu nije primjetan na promatranoj dionici (Slika 4b), ali je za očekivati da će biti jednak kao i na prethodnom primjeru (Slika 3b) kada se promatra cjelokupna dužina slanog klina.

6 ZAKLJUČAK

U radu je predložen troslojni model stacionarnog tečenja u stratificiranom estuariju tipa slani klin. Na nekoliko se primjera kvalitativno pokušalo ocijeniti koliki je utjecaj konvektivnog člana donjih slojeva te posmičnog naprezanja pri dnu, koji se zanemaruju u postojećem dvoslojnom modelu [2]. Numerička analiza toka je pokazala da posmično naprezanje pri dnu ima znatnog utjecaja na duljinu slanog klina te da konvektivni članovi donja dva sloja imaju primjetan utjecaja na dubinu donjih slojeva posebice kod tečenja preko prepreke. Iz navedenog se da zaključiti kako je troslojni model unapređenje postojećih modela ovoga tipa [2], u pokušaju što preciznijeg opisivanja 1D stacionarnog tečenja u estuariju. Troslojni model se planira proširiti i za slučaj tečenja u koritu s proizvoljno zadanim poprečnim profilima te će se u nekom budućem radu prikazati i usporedba izračunatih dubina razdjelnice slojeva i terenskih mjerenja za različite realne parametre.

Glavni nedostatak ovog modela je prvenstveno proizvoljno zadan omjer brzina gornjeg i srednjeg sloja po cijeloj dužini slanog klina te početni omjer dubina srednjeg i donjeg sloja neovisno o ostalim karakteristikama toka (dubine slojeva, trenje, viskoznost, itd.). Iz tog razloga je model potrebno nadograditi s realnijim i kompleksnijim opisom vertikalne distribucije brzina po dubini toka, i to u prisutnosti stratificiranog fluida.

Zahvala:

Prikazano istraživanje je provedeno u sklopu znanstvenog projekta „*Hidrologija osjetljivih vodnih resursa u kršu*“ (114-0982709-2549) koji podržava Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

Literatura:

- [1] Van der Tuin, H., „Guidelines on the Study of Seawater Intrusion into Rivers“, UNESCO, Paris, 1991.
- [2] Schijf, J.B., Schonfeld, J.C., „Theoretical Considerations on the Motion of Salt and Fresh Water“, Proc. of Minnesota Int. Hydraulics Convention. Minnesota USA, 1953.
- [3] Arita, M., Jirka, M., „Two-Layer Model of Saline Wedge“, Part I & II, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.113, No.10, 1987.
- [4] Szymkiewicz, R., „Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics“, Springer, 2010.
- [5] Chanson, H., „Environmental Hydraulics of Open Channel Flows“, Elsevier, 2004.
- [6] Broyden, C.G., „A Class of Methods for Solving Simultaneous Equations“. Mathematics of Computation, Vol 92, No. 19, 1965.

Autori:

Nino Kravica, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-932, e-mail:

nino.kravica@gradri.uniri.hr, web stranica: www.gradri.uniri.hr

Vanja Travaš, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-938, e-mail:

vanja.travas@gradri.uniri.hr, web stranica: www.gradri.uniri.hr

Nevenka Ožanić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-xxx, e-mail:

nevenka.ozanic@gradri.uniri.hr, web stranica: www.gradri.uniri.hr

MODEL IZVIJANJA GREDNIH NOSAČA KOMPOZITNIH KUTIJASTIH PROFILA

Lanc, D., Turkalj, G., Pešić, I. i Jurki, B.

Sažetak: U radu je prezentiran numerički model za analizu izvijanja tankostijenih laminatno-kompozitnih greda zatvorenih kutijastih poprečnih presjeka. Numerički algoritam baziran je na jednodimenzionalnom prostornom grednom konačnom elementu. Izvijanju je pristupano kao problemu vlastitih vrijednosti. Model je verificiran na testnom primjeru aksijalno opterećene proste grede laminatnog kutijastog profila uz razmatranje utjecaja kuta orijentacije vlakana i na kritičnu silu izvijanja.

Ključne riječi: *Kompozitne grede, Kutijasti profili, Gredni konačni element.*

1 UVOD

Vlaknima ojačani kompozitni materijali tijekom posljednjih nekoliko desetljeća nalaze široku konstrukcijsku primjenu, a zbog mnogih svojih poželjnih značajki, kao što su npr. visoka krutost uz malu masu, otpornost na koroziju, magnetna transparentnost i dr. Kao tankostijene grede kutijastih profila obično se proizvode poltruzijom i koriste se u mnogim inženjerskim poljima. Zbog svojega oblika, takve su konstrukcije posebice sklone gubitku stabilne deformacijske forme pri izvijanju te je analiza u smislu određivanja kritičnog opterećenja kod kojega konstrukcija gubi nosivost od krucijalnog značaja.

Teoriju tankostijenih članova zatvorenih presjeka kod izotropnih materijala prvi je razvio Vlasov [1] a potom nadopunio Gjelsvik [2] dok su teorijske postavke zatvorenih profila kompozitnih poprečnih presjeka razvijali Song i Librescu [3], Kollar i Pluzsik [4], Cortinez i Piovan [5] te Vo i Lee [6].

Ovaj rad pretpostavlja da je gredni element pravocrtan i prizmatičan. Uključuje efekte prostornih pomaka, a također, preko nelinearnog polja pomaka i efekti prostornih rotacija. Nadalje, pretpostavljeno je da se pri deformiranju projekcija srednje kontura poprečnoga presjeka u vlastitu ravninu ne mijenja, a da raspodjela posmičnih deformacija srednje ravnine $\bar{\gamma}_{zs}$ u smjeru konture prati raspodjelu St. Venantova smičnoga toka. Osim toga u razmatranju su pretpostavljene Kirchhoff–Love teorija ploča i klasična teorija laminata (CLT). Razvijeni je gredni konačnoelementni model direktno zasnovan na nedavno objavljenim člancima Turkalja i dr. [7] te Lanca i dr. [8, 9], a novinu predstavlja proširenje modela i na profile zatvorenih poprečnih presjeka zasnovano na prethodno spomenutim teorijskim pretpostavkama.

Problem stabilnosti tretiran je kao problem vlastitih vrijednosti.

2 OSNOVNE POSTAVKE

2.1 Pomaci

U grednom kartezijevom koordinatnom sustavu za koji se uzdužna os grede koja spaja težišta O čvornih presjeka poklapa s osi z dok su x i y glavne centralne osi poprečnog presjeka, pomaci točaka poprečnog presjeka kao krutog tijela su:

$$\begin{aligned} w_o = w_o(z), u_o = u_o(z), v_o = v_o(z), \varphi_z = \varphi_z(z), \\ \varphi_x = -v'_o = \varphi_x(z), \varphi_y = u'_o = \varphi_y(z), \theta = -\varphi'_z = \theta(z) \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su w_o , u_o i v_o translacijski pomaci u smjerovima z , x i y definirani za težište poprečnog presjeka; dok su φ_z , φ_x , i φ_y rotacijski pomaci oko z , x i y osi. Pomak θ predstavlja tzv. parameter vitoperenja poprečnog presjeka. Polje pomaka točaka poprečnog presjeka definirano je izrazom:

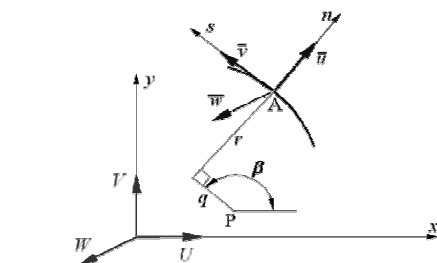
$$\mathbf{U}_{\text{uk}}^T = \{W \ U \ V\} = \{w + \tilde{w} \ u + \tilde{u} \ v + \tilde{v}\} \quad (2)$$

U izrazu (2) w , u i v predstavljaju komponente standardnog linearnog polja pomaka dok su \tilde{w} , \tilde{u} i \tilde{v} veličine drugog reda zbog uključenih efekata velikih rotacija u skladu s [7, 8].

Na sl. 1. prikazan je dio konture prostornog tankostijenog grednog nosača. U konturnom koordinatnom sustavu (z, n, s) definirani su pomaci srednje linije konture presjeka $\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$, dok su pomaci točaka udaljenih od srednje linije definirani kao:

$$w(z, s, n) = \bar{w} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad v(z, s, n) = \bar{v} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}; \quad u(z, s, n) = \bar{u} \quad (3)$$

pri čemu je s r označen radijus konture, a q udaljenost proizvoljno odabrane točke pola P od pravca normale n .



Sl. 1. Pomaci točaka konture poprečnog presjeka

Veza grednih i konturnih pomaka izražena je kao:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= W(z, s, n); \\ \bar{v} &= U(z, s, n) \cos \beta + V(z, s, n) \sin \beta; \\ \bar{u} &= U(z, s, n) \sin \beta - V(z, s, n) \cos \beta \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Deformacija

Pretpostavljajući nelinearno polje pomaka grede, tenzor deformacije sastoji se od tri dijela:

$$e_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij}; \quad e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \eta_{ij} = 0.5 u_{k,i} u_{k,j}, \quad \tilde{e}_{ij} = 0.5(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}). \quad (5)$$

Komponente deformacije različite od nule u egzaktnom obliku su:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}; \quad e_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - 2n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \bar{\gamma}_{zs} - 2n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z}; \quad (6)$$

$$\eta_{zz} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad \eta_{zs} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial s}; \quad (7)$$

$$\tilde{e}_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}; \quad \tilde{e}_{zs} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (8)$$

Pri čemu je u izrazu (7) deformacija $\bar{\gamma}_{zs}$ jednaka:

$$\bar{\gamma}_{zs} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{F_s}{t} \cdot \frac{d\varphi_z}{dz} \quad (9)$$

gdje t predstavlja debljinu stijenke kutijastog presjeka dok je F_s je St.Venantov smični tok koji npr. za profil konstantne debljine stijenke iznosi:

$$F_s = \frac{bht}{h+b} \quad (10)$$

2.3 Unutarnje sile

Konstitutivna jednadžba za jedan laminatni sloj glasi:

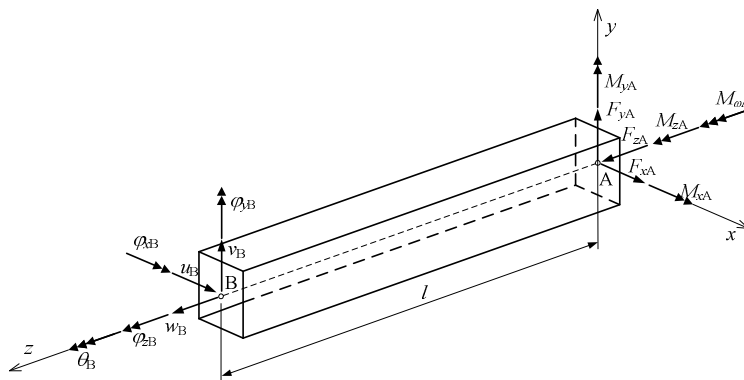
$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{pmatrix} \quad (11)$$

gdje su \bar{Q}_{ii}^* tzv. reducirane krutosti prema [10, 11]. Integriranjem po debljini laminata n kao i po duljini konture s , te transformacijom u gredni koordinatni sustav slijede unutarnje sile poprečnog presjeka grede:

$$F_z = \int_A \sigma_z n ds; \quad M_z = \int_A \tau_{zs} \left(n + \frac{F_s}{2t} \right) dn ds; \quad M_\omega = \int_A \sigma_z (\omega - nq) dn ds; \quad (12)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z (y - n \cos \beta) dn ds; \quad M_y = \int_A \sigma_z (x + n \sin \beta) dn ds;$$

3 GREJNI KONAČNI ELEMENT



Sl. 2. Tankostijeni gredni konačni element: čvorni pomaci i čvorne sile

Na sl. 2. prikazan je prostorni tankostijeni gredni konačni element s dva čvora označena s A i B. Konačni element ima sveukupno 14 stupnjeva slobode gibanja te su odgovarajući vektori čvornih pomaka i čvornih sila e-tog elementa:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_A, u_A, v_A, \varphi_{zA}, \varphi_{xA}, \varphi_{yA}, w_B, u_B, v_B, \varphi_{zB}, \varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \theta_A, \theta_B\}, \quad (13)$$

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{zA}, F_{xA}, F_{yA}, M_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, F_{zB}, F_{xB}, F_{yB}, M_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{\omega A}, M_{\omega B}\}. \quad (14)$$

Primjenom principa virtualnih radova na gredni konačni element slijedi:

$$\delta U_E + \delta U_G = \delta W, \quad (15)$$

gdje δU_E i δU_G predstavljaju virtualnu potencijalnu energiju deformiranja i virtualni geometrijski potencijal:

$$\delta U_E = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \quad (16)$$

$$\delta U_G = \int_V S_{ij} (\delta \eta_{ij} + \delta \tilde{z}_{ij}) dV - \int_{A_\sigma} t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e, \quad (17)$$

dok je δW virtualni rad vanjskih sila:

$$\delta W = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e. \quad (18)$$

U gornjim izrazima \mathbf{k}_E^e i \mathbf{k}_G^e su elastična i geometrijska matrica krutosti konačnog elementa, obje dimenzija (14×14) dok je \mathbf{f}^e vektor čvornih sila.

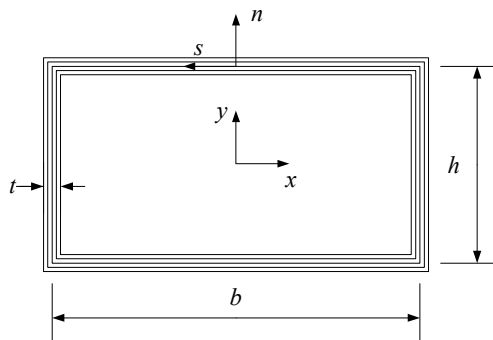
Formiranjem jednadžbe konstrukcije u globalnom koordinatnom sustavu slijedi:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (19)$$

gdje je \mathbf{K}_E elastična matrica krutosti konstrukcije, \mathbf{K}_G geometrijska matrica krutosti konstrukcije, a \mathbf{U} i \mathbf{F} su vektori inkrementalnih čvornih pomaka i čvornih sila konstrukcije.

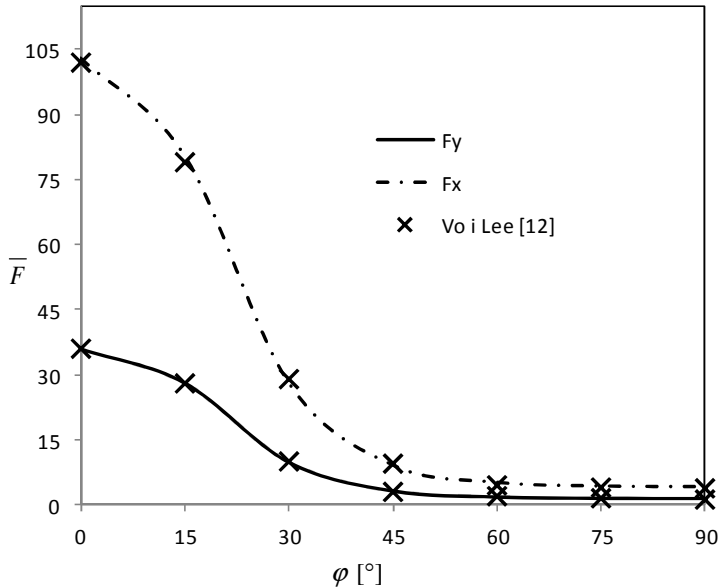
4 PRIMJER

Obostrano zglobno oslonjena greda tlačno je opterećena je silom F u težištu poprečnog presjeka. Duljine grede je $L = 8$ m a poprečni je presjek tankostijenog kutijastog profila dimenzija $b = 200$ mm, $h = 100$ mm, $t = 10$ mm, sl. 3.



Sl. 3. Kutijasti laminatno-kompozitni poprečni presjek grede

Stjenke profila četveroslojni su laminati rasporeda vlakana $[\pm\varphi]_s$. Materijalne su značajke laminata: $E_1= 250.0$ GPa, $E_2= 10.0$ GPa, $G_{12}= 6.0$ GPa i $\nu_{12}=0.25$. Rezultati promjene bezdimenzijske kritične sile izvijanja, $\bar{F} = FL^2/b^3tE_2$, za fleksijske modove izvijanja u x i y smjeru, a s obzirom na promjenu kuta orijentacije vlakana φ , prikazani su na sl. 4. i uspoređeni s rezultatima Vo-a i Lee-a [12].



Sl. 4. Promjena bezdimenzijske kritične sile izvijanja s promjenom kuta orijentacije vlakana

5 ZAKLJUČAK

U radu je prikazan konačnoelementni gredni model za analizu izvijanja tankostijjenih laminatno-kompozitnih greda zatvorenih kutijastih poprečnih presjeka. Izrađeni računalni program verificiran je na primjeru izvijanja proste grede usporedbom s rezultatima dostupnim iz literature. Spomenuti model namjerava se u budućem radu implementirati za analizu nelinearnog odziva čime bi se omogućilo praćenje deformiranja grednih konstrukcije u pred i post fazi izvijanja.

Literatura:

- [1] Vlasov, V.Z., "Thin-walled elastic beams", Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- [2] Gjelsvik, A., "The theory of thin-walled bars", John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [3] Song, O., Librescu, L., "Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour", Journal of Sound and Vibration, Vol.167, No.1, 1993, str. 129–47.
- [4] Kollar, L.P., Pluzsik, A., "Analysis of thin-walled composite beams with arbitrary layup", Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol.21, No.16, 2002, str. 1423–65.
- [5] Cortinez, V.H., Piovan, M.T., "Stability of composite thin-walled beams with hear deformability", Computers and Structures Vol.84, 2006, str. 978–90.

- [6] Vo, T.P., Lee, J., “Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams”, *Engineering Structures*, Vol.29, 2007, str. 1774–1782.
- [7] Turkalj, G., Brnic, J., Kravanja, S., “A beam model for large displacement analysis of flexibly connected thin-walled beam-type structures”, *Thin-Walled structures*, Vol.49, 2011, str. 1007-1016.
- [8] Lanc, D., Turkalj, G., Pešić, I., “Global buckling analysis model for thin-walled composite laminated beam type structures”, *Composite structures*, Vol.111, 2014, str. 371-380.
- [9] Lanc, D., Turkalj, G., Pešić, I., “Analiza izvijanja grednih nosača tankostjenih kompozitnih poprečnih presjeka”, *Zbornik radova Trećeg susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, Osijek, 2010, str. 41-46.
- [10] Jones, R.M., “*Mechanics of composite materials*”, Hemisphere Publishing, New York, 1975.
- [11] Reddy, J.N., “*Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*”, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [12] Vo, T.P., “Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams”, *Engineering Structures*, Vol.29, 2007, str. 1774-1782.

Autori:

Domagoj Lanc, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651495, fax 051 651490, e-mail: dlanc@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Goran Turkalj, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651499, fax 051 651490, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Igor Pešić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651503, fax 051 651490, e-mail: ipesic@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Barbara Jurki, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Vukovarska 58, e-mail: barbara.jurki@gmail.com

POOPĆENI RUBNI UVJETI PERIODIČNOSTI U RAČUNALNOJ HOMOGENIZACIJI DRUGOG REDA

Lesičar, T., Tonković, Z. i Sorić, J.

Sažetak: U radu je prikazana metoda višerazinskog modeliranja procesa deformiranja heterogenih materijala na dvije razine primjenom računalne homogenizacije drugog reda uz pretpostavku malih deformacija. Detaljnije je istražena primjena poopćenih uvjeta periodičnosti na reprezentativnom volumenskom elementu (RVEu). Ispitan je utjecaj izbora metode numeričke integracije za implementaciju integralnog uvjeta mikrofluktuacija na rubne čvorove RVEa. Za diskretizaciju makromodela primijenjen je dvodimenzijski trokutni element s C^1 kontinuitetom, dok je RVE diskretiziran četverokutnim elementom prvog reda. Učinkovitost i točnost prikazane metode provjerena je na problemu smičnog sloja.

Ključne riječi: heterogeni materijal, višerazinsko modeliranje, gradijentna teorija, računalna homogenizacija drugog reda, konačni element s C^1 kontinuitetom, poopćeni rubni uvjeti periodičnosti, integralni uvjet mikrofluktuacija

1 UVOD

U današnje vrijeme kada tržišni zahtjevi traže čim jeftinije materijale uz sve bolje karakteristike, ispitivanje utjecaja mikrostrukture materijala na njegova mehanička svojstva ima sve značajniju ulogu kod razvoja novih materijala, kao i eksploatacije postojećih. U tu svrhu, razvijena je skupina numeričkih metoda višerazinskog modeliranja, koje razmatraju ponašanje mikrostrukture materijala (RVEa), rezultate analize uprosječuju po volumenu RVEa (homogenizacija) te ih koriste u daljnjoj analizi makromodela.

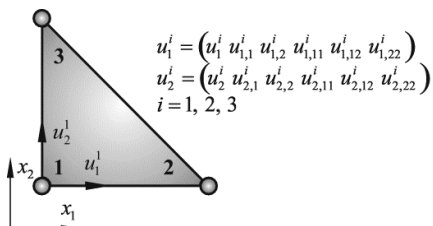
S obzirom na problem rubnih vrijednosti koji se rješava na makro- i mikromodelu, razlikuju se metode homogenizacije prvog [6] i drugog reda [2, 3]. Za diskretizaciju makromodela kod homogenizacije drugog reda se primjenjuju konačni elementi višeg reda koji zadovoljavaju C^1 kontinuitet. Kod računalne homogenizacije drugog reda RVE i dalje zadržava C^0 kontinuitet. Zbog različitih teorija primijenjenih na makro- i mikrorazini nije moguće ostvariti volumenski prosjek svih varijabli makrorazine na mikrorazini. Navedena jednakost ostvaruje se dodatnim formulacijama varijabli višeg reda na RVEu te pomoću integralnog uvjeta mikrofluktuacija. Istraživanja su pokazala da rubni uvjeti periodičnosti na RVEu daju najrealnije rezultate homogenizacije [6].

U radu je ukratko objašnjen algoritam višerazinskog modeliranja heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije drugog reda. Makrorazina je diskretizirana dvodimenzijskim trokutnim konačnim elementom za ravninsko stanje deformacija, koji zadovoljava C^1 kontinuitet. Detaljno su razmotreni poopćeni rubni uvjeti periodičnosti, kao i implementacija integralnog uvjeta mikrofluktuacija na rubove RVEa. Svi numerički algoritmi ugrađeni su u programski paket ABAQUS/Standard [1] primjenom korisničkih rutina.

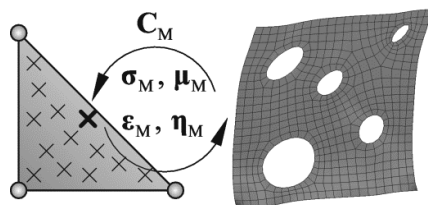
2 MIKRO-MAKRO ALGORITAM

Za provedbu homogenizacije drugog reda izveden je dvodimenzijski trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom, temeljen na gradijentnoj teoriji [7]. Element je prikazan na slici 1. Kao što je vidljivo, element ima 36 stupnjeva slobode. Detaljan izvod konačnog elementa prikazan je u [4, 5].

U mikro-makro algoritmu makrorazinu čini makromodel, diskretiziran prethodno opisanim trokutnim elementima. Mikrorazinu predstavlja RVE, diskretiziran četverokutnim elementima prvog reda. U svakoj točki integracije makromodela provodi se analiza RVEa. Gradijent pomaka ε_M i gradijent gradijenta pomaka η_M na makrorazini se putem poopćenih rubnih uvjeta periodičnosti transformiraju u pomake rubnih čvorova RVEa. Nakon homogenizacije dobivaju se tenzori naprezanja σ_M i sekundarnog naprezanja μ_M te materijalne matrice C_M , koji se prenose na makrorazinu (slika 2). Više detalja o računalnoj homogenizaciji drugog reda može se naći u [2, 5].



Sl. 1 Trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom



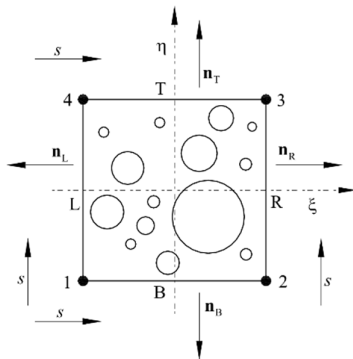
Sl. 2 Shema mikro-makro algoritma

3 POOPĆENI RUBNI UVJETI PERIODIČNOSTI

U računalnoj homogenizaciji drugog reda polje pomaka koje se dodjeljuje na rubove RVEa opisano je pomoću Taylorovog reda kao

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{x}^T \varepsilon_M + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \eta_M \mathbf{x}) + \mathbf{r}, \quad (1)$$

gdje je \mathbf{x} prostorna koordinata na rubovima RVEa, definiranog prema slici 3, a \mathbf{r} predstavlja polje mikrofluktuacija. Ovdje je veličinama s makro razine dodijeljen indeks "M", dok su veličine s mikro razine označene indeksom "m".



Sl. 3 Reprezentativni volumenski element

Izraz (1) može se zapisati u obliku

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon}_M + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\eta}_M + \mathbf{r}, \quad (2)$$

gdje su \mathbf{D} i \mathbf{H} koordinatne matrice

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x & 0 & y \\ 0 & 2y & x \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 & 2y^2 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 2y^2 & 0 & 2x^2 & 0 & xy \end{bmatrix}.$$

Kod poopćenih rubnih uvjeta periodičnosti pomaci kutnih čvorova 2, 3 i 4 se računaju eksplisitno prema izrazu

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{D}_i^T - \mathbf{D}_1^T) \boldsymbol{\varepsilon}_M + (\mathbf{H}_i^T - \mathbf{H}_1^T) \boldsymbol{\eta}_M, \quad i = 2, 3, 4. \quad (4)$$

Kao što je vidljivo iz izraza (4), pomak kutnog čvora 1 je suspregnut ($\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$) zbog eliminacije pomaka krutog tijela. Na temelju poopćenog rubnog uvjeta periodičnosti vrijede jednakosti

$$\mathbf{r}_L(s) = \mathbf{r}_R(s), \quad \mathbf{r}_T(s) = \mathbf{r}_B(s). \quad (5)$$

Raspisivanjem polja pomaka lijevog („L“) i desnog („R“) ruba RVEa pomoću (2) slijede izrazi

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{D}_R^T \boldsymbol{\varepsilon}_M + \mathbf{H}_R^T \boldsymbol{\eta}_M + \mathbf{r}_R, \quad \mathbf{u}_L = \mathbf{D}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}_M + \mathbf{H}_L^T \boldsymbol{\eta}_M + \mathbf{r}_L. \quad (6)$$

Uvrštavanjem prve jednakosti iz izraza (5) u izraz (6) nakon grupiranja varijabli slijede jednadžbe periodičnosti desnog i lijevog ruba RVEa

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = (\mathbf{D}_R^T - \mathbf{D}_L^T) \boldsymbol{\varepsilon}_M + (\mathbf{H}_R^T - \mathbf{H}_L^T) \boldsymbol{\eta}_M. \quad (7)$$

Analogno prethodno prikazanom postupku dobivaju se i jednadžbe periodičnosti gornjeg („T“) i donjeg („B“) ruba RVEa

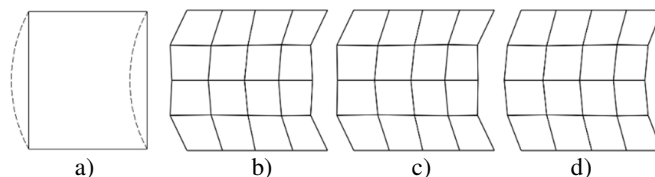
$$\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_B = (\mathbf{D}_T^T - \mathbf{D}_B^T) \boldsymbol{\varepsilon}_M + (\mathbf{H}_T^T - \mathbf{H}_B^T) \boldsymbol{\eta}_M. \quad (8)$$

Integralni uvjet mikrofluktucija koji se javlja kod rubnih uvjeta periodičnosti izveden je u [5], a svodi se na dvije integralne relacije koje vežu pomake rubnih čvorova lijevog i donjeg ruba RVEa

$$\int_{A_L} \mathbf{u}_L dA = \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \int_{A_L} \mathbf{x}_L dA + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_M^T \int_{A_L} (\mathbf{x}_L^T \mathbf{x}_L) dA, \quad \int_{A_B} \mathbf{u}_B dA = \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \int_{A_B} \mathbf{x}_B dA + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_M^T \int_{A_B} (\mathbf{x}_B^T \mathbf{x}_B) dA. \quad (9)$$

Prilikom implementacije izraza (9) u programski paket ABAQUS ispitano je nekoliko metoda numeričke integracije kao što su Booleovo, Simpsonovo i trapezno pravilo. Usporedba je napravljena na jediničnom homogenom RVEu diskretiziranom pomoću 16 četverokutnih elemenata. Na rubove RVEa su dodijeljeni pomaci koji odgovaraju sekundarnoj deformaciji $\eta_{221} = u_{1,22} = 0,02$, što je prikazano na slici 4a. Sa slike je vidljivo da u kutnim čvorovima nema pomaka. Jednadžbe periodičnosti (7) i (8) također su jednake nuli. Odnosno, vidljivo je da bez integralnog uvjeta mikrofluktucija nije moguć prijenos potpunog tenzora sekundarnih deformacija. Očekivano, svaka metoda numeričke integracije zadovoljava integralne relacije (9). S druge strane, deformirani oblici RVEa se razlikuju i jedino trapezno pravilo daje fizikalno realan deformirani oblik RVEa, što je prikazano na slici 4d. Iz slike 4 je očito da jedino trapezno pravilo opisuje glatko zakrivljene rubove RVEa, dok Booleovo i Simpsonovo pravilo stvaraju

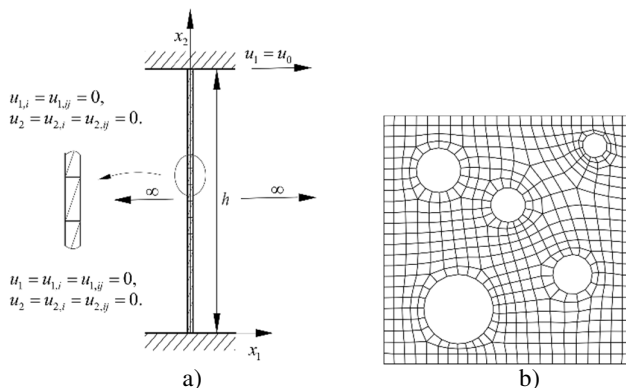
nazubljeni lijevi i desni brid RVEa s cik-cak rasporedom čvorova, što je posljedica neodgovarajuće raspodjele težinskih faktora primijenjenih na pomake čvorova.



Sl. 4 Usporedba deformiranih oblika RVEa dobivenih a) analitički te različitim metodama numeričke integracije: b) Booleovo pravilo, c) Simpsonovo pravilo, d) trapezno pravilo

4 NUMERIČKI PRIMJER

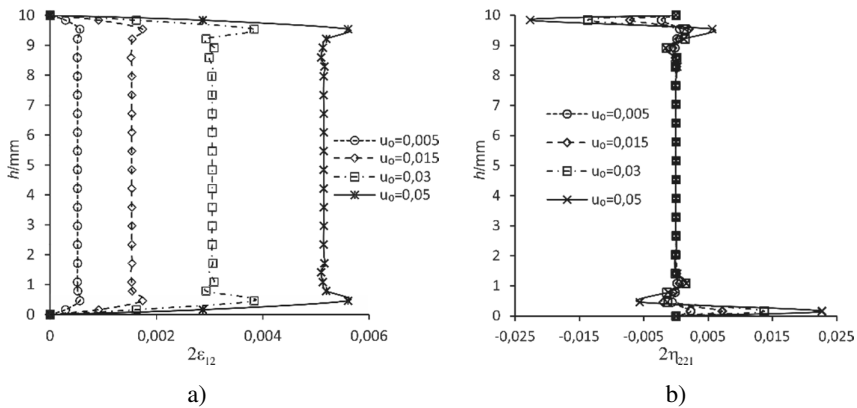
Algoritam višerazinskog modeliranja je testiran na problemu smičnog sloja (*shear layer problem*), često korištenog u literaturi [2, 3, 5]. Makromodel čini sloj heterogenog materijala visine $h = 10$ mm i beskonačne duljine, što omogućava diskretizaciju makromodela jednim redom elemenata po visini. Razmatrane su 3 različite diskretizacije makromodela, s 2, 4 i 8 elemenata po visini sloja, na način prikazan na slici 6a. Za materijal je odabran akademski primjer poroznog čelika s elastoplastičnom matricom i linearnim izotropnim očvršćenjem. Modul elastičnosti matrice E je 210 GPa, a Poissonov faktor 0,3. Granica tečenja iznosi $\sigma_Y = 250$ MPa, dok je elastoplastični tangentni modul $E_T = 250$ MPa. RVE duljine stranice 0,2 mm diskretiziran je s 508 četverokutnih elemenata, što je prikazano na slici 6b. Sastoji se od 13% proizvoljno razmještenih šupljina srednjeg polumjera 0,043 mm. Rubni uvjeti makromodela prikazani su na slici 6a, gdje je $i, j = 1, 2$. Lijevi i desni brid vezani su jednadžbama periodičnosti što daje neovisnost rješenja o koordinati x_1 , dok je na gornjem rubu makromodela dodijeljen horizontalni pomak $u_0 = 0,05$ mm u nekoliko inkremenata.



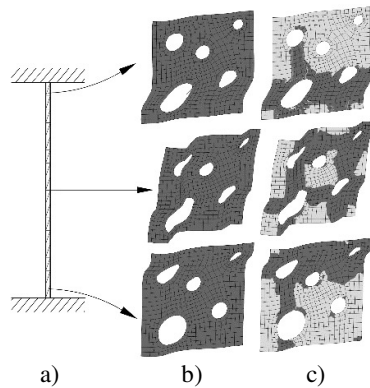
Sl. 6 Smični sloj: a) diskretizacija makromodela, b) reprezentivni volumenski element

Raspodjela posmične i sekundarne deformacije po visini makromodela prikazana je na slikama 7 i 8. Sa slike 7 je vidljivo da kruti rubni uvjeti u uklještenjima uzrokuju male deformacije uz njih, ali se zato javljaju veliki gradijenti sekundarne deformacije η_{221} .

Pošto je u posmičnoj deformaciji ($2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}$) prvi član dominantan, a $\eta_{221} = u_{1,22}$, krivulje sa slike 7b zapravo predstavljaju derivacije pripadnih krivulja sa slike 7a. Važno je napomenuti da je $u_{1,22}$ čvorni stupanj slobode elementa na makrorazini. Slika 8 prikazuje raspodjelu Von Misesovih ekvivalentnih napreznja i ekvivalentne plastične deformacije na nekoliko karakterističnih RVEova za pomak $u_0 = 0,05$ mm.



Sl. 7 Raspodjela deformacija po visini makromodela za različite vrijednosti u_0 : a) posmična deformacija, ε_{12} , b) sekundarna deformacija, η_{221}



Sl. 8 Raspodjela mikrovarijabli u pojedinim točkama integracije makromodela za $u_0 = 0,05$ mm
a) makromodel, b) ekvivalentna napreznja prema Von Misesu, c) ekvivalentna plastična deformacija

Na slici 8b razlikuju se tri karakteristična područja. Na RVEovima smještenim blizu uklještenja uz posmičnu deformaciju javljaju se i njezini gradijenti (slika 7b), što na kraju rezultira razvojem plastičnih zona po RVEu između najvećih šupljina. Na RVEu u sredini makromodela prisutan je čisti smik, jer gradijent deformacije iščezava (slika 7b). Na taj način se plastične zone šire po čitavom RVEu i povezuju sve šupljine. Iz slike 8c vidljiva su lokalna područja velikih plastičnih deformacija na kojima dolazi do razvoja

smičnog sloja, po kojem na kraju dolazi do popuštanja materijala, odnosno plastičnog kolapsa makromodela.

5 ZAKLJUČAK

Prikazan je algoritam dvorazinskog modeliranja procesa deformiranja heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije drugog reda na mikrorazini, uz pretpostavku malih deformacija. Za diskretizaciju makromodela izveden je trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom, dok je RVE diskretiziran C^0 četverokutnim konačnim elementom prvog reda. Prikazan je detaljan izvod poopćenih rubnih uvjeta periodičnosti. Na jednostavnom primjeru zakrivljenosti homogenog RVEa ispitan je utjecaj težinskih faktora različitih metoda numeričke integracije, potrebnih za implementaciju integralnog uvjeta mikrofluktuacija, koji se javlja kod rubnih uvjeta periodičnosti. Rezultati su pokazali da jedino trapezno pravilo daje fizikalno realističan deformirani oblik RVEa. Izvedeni numerički algoritam je implementiran u programski paket ABAQUS i verificiran na primjeru smičnog sloja.

Zahvala

Rad je izrađen u okviru RCOP projekta "Centre of Excellence for Structural Health" (CEEStructHealth) sufinanciranog iz sredstava Europske unije (ugovor IPA2007/HR/16IPO/001-040513).

Literatura

- [1] ABAQUS 6.12-1, Dassault Systemes
- [2] Kaczmarczyk, L. K., Pearce, C. J., Bicanic, N., "Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.74, No.3, 2008, str.506-522.
- [3] Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D., Brekelmans, W. A. M., "Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.193, 2004, str.5525-5550.
- [4] Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J., "C1 Continuity Finite Element Formulation In Second-Order Computational Homogenization Scheme", Journal of Multiscale Modelling, 04, 04, 2012, 19.
- [5] Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J., "A Second-Order Two-Scale Homogenization Procedure Using C1 Macrolevel Discretization", Computational Mechanics, 2014, DOI 10.1007/s00466-014-0995-3
- [6] Miehe, C., Koch, A., "Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains", Archive of Applied Mechanics, Vol.72, No.4-5, 2002, str.300-317.
- [7] Mindlin, R. D., "Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol.1, No.4, 1965, str.417-438.

Autori:

Tomislav Lesičar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-514, fax. 01/6168-187, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr, web: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>
Zdenko Tonković, tel. 01/6168-450, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr
Jurica Sorić, tel. 01/6168-103, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

POBOLJŠANJE MREŽE KONAČNIH ELEMENATA PRIMJENOM KONFIGURACIJSKIH SILA

Lustig, N. i Bićanić, N.

Sažetak: Standardna zadaća kod primjene metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti predstavlja određivanje pomaka čvorova odabrane mreže, iz uvjeta minimiziranja ukupne potencijalne energije tako definiranog diskretiziranog sustava. Svaka promjena mreže, odnosno promjena koordinata čvorova rezultira novim rješenjem, odnosno novim odgovarajućim minimumom potencijalne energije. Koncept tzv. konfiguracijskih sila slijedi iz ovisnosti dobivenog minimuma potencijalne energije o odabiru lokacije čvorova mreže konačnih elemenata, pa se konfiguracijske sile mogu koristiti kao pokazatelj „kvalitete“ odabrane mreže konačnih elemenata. Budući da za točno rješenje konfiguracijske sile unutar homogenog tijela nestaju i ostaju samo konfiguracijske sile na rubu problema, postojanje konfiguracijskih sila je indikator odstupanja numeričkog od točnog rješenja.

Na jednostavnim jednodimenzionalnim štapnim primjerima prikazan je postupak određivanja konfiguracijskih sila direktnim izvodom iz ukupne potencijalne energije. Dobiveni rezultati su uspoređeni sa strogim analitičkim rješenjima za ovakve jednostavne jednodimenzionalne primjere. Počevši od inicijalne mreže, korištenjem konfiguracijskih sila kao indikatora za pomicanje čvorova dolazi se sukcesivno do značajnog poboljšanja mreže konačnih elemenata što se očituje približavanjem strogom analitičkom minimumu potencijalne energije promatranog problema.

Ključne riječi: Konfiguracijske sile, metoda konačnih elemenata, poboljšanje mreže

1 UVOD

Standardni problemi mehanike kontinuuma često se radi svoje složenosti ne mogu rješavati analitičkim metodama već je nužno pribjeći nekim numeričkim metodama koje zahtjevaju određene aproksimacije. Kod metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti diskretizira se promatrani problem na konačne elemente i čvorove te se traže pomaci koji se javljaju u čvorovima uslijed vanjskog opterećenja. Vrijednosti pomaka se dobivaju minimiziranjem ukupne potencijalne energije Π diskretiziranog sistema te rješavanjem tako dobivenog sustava jednadžbi, odnosno rješavanjem ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila u problemu. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sustava po pomacima čvorova dolazi se do unutarnjih sila u čvorovima

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = F_i, \quad (1)$$

koje trebaju nestati kako bi se minimizirala ukupna potencijalna energija. Za jednostavne primjere, pomaci se mogu dobiti u obliku zatvorenih izraza koje se može uvrstiti u izraz za ukupnu potencijalnu energiju kako bi ju se predstavilo u ovisnosti o položajima čvorova.

Konfiguracijske sile u mehanici kontinuuma se pojavljuju u kontekstu prisustva nehomogenosti materijala [4] dok su konfiguracijske sile u metodi konačnih elemenata prvi puta analizirane u [2]. Ukoliko se želi minimizirati ukupnu potencijalnu energiju sistema u ovisnosti o koordinatama čvorova, dobiju se konfiguracijske sile. Konfiguracijske sile kod linearne elastičnosti u metodi konačnih elemenata su prisutne i kod homogenih materijala jer se kontinuum preslikava u čvorove, koji su međusobno povezani interpolacijskim funkcijama. Tako se zapravo odabrana mreža gdje čvorovi nisu postavljeni u idealni položaj u ovisnosti o opterećenju i rubnim uvjetima zadanog problema, mogu interpretirati ekvivalentno kao prisutnost nehomogenosti. Konfiguracijske sile se mogu odrediti pomoću ukupne potencijalne energije sustava diskretiziranog metodom konačnih elemenata. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po položajima čvorova dobivaju se konfiguracijske sile [5]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = G_i. \quad (2)$$

Promjenom početnog položaja čvorova dolazi se do novog rješenja i odgovarajućeg minimuma potencijalne energije. Konfiguracijske sile se mogu promatrati kao pokazatelj kvalitete mreže konačnih elemenata, s obzirom da u idealnoj konfiguraciji čvorova konfiguracijske sile na unutarnjim čvorovima nestaju i ostaju samo konfiguracijske sile na rubu problema.

2 NUMERIČKI PRIMJERI

2.1 Ravni štap opterećen vlastitom težinom i koncentriranom silom na kraju

Prvi analizirani primjer je slučaj ravnog štapa s površinom poprečnog presjeka A , modulom elastičnosti E , konačne duljine L i gustoće ρ . Štap je diskretiziran pomoću $n - 1$ konačna linijska elementa s ukupno n čvorova u točkama $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ gdje je $x_1 = 0$ i $x_n = L$. Duljine pojedinih elemenata su $h_k = x_{k+1} - x_k, k = 1, 2, \dots, n - 1$. Štap je opterećen vlastitom težinom mg po cijeloj dužini i koncentriranom silom P na kraju (u čvoru x_n) a pridržan je u početnom čvoru x_1 . Sličan problem razmatran je u [1].

Ukupna potencijalna energija sistema koja ovisi o polju pomaka, odnosno o čvornim pomacima u_i , sastoji se od energije deformiranja štapa, gravitacijskog potencijala i potencijala koncentrirane sile. Sumiranjem utjecaja svih elemenata dobivamo

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{EA}{h_k} (u_{k+1} - u_k)^2 - \rho g h_k (u_{k+1} + u_k) \right] - P u_n. \quad (3)$$

U početnom čvoru vrijedi rubni uvjet, $u_1 = 0$. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sistema po pomacima te rješavanjem tako dobivenog sustava jednadžbi minimizira se ukupna potencijalna energija. Tako se iz

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

dolazi do sustava linearnih jednadžbi koje trebaju zadovoljiti pomaci kako bi se minimiziralo ukupnu potencijalnu energiju. Rješavanjem sustava jednadžbi dolazi se do pomaka

$$u_i = \frac{\rho g}{2E} (x_i - x_1)(2x_n - x_1 - x_i) + \frac{P}{EA} (x_i - x_1), i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (5)$$

i

$$u_n = \frac{\rho g}{2E}(x_n - x_1)^2 + \frac{P}{EA}(x_n - x_1) \quad (6)$$

Uvrštavanjem zatvorenih izraza za pomake čvorova (5) i (6) u ukupnu potencijalnu energiju sustava (3) dolazi se do izraza koji predstavlja ukupnu potencijalnu energiju sustava u ovisnosti o položaju čvorova u diskretizaciji konačnim elementima. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sustava po koordinatama položaja čvorova dobivaju se konfiguracijske sile. Za primjer ravnog štapa slijedi

$$G_1 = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E} [4L^2 - h_1^2] + \frac{\rho g}{E} PL + \frac{P^2}{2EA} \quad (7)$$

$$G_i = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E} [h_{i-1}^2 - h_i^2], i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (8)$$

$$G_n = -\frac{\rho^2 g^2 A}{8E} [4L^2 - h_{n-1}^2] - \frac{\rho g}{E} PL - \frac{P^2}{2EA} \quad (9)$$

Iz gornjih izraza je vidljivo da koncentrirana sila utječe isključivo na konfiguracijske sile u rubnim čvorovima dok gravitacijsko opterećenje uzrokuje pojavu konfiguracijskih sila u svim čvorovima problema. Također se vidi da kod konfiguracijskih sila ne vrijedi princip superpozicije opterećenja kao kod određivanja Newtonovskih sila, nego u rubnim čvorovima postoji član koji predstavlja umnožak dva opterećenja.

Iz izraza (8) je vidljivo kako konfiguracijske sile u unutarnjim čvorovima nestaju ukoliko su duljine konačnih elemenata jednake, odnosno ako je štap podijeljen na jednake konačne elemente. Iz izraza (7) i (9) se vidi da konfiguracijske sile na rubovima ostaju prisutne neovisno o položaju unutarnjih čvorova u sustavu. Može se reći da konfiguracijske sile na rubu problema predstavljaju djelovanje okoline na štap, jer je štap svojevrsna nehomogenost u svome okruženju. Generalno, ako se ponište konfiguracijske sile na unutarnjim čvorovima, dobiva se položaj čvorova koji daje minimalnu ukupnu potencijalnu energiju za zadani problem. Isto tako, sumiranjem izraza (7) – (9) dolazi se do ravnoteže konfiguracijskih sila, odnosno, vrijedi

$$\sum_{i=1}^n G_i = 0. \quad (10)$$

2.2 Štap s linearnom promjenom poprečnog presjeka opterećen koncentriranom silom na kraju

Promatramo štap konačne duljine L , kod kojeg se površina poprečnog presjeka linijski mijenja s početne površine A_0 na krajnju površinu A_n . Štap ima modul elastičnosti E , pridržan je u prvom čvoru x_1 i opterećen je koncentriranom silom P u krajnjem čvoru x_n . Štap je diskretiziran pomoću n točaka i $n - 1$ linijskih konačnih elemenata konstantnog poprečnog presjeka. Površina poprečnog presjeka konačnog elementa je definirana izrazom

$$A_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \frac{(A_n - A_0)}{L} + A_0, k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (11)$$

odnosno, površina poprečnog presjeka se usrednjuje između vrijednosti koju bi poprimila u čvorovima elementa. Takvom aproksimacijom se dobije skokovita promjena poprečnog presjeka između čvorova. Ukupna potencijalna energija tako definiranog problema iznosi

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{EA_k}{h_k} (u_{k+1} - u_k)^2 - Pu_n \quad (12)$$

Traži se minimum ukupne potencijalne energije po pomacima čvorova. Parcijalnim deriviranjem po svim pomacima, uvažavanjem rubnih uvjeta te izjednačavanjem dobivenih izraza s nulom dolazi se do pomaka čvorova

$$u_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{h_k}{EA_k} P, i = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

Uvrštavanjem pomaka čvorova (13) u izraz za ukupnu potencijalnu energiju (12) dolazi se do ukupne potencijalne energije sustava izražene preko koordinata čvorova

$$\Pi = -\frac{P^2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{EA_k} \quad (14)$$

Konfiguracijske sile se dobivaju parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po koordinatama svakog čvora, uz uvažavanje zavisnosti površine poprečnog presjeka elementa o položaju čvorova. Tako imamo,

$$G_1 = \frac{P^2(A_n - A_0)}{4EL^2} \left[\frac{2A_1L^2}{A_n - A_0} + h_1(x_2 + x_n) \right] + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{A_i^2} \quad (15)$$

$$G_i = -\frac{P^2}{4EL} \left[\frac{2A_{i-1}L - h_{i-1}(A_n - A_0)}{A_{i-1}^2} - \frac{2A_iL + h_i(A_n - A_0)}{A_i^2} \right], i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (16)$$

$$G_n = \frac{P^2(A_n - A_0)}{4EL^2} \left[\frac{2A_{n-1}L^2}{A_n - A_0} + h_{n-1}(x_1 + x_n - 1) \right] + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{A_i^2} \quad (17)$$

Iz gornjih izraza sumiranjem po svim čvorovima dolazi se do izraza za sumu konfiguracijskih sila oblika

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{P^2(A_n - A_0)}{2EL} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{A_k^2} \quad (18)$$

Iz izraza (18) je jasno vidljivo da suma konfiguracijskih sila nije jednaka nuli za konačni broj elemenata. Analizom izraza vidljivo je da se suma konfiguracijskih sila svodi na nulu u slučaju da je $A_n = A_0$ (odnosno, ako imamo ravan štap bez promjene površine poprečnog presjeka) i u slučaju kada broj konačnih elemenata teži beskonačnosti (slučaj $h_k = 0$, tada se dobije rješenje koje je ekvivalentno analitičkom rješenju problema). Mogući razlog što suma konfiguracijskih sila nije jednaka nuli leži u tome što je štap koji u stvarnosti ima linearnu promjenu površine poprečnog presjeka simuliran elementima koji imaju skokovitu promjenu površine poprečnog presjeka te se na taj način u svakom čvoru uvijek nalazi svojevrsna nekompatibilnost između površina susjednih elemenata.

Prisutnost konfiguracijskih sila u srednjim čvorovima ukazuje kako je potrebno pomicati početnu konfiguraciju čvorova da bi se ukupna potencijalna energija rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata približila analitičkoj potencijalnoj energiji. Time se zapravo dobiva točnije vrijednosti pomaka u čvorovima, odnosno, dobiva se

bolja aproksimacija stvarnog problema. Pomicanje čvorova je provedeno pomoću izraza [3]

$$x_i \rightarrow x_i - c * G_i \quad (19)$$

Gdje je c konstanta koja mora imati malenu vrijednost. Nakon određivanja novog položaja čvorova ponavlja se procedura i određuju se nove konfiguracijske sile. Cilj je smanjiti vrijednosti konfiguracijskih sila u unutarnjim čvorovima sve dok njihova norma ne postane manja od zadane tolerancije. Postizanjem zadovoljavajućeg početnog položaja čvorova dobiva se bolja aproksimacija ukupne potencijalne energije sustava metodom konačnih elemenata u usporedbi s ukupnom potencijalnom energijom dobivenom analitičkim putem. Također, vrijednost pomaka u opterećenom čvoru se približava analitičkom rješenju za isti problem.

2.3 Ravni štap s promjenom krutosti (inkluzija) opterećen vlastitom težinom

Promatra se štap konačne duljine L , površine poprečnog presjeka A , koji po cijeloj svojoj dužini ima modul elastičnosti E_1 izuzev kratkog segmenta u srednjem dijelu štapa koji ima modul elastičnosti E_2 . Odsječak štapa s modulom elastičnosti E_2 je duljine L_2 dok su odsječci s modulom elastičnosti E_1 duljine L_1 i L_3 , pritom vrijedi $L = L_1 + L_2 + L_3$. Štap je pridržan na početku i opterećen je vlastitom težinom. Štap je diskretiziran pomoću n čvorova i $n - 1$ konačnih elemenata. Segment L_1 je podjeljen na e_1 elemenata, segment L_2 na e_2 elemenata a segment L_3 na e_3 elemenata.

Potrebno je odrediti ukupnu potencijalnu energiju diskretiziranog sustava te dobiti pomake čvorova parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po pomacima čvorova rješavanjem dobivenog sustava linearnih jednadžbi. Potom se ukupna potencijalna energija diskretiziranog sustava predstavlja pomoću položaja čvorova i deriviranjem po položajima dolazi se do izraza za konfiguracijske sile. Izrazi za konfiguracijske sile u čvorovima ovakvog sustava su

$$G_1 = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [4L^2 - h_1^2], \quad (20)$$

$$G_{i_1} = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [h_{i_1-1}^2 - h_{i_1}^2], i_1 = 2, \dots, e_1 \quad (21)$$

$$G_{e_1+1} = -\frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [4(L - L_1)^2 - h_{e_1}^2] + \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_2} [4(L - L_1)^2 - h_{e_1+1}^2], \quad (22)$$

$$G_{i_2} = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_2} [h_{i_2-1}^2 - h_{i_2}^2], i_2 = e_1 + 2, \dots, e_1 + e_2 \quad (23)$$

$$G_{e_2+1} = -\frac{\rho^2 g^2 A}{8E_2} [4L_3^2 - h_{e_2}^2] + \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [4L_3^2 - h_{e_2+1}^2], \quad (24)$$

$$G_{i_3} = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [h_{i_3-1}^2 - h_{i_3}^2], i_3 = e_1 + e_2 + 2, \dots, n - 1 \quad (25)$$

$$G_n = \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_1} [4(L - L_1)^2 - 4L^2 - 4L_3^2 + h_{n-1}^2] + \frac{\rho^2 g^2 A}{8E_2} [4L_3^2 - 4(L - L_1)^2] \quad (26)$$

Iz gornjih izraza se vidi idealan raspored čvorova koji bi trebali biti raspoređeni na jednakim razmacima po segmentima štapa. Također je vidljivo da je suma konfiguracijskih sila u ovakvom problemu jednaka nuli.

Unutar pojedinih segmenata konfiguracijske sile se ponašaju kao i kod primjera s ravnim štapom, tj. čvorovi teže biti na jednakim razmacima. Kod čvorova gdje imamo

promjenu krutosti uvijek je prisutna konfiguracijska sila. Ukoliko je $E_1 > E_2$ tada konfiguracijske sile u tim čvorovima djeluju prema sredini štapa, dok ako je $E_2 > E_1$ konfiguracijske sile djeluju prema krajevima štapa. Iz toga se može zaključiti da su na mjestima promjene krutosti konfiguracijske sile usmjerene prema zoni manje krutosti.

3 ZAKLJUČAK

U radu je opisan postupak određivanja konfiguracijskih sila kod primjene metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti te je dobivena raspodjela konfiguracijskih sila za tri različita primjera. Kod homogenog štapa jednolikog presjeka određen je optimalan raspored čvorova te su dobivene vrijednosti konfiguracijskih sila u srednjim i rubnim čvorovima. Optimalnim rasporedom čvorova konfiguracijske sile u unutrašnjosti nestaju dok su u rubnim čvorovima uvijek prisutne konfiguracijske sile. Rubne konfiguracijske sile se mogu tumačiti kao utjecaj okoline na promatrano tijelo. Kod problema štapa s linearnom promjenom površine poprečnog presjeka optimalni raspored čvorova se dobiva iterativno, uz primjenu opisanog numeričkog postupka. Kod takvog problema ravnoteža konfiguracijskih sila nije zadovoljena jer su prisutne skokovite promjene površine poprečnog presjeka na kontaktima dva elementa. Treći analizirani problem je slučaj štapa s inkluzijom kod kojega konfiguracijske sile nestaju unutar segmenata štapa s istim modulom elastičnosti ali na kontaktu dva materijala su uvijek prisutne konfiguracijske sile. Njihova vrijednost ovisi o odnosima modula elastičnosti, sile su usmjerene od zone veće krutosti prema zoni manje krutosti. Slično kao što se prisutnost konfiguracijskih sila kod nehomogenih materijala može tumačiti kao težnja materijala da se homogeniziraju, u slučaju mreže konačnih elemenata, prisutnost konfiguracijskih sila se može interpretirati kao težnja čvorova da se postave u optimalan položaj. U budućem radu se planira analizirati probleme konfiguracijskih sila u ravnini te konfiguracijske sile u kontekstu pukotina i delaminacije materijala.

Literatura:

- [1] Braun, M., "Configurational forces in discrete elastic systems", *Archive of Applied Mechanics*, No.77., 2007, str. 85-93.
- [2] Braun, M., "Configurational forces induced by finite-element discretization", *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics, Mathematics*, Vol. 2, No.46., 1997, str. 24-31.
- [3] Eurviriyankul, S. & Askes, H., "Tendon layout optimisation through configurational forces equilibration in plane stress analysis of prestressed concrete structures", *Computers and Structures*, No.89., 2011, str. 1673-1680.
- [4] Maugin, G.A., "Material Inhomogeneities in Elasticity", Chapman & Hall London UK, 1993.
- [5] Mueller, R. & Maugin, G.A., "On material forces and finite element discretizations", *Computational Mechanics*, No.29, 2002, str. 52-60.

Autori:

Nikola Lustig, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, e-mail: nikola.lustig@uniri.hr

Nenad Bićanić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, e-mail: nenad.bicanic@glasgow.ac.uk

VIŠERAZINSKO MODELIRANJE DVOOSNOG DEFORMIRANJA GRAFENA

Marenić, E., Sorić, J. i Ibrahimbegovic, A.

Sažetak: U radu je predstavljeno višerazinsko numeričko modeliranje mehaničkog ponašanja grafena. Za atomističku simulaciju korištena je molekularna mehanika (MM) dok je za modeliranje interakcije između ugljikovih atoma korišten prošireni Morseov međuatomski potencijal. Primjenom MM i virtualnih eksperimenata određeni su parametri zamjenskog kontinuumskeg modela koji se zatim koristi u višerazinskom modelu u kojem je spojen atomistički i zamjenski kontinuumski model. Ovaj pristup omogućuje primjenu atomističkog modela samo na mjestima od posebnog interesa, kao na primjer oko vrška hipotetske pukotine, dok je ostatak proračunskog područja diskretiziran odgovarajućim konačnim elementima.

Gljučne riječi: molekularna mehanika, višerazinsko modeliranje, metoda premošćivanja.

1 UVOD

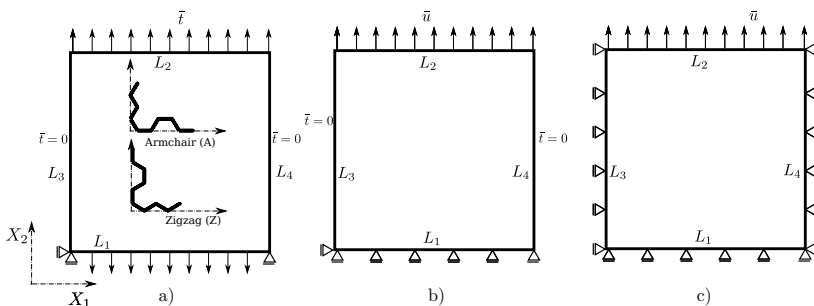
Težište ovog rada je na nanomehanici, točnije, na razvoju metoda za numeričko modeliranje elasto-statičkog ponašanja grafena - konceptualno nove klase materijala debljine samo jednog atoma [6, 8]. Metode klasične mehanike kontinuuma odnose se na makroskopski pristup proučavanja gibanja deformabilnih tijela. Te metode najčešće se koriste u numeričkoj analizi procesa deformiranja konvencionalnih inženjerskih konstrukcija. Pokazat ćemo u ovom radu da se mehanika kontinuuma u kombinaciji s metodom konačnih elemenata (KE) može upotrijebiti za modeliranje mehaničkog ponašanja grafena bez oštećenja u kristalnoj rešetci [1, 7]. Za modeliranje oštećenja u kristalnoj rešetci gdje je potrebno pratiti fizikalne pojave na razini pojedinog atoma, mehanika kontinuuma nije dostatna. Stoga su se, prateći razvoj računala, postupno razvile atomističke metode. U ovom radu za atomističku simulaciju korištena je molekularna mehanika (MM) pri čemu se grafen modelira kao sustava čestica (ovdje ugljikovih atoma) čija je interakcija određena Morseovim međuatomskim potencijalom [3].

Atomistički pristup računalno je vrlo zahtjevan, što čini njegovu primjenu ograničenom. Moguće je, međutim, provesti atomističku simulaciju samo na relativno malom području u odnosu na veličinu promatrane strukture. Pritom se MM koristi samo u analizi lokalizirane zone proračunskog područja u kojem postoji potreba za nano rezolucijom i gdje je deformiranje nehomogeno, dok se ostatak područja modelira kao kontinuum. U radu je pokazan spoj dvaju različitih modela (MM i mehanika kontinuuma (odnosno metoda KE)) primjenom metode premošćivanja [2]. Ova metoda omogućuje provođenje istovremene simulacije oba modela, te je tako moguće reproducirati rezultate atomističke simulacije uz smanjene računalne zahtjeve.

2 ZAMJENSKI KONTINUUMSKI MODEL

Pod pretpostavkom malih deformacija, zamjenski kontinuumski model (ZKM) temelji se na izotropnom, Hookeovom modelu koji je određen s modulom elastičnosti (E) i Poissonovim faktorom (ν). U dostupnoj literaturi (vidi npr. [5, 9]) parametri ZKM za slučaj malih deformacija znatno odstupaju, npr. modul elastičnosti seže od 700 do nekoliko tisuća GPa (vidi pregled u [6] poglavlje 4.2.1). Uzrok ovog odstupanja su različite formulacije te primjena različitih numeričkih i eksperimentalnih metoda, kako je sažeto u [7] i pripadajućim referencama.

U nastavku je pokazan postupak određivanja materijalnih parametara za saća-stu rešetku grafena primjenom MM i jednoosnih virtualnih testova. Osim toga pokazan je utjecaj rubnih uvjeta na krutost ZKM nastalog homogenizacijom prema [4], gdje rubni uvjeti pomaka zadani na rubu uzorka grafena uvjetuju gornju a rubni uvjeti sila donju granicu krutosti, vidi sl. 1. Rezultati niza virtualnih testova, prema sl. 1, povećavajući



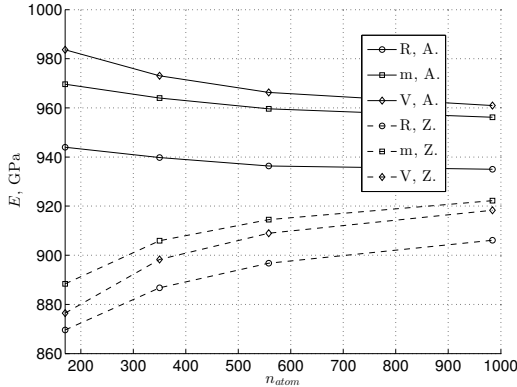
Sl. 1: Shema približno kvadratne ($L_1 \approx L_3$) rešetke grafena s rubnim uvjetima: a) sila $\bar{\tau}$, b) sila i pomaka i c) pomaka \bar{u} . Testirane su dvije konfiguracije *Armchair* (A) ili *Zigzag* (Z) rub paralelan s X_1 a).

pritom veličinu uzorka, prikazani su na sl. 2. Vrijednosti modula elastičnosti osim što ovise o usmjerenosti šesterokutne rešetke (*Armchair* i *Zigzag* konfiguracije) i veličini uzorka određenoj sa $L_1 - L_4$, ovise i o rubnim uvjetima. Za *Armchair* konfiguraciju vrijedi odnos $E_R \leq E_m \leq E_V$ tvoreći tako pojas krutosti između donje (R) i gornje (V) granice ($(E_{max} - E_{min})|_A \approx 40$ GPa), dok za *Zigzag* konfiguraciju ne vrijedi uslijed šesterokutne strukture i odabranog potencijala.

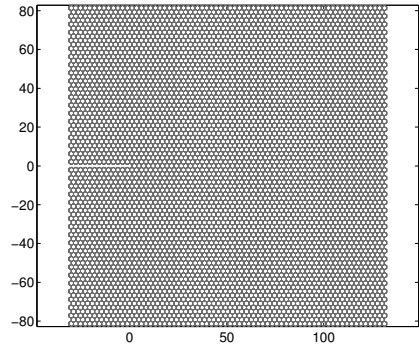
U nastavku ćemo koristiti parametre koji su dobiveni virtualnim testovima na uzorku od 10960 atoma (kao na sl. 3 ali bez oštećenja). Iznosi parametara su $E_A = 955,63$ GPa, $E_Z = 912,17$ GPa $\nu_{AZ} = 0,3404$, $\nu_{ZA} = 0,3606$, a u kontinuumskom modelu za proračun grafena s oštećenjem, prikazanom u sljedećem poglavlju, su uzete srednje vrijednosti $E = 933,90$ GPa i $\nu = 0,3505$.

3 METODA PREMOŠĆIVANJA ZA PRIJELAZ S ATOMISTIČKOG NA KONTINUUMSKI MODEL

Atomistička simulacija može se nadomjestiti primjenom ZKM, u svrhu računalno jeftinije simulacije, no simulacija primjenom ZKM ne može opisati grafen s oštećenjem u

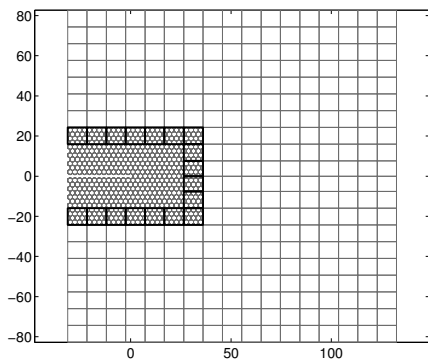


Sl. 2: Iznos modula elastičnosti ovisi o veličini i usmjerenosti rešetke, te o rubnim uvjetima.

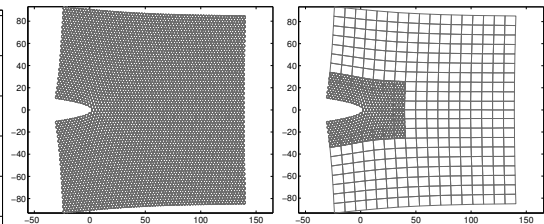


Sl. 3: Potpuno atomistički model grafena s hipotetskim oštećenjem nalik na pukotinu s vrškom u ishodištu.

kristalnoj rešetki (niti slom međuatomskih veza, vidi npr. [3, 10]). Stoga je na primjeru grafena s hipotetskim inicijalnim oštećenjem sa sl. 3, u nastavku opisan princip spajanja atomističkog i kontinuumskog modela prema [2]. Na sl. 4 prikazan je višerazinski model istog problema pri čemu je mreža četverokutnih KE prikazana tankim linijama, dok atomistički model ocrta sačastu strukturu. Pravokutno proračunsko područje Ω podjeljeno je na kontinuumsko Ω^c i atomističko Ω^a područje, te njihov preklap $\Omega^b = \Omega^c \cap \Omega^a$. Po rubu grafena zadani su pomaci koji odgovaraju polju pomaka blizu vrška pukotine u modu I (K_I) otvaranja pukotine. Ukupna potencijalna energija spojenog modela je



Sl. 4: Shema spojenog modela.



Sl. 5: Deformirani oblici grafena s inicijalnim oštećenjem dobiveni potpuno atomističkim modelom (lijevo) i višerazinskim modelom gdje je veličina Ω^a 67.4×48.7 Å (desno). Faktor povećanja iznosi 20.

$$E_{tot,w} = E_{tot,w}^a(\mathbf{d}) + E_{tot,w}^c(\mathbf{u})$$

gdje su \mathbf{d} , \mathbf{u} vektori pomaka u Ω^a odnosno u Ω^c , a

pripadne energije su izražene kao

$$E_{tot,w}^a = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} w_{ij}^a V_p + \sum_{j \neq k \neq i} w_i^a V_\theta \right) - \sum_{i \in \Omega^a} w_i^a \bar{\mathbf{f}}_i \cdot \mathbf{d}_i, \quad (1)$$

$$E_{tot,w}^c = \int_{\Omega^c} w^c(\mathbf{X}) W d\Omega^c - \int_{\Omega^c} w^c(\mathbf{X}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega^c - \int_{\Gamma_\sigma^c} w^c(\mathbf{X}) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^c. \quad (2)$$

U izrazu (1) V_p i V_θ se odnose na energije atomističkog sustava definirane Morseovim potencijalom. Indeksom w označano je skaliranje energije čime se sprječava njeno dupliranje u Ω^b pri čemu su funkcije skaliranja definirane kako slijedi: $w^c(\mathbf{X}) = 1, \forall \mathbf{X} \in \Omega^c \setminus \Omega^b$; $w^a(\mathbf{X}) = 1, \forall \mathbf{X} \in \Omega^a \setminus \Omega^b$; $w^c(\mathbf{X}) + w^a(\mathbf{X}) = 1, \forall \mathbf{X} \in \Omega^b$.

Općenito je spoj dvaju modela u slaboj formi dan izrazom

$$C := \int_{\Omega^b} \alpha_1 \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{d}^b) + \alpha_2 \nabla \boldsymbol{\lambda} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{d}^b) d\Omega, \quad (3)$$

gdje težinski faktori α_1 i α_2 određuju udio spoja pomaka ili deformacije, $\mathbf{d}^b(\mathbf{X})$ je interpolacija polja pomaka atoma u Ω^b , a $\boldsymbol{\lambda}$ vektor Lagrangeovih multiplikatora. U radu su uspoređena dva slučaja L^2 za $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ i H^1 za $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$. Dodavanjem kinematskih ograničenja (3) ukupnoj energiji dobiva se funkcional

$$W_L := E_{tot,w} + C \rightarrow \min., \quad (4)$$

čijom minimizacijom možemo odrediti nepoznanice \mathbf{d} , \mathbf{u} i $\boldsymbol{\lambda}$.

Točnost predložene metode pokazana je usporedbom s referentnim modelom (sl. 3) pri čemu je lokalna greška pomaka atoma

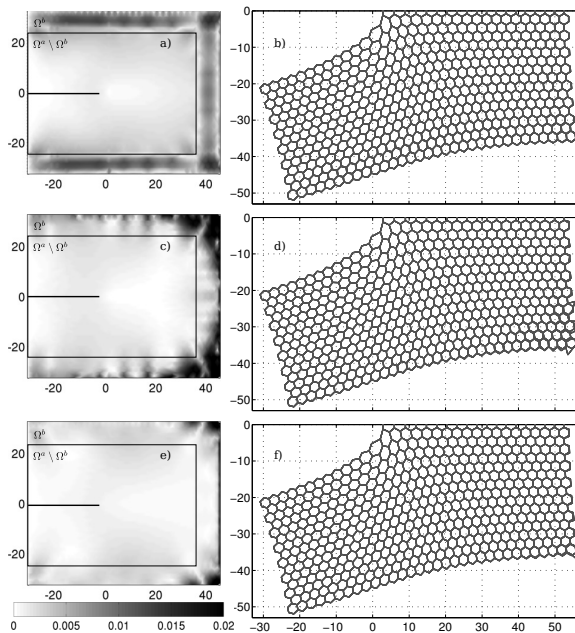
$$e_{u,i} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^{\text{ref}})^T (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^{\text{ref}})_{\Omega^a}}}{\|\mathbf{d}^{\text{ref}}\|_{\Omega}}, \quad \forall i \in \Omega^a, \quad (5)$$

gdje je norma definirana kao $\|\mathbf{d}\| = \frac{1}{n_a} \sum_i^{n_a} \sqrt{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i}$. U gornjim izrazima \mathbf{d}_i i $\mathbf{d}_i^{\text{ref}}$ su pomaci atoma i , $\forall i \in \Omega^a$ u spojenom, odnosno potpuno atomističkom modelu.

Na sl. 6 a), c) i e) dana je raspodjela greške definirane u (5) po konturi atomističkog modela grafena (Ω^a) za tri opcije spoja kako slijedi H^1 s konstantnom, H^1 s linearnom i L^2 s linearnom funkcijom skaliranja $w^{a,c}$. Sa sl. 6 a) može se zaključiti da je uslijed spoja H^1 , s konstantnom funkcijom skaliranja, greška primjetna u cijeloj zoni preklopa (Ω^b), ali malog iznosa. Stoga je gotovo neprimjetna razlika u deformiranim oblicima (sl. 6 b)). Kod modela s linearnom funkcijom skaliranja tipa H^1 i L^2 , greška je veća i to u kutevima Ω^b što je vidljivo na pripadnim deformiranim oblicima (sl. 6 d) i f)).

4 ZAKLJUČAK

U radu je pokazana metoda za višerazinsko modeliranje grafena spajanjem kontinuumskog i atomističkog modela. Kinematika spoja dana je općenito, u slaboj formi. Ova formulacija uz odabir funkcija skaliranja nudi brojne opcije kojima se može prilagoditi spoj za specifične probleme. Na numeričkom primjeru grafena s incijalnim oštećenjem provedena je verifikacija metode spajanja, pri čemu atomistički model ima 21920, dok spojeni model ima 3532 stupnja slobode gibanja. Pokazana je visoka točnost metode u odnosu na atomistički (referentni) model uz uštedu od 18388 stupnjeva slobode gibanja.



Sl. 6: Raspodjela lokalne greške pomaka ($e_{u,i}$) po konturi Ω^a pri čemu je maksimalna greška koju prikazujemo 2% (lijevo). Odgovarajući deformirani oblici (desno), pri čemu su rezultati referentnog i spojenog modela preklapljeni. Prikazana je samo polovica uslijed simetrije, s faktorom povećanja 40.

Literatura

- [1] Arroyo, M., Belytschko, T., “Finite element methods for the non-linear mechanics of crystalline sheets and nanotubes”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 59, No. 3, 2004, str. 419–456.
- [2] Belytschko, T., Xiao, S.P., “Coupling Methods for Continuum Model with Molecular Model”, International Journal for Multiscale Computational Engineering, Vol. 1, 2003, str. 12.
- [3] Belytschko, T., Xiao, S.P., Schatz, G.C., Ruoff, R.S., “Atomistic simulations of nanotube fracture”, Phys. Rev. B, Vol. 65, No. 23, 2002, str. 235430.
- [4] Huet, C., “Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 38, No. 6, 1990, str. 813 – 841.
- [5] Lu, Q., Huang, R., “Nonlinear mechanics of Single-atomic-layer graphene sheets”, International Journal of Applied Mechanics, Vol. 1, 2009, str. 443–467.
- [6] Marenčić, E., “Atomistic-to-continuum modeling in solid mechanics”, Ph.D. thesis, University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, 2013.
- [7] Marenčić, E., Ibrahimbegovic, A., Sorić, J., Guidault, P.A., “Homogenized elastic

properties of graphene for small deformations”, Materials: Special Issue ”Computational Modeling and Simulation in Materials Study”, Vol. 6(9), 2013, str. 3764–3782.

- [8] Novoselov, K.S., Jiang, D., Schedin, F., Booth, T.J., Khotkevich, V.V., Morozov, S.V., Geim, A.K., “Two-dimensional atomic crystals”, PNAS, Vol. 102-30, 2005, str. 10451–10453.
- [9] Reddy, C.D., Rajendran, S., Liew, K.M., “Equilibrium configuration and continuum elastic properties of finite sized graphene”, Nanotechnology, Vol. 17, No. 3, 2006, str. 864.
- [10] Xiao, J., Staniszewski, J., Jr., J.G., “Fracture and progressive failure of defective graphene sheets and carbon nanotubes”, Composite Structures, Vol. 88, No. 4, 2009, str. 602 – 609.

Autori

Eduard Marenčić, tel. +385 1 6168115, e-mail: eduard.marenic@fsb.hr,

Jurica Sorić, tel. +385 1 6168103, e-mail: jurica.soric@fsb.hr,

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, www.fsb.hr/lnm/

Adnan Ibrahimbegovic, tel. +33(0)147402234 e-mail: adnan.ibrahimbegovic@ens-cachan.fr, Ecole Normale Supérieure, L.M.T. Cachan, 61 Avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN, France, w3.lmt.ens-cachan.fr/ibrahimbegovic

O PRORAČUNU PROGIBA KONZOLE PROMJENJIVOG OKRUGLOG POPREČNOG PRESJEKA

Marović, P. i Galić, M.

Sažetak: Jedna od češće prisutnih inženjerskih konstrukcija je konzolni nosač koji je najčešće opterećen koncentriranom silom na kraju i za koga treba odrediti progib na mjestu djelovanja sile. Takve konstrukcije su primjerice stup električne mreže ili neka slična konstrukcija. Ako je poprečni presjek konstantan duž cijele dužine konstrukcije određivanje progiba je vrlo jednostavno uporabom neke od klasičnih metoda (analitički postupak, grafoanalitički postupak, grafički postupak ili numerički proračun metodom konačnih elemenata). Proračun se komplicira ako je poprečni presjek promjenjiv duž raspona. U ovom radu će se razmatrati konzolni nosač okruglog i šupljeg poprečnog presjeka koji je linearno promjenjiv duž raspona. Osnovna situacija je kada je konzolni nosač punog okruglog odnosno šupljeg poprečnog presjeka konstantnog duž cijelog nosača. Problemi nastaju ako je poprečni presjek promjenjiv duž raspona pri čemu možemo razlikovati slijedeće situacije: (a) puni poprečni presjek linearno promjenjiv; (b) šuplji poprečni presjek s konstantnim radijusom unutrašnje šupljine i linearno promjenjivim vanjskim radijusom (promjenjiva debljina stijenke); (c) šuplji poprečni presjek s linearno jednako promjenjivim unutarnjim i vanjskim radijusima (konstantna debljina stijenke); i (d) šuplji poprečni presjek s linearno različito promjenjivim unutarnjim i vanjskim radijusima (promjenjiva debljina stijenke).

Ključne riječi: progib, konzola, promjenjivi poprečni presjek, numerička analiza

1 UVOD

U današnje vrijeme, jedna od češće prisutnih inženjerskih konstrukcija je konzolni nosač, npr. stup niskonaponske ili srednjenaponske mreže, stup vjetro-turbine, i slično. Zanimarimo li horizontalno djelovanje vjetra, kao najznačajnije opterećenje ostaje horizontalna sila pri vrhu stupa, npr. natezanje od električnih kabela, horizontalni pritisak vjetra na elektromotor i lopatice, itd. Kod ovakvih konstrukcija, osim određivanja stanja naprezanja i deformacija u karakterističnim presjecima, vrlo važno je odrediti horizontalni pomak vrha stupa - konzole. Ako je poprečni presjek stupa konstantan cijelom dužinom stupa, određivanje teorijske veličine progiba je vrlo jednostavno uporabom neke od klasičnih metoda (analitički, grafoanalitički ili grafički postupak) [1].

Problemi nastaju odnosno proračun se komplicira ako je poprečni presjek promjenjiv duž raspona. Obzirom da se u ovome radu govori o stupu okruglog šupljeg poprečnog presjeka, općenito se mogu javiti slijedeće situacije: (a) puni poprečni presjek linearno promjenjiv; (b) šuplji poprečni presjek s konstantnim radijusom unutrašnje šupljine i linearno promjenjivim vanjskim radijusom (promjenjiva debljina stijenke); (c) šuplji poprečni presjek s linearno jednako promjenjivim unutarnjim i vanjskim radijusima (konstantna debljina stijenke); i (d) šuplji poprečni presjek s

linearno različito promjenjivim unutarnjim i vanjskim radijusima (promjenjiva debljina stijenke).

U situacijama (a) i (b) imamo samo jednu varijablu te se do zatvorenog analitičkog rješenja može doći standardnim analitičkim postupkom analogno onome prikazanome u [1] gdje je pokazan proračun progiba konzole, uslijed djelovanja koncentrirane sile na slobodnome kraju, pravokutnog poprečnog presjeka s promjenjivom širinom presjeka. Slijedeći uobičajeni postupak, proračun je nešto duži, a dobivene algebarske jednadžbe malo složenije i duže.

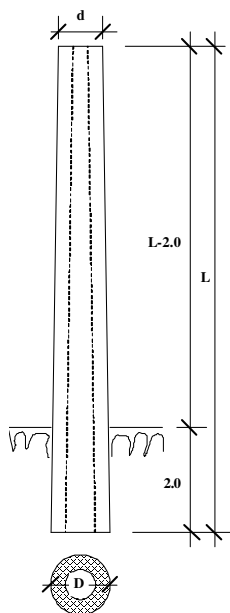
U situacijama (c) i (d) imamo dvije varijable. Uobičajenim analitičkim postupkom dolazi se do potrebe rješavanja dvostrukog integrala pri čemu su i podintegralne funkcije integralne jednadžbe što postupak čini nerješivim [2].

Za napomenuti je da nam, bez obzira na statički sustav kao i geometrijske i materijalne karakteristike, na raspolaganju stoje razne numeričke metode kao i one temeljene na metodi konačnih elemenata. No, kod njihove uporabe ostaje otvoreno pitanje poznavanja teorijskih pretpostavki i numeričkih postupaka koji su rabljeni u dotičnom računalnom paketu.

U nastavku rada pokazati ćemo neke moguće postupke prilikom određivanja progiba armirano-betonskog (AB) stupa šupljeg poprečnog presjeka s linearno različito promjenjivim vanjskim i unutarnjim radijusima (promjenjiva debljina stijenke stupa) – situacija (d), za što smo imali statički proračun [3] i rezultate provedenih eksperimentalnih ispitivanja [4].

2 PODACI O ANALIZIRANOM STUPU

Na Slici 1 prikazan je analizirani AB stup s općim dimenzijama.



Sl. 1. AB stup

Predmetni stup je jedan od tipskim armirano-betonskih (AB) predgotovljenih stupova niskonaponske i srednje-naponske mreže raznih visina (9 m, 10 m i 12 m) i različitih dimenzija poprečnih presjeka [2-4] koji u svemu odgovaraju granskoj normi HEP N 020.08 klas.br. 4.13/93 i tada važećim tehničkim propisima u području građevinarstva.

Stup je oblika krnjeg stošca s nagibom izvodnice od 0,75% odnosno s prirastom polumjera od 1,5 cm na 1 m¹.

Kako su stupovi projektirani 1999. godine [3], a izrađivani tijekom 1999. i 2000. godine kada su i ispitivani [4], to su oznake uporabljenog betona i armature navedene po tadašnjim propisima.

Tako je stup izrađen iz betona MB 50, klase II, bez posebnih dodataka. Zbog tankih presjeka stijenki ugrađene su samo frakcije agregata 0-4 mm, 4-8 mm i 8-16 mm. Količina cementa je bila 400 kg/m³. Ugrađena je rebrasta armatura RA 400/500.

Način provedbe ispitivanja može se osim u radu [4] vidjeti i u radu [5] gdje su opisana slična ispitivanja na sličnim stupovima drugog proizvođača u kasnijem razdoblju.

3 NUMERIČKI POSTUPCI ODREĐIVANJA PROGIBA KONZOLE

U ovom odjeljku će se pokazati dva moguća postupka koja smo rabili za određivanje progiba armirano-betonskog stupa šupljeg poprečnog presjeka s promjenjivom debljinom stijenke stupa: (1) numerička aproksimacija uobičajenog analitičkog postupka pri čemu smo rješavanje dvostrukog integrala kao i rješavanje podintegralne funkcije integralne jednadžbe proveli algebarski izračunavajući sve geometrijske karakteristike svakih 5 centimetara [2]; i (2) numeričkim postupkom pomoću metode konačnih elemenata, računalnim programom SCIA pri čemu su izvršene raznovrsne aproksimacije geometrijskih i materijalnih karakteristika [6, 7].

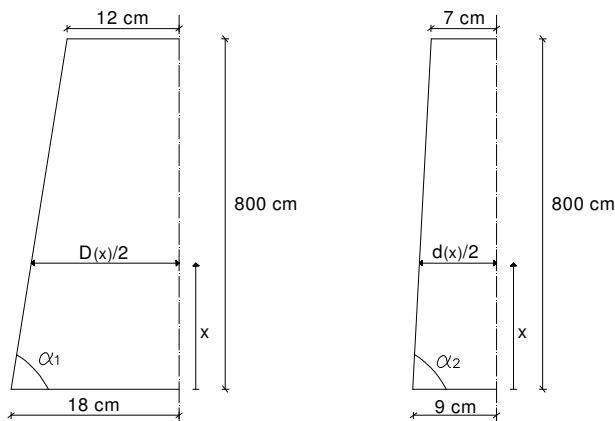
3.1 Numerička aproksimacija uobičajenog analitičkog postupka

U uobičajenom analitičkom postupku, uzimajući u obzir sve pretpostavke, posebice pretpostavku o malim progibima i malim deformacijama, dolazimo do poznate diferencijalne jednadžbe elastične linije [1]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}, \quad (1)$$

koju treba riješiti uvažavajući odgovarajuće rubne uvjete, gdje w označava progib, M_y moment savijanja oko osi y , E modul elastičnosti, a I_y moment tromosti oko osi y .

Kako dimenzije poprečnog presjeka nisu ni konstantne niti linearno promjenjive to nastaju poteškoće. Naime, u ovom slučaju je promjena vanjskog promjera (D) i unutarnjeg promjera (d) linearna (Slika 2, [2]) a time je i debljine stijenke linearno promjenjiva.



Sl. 2. Funkcije promjene vanjskog (D) i unutarnjeg (d) promjera [2]

Funkcije promjene vanjskog (D) i unutarnjeg (d) promjera imaju oblik [2]:

$$D(x) = 2 \cdot \left(18 - \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) = 36 - 0,015x, \text{ i } d(x) = 2 \cdot \left(9 - \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) = 18 - 0,005x, \quad (2)$$

dok funkcija promjene momenta tromosti ima oblik [2]:

$$I_y(x) = \frac{\pi}{64} \cdot [D^4(x) - d^4(x)] = \frac{\pi}{64} \cdot [(36 - 0,015x)^4 - (18 - 0,005x)^4]. \quad (3)$$

Rješavajući dalje na uobičajeni način, dolazimo do jednadžbe elastične odnosno progibne linije nosača u obliku [2]:

$$w(x) = \iint \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} \cdot dx \cdot dx + Cx + D, \quad (4)$$

uz slijedeće konstante integracije [2]:

$$C = -\int \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} \cdot dx \Big|_{x=0}, \quad \text{i} \quad D = -\iint \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} \cdot dx \cdot dx \Big|_{x=0}. \quad (5)$$

U prethodnim jednadžbama javlja se problem rješavanje jednostrukih i dvostrukih integrala jer je podintegralni izraz složena funkcija oblika [2]:

$$\frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} = \frac{F}{E} \cdot \frac{800 - x}{\frac{\pi}{64} \cdot [(36 - 0,015x)^4 - (18 - 0,005x)^4]}, \quad (6)$$

što u konačnici vodi do nemogućnosti dobivanja odgovarajućeg analitičkog rješenja. Ni osrednjavanje unutarnjeg promjera nije dovelo do rješenja gornjih integrala.

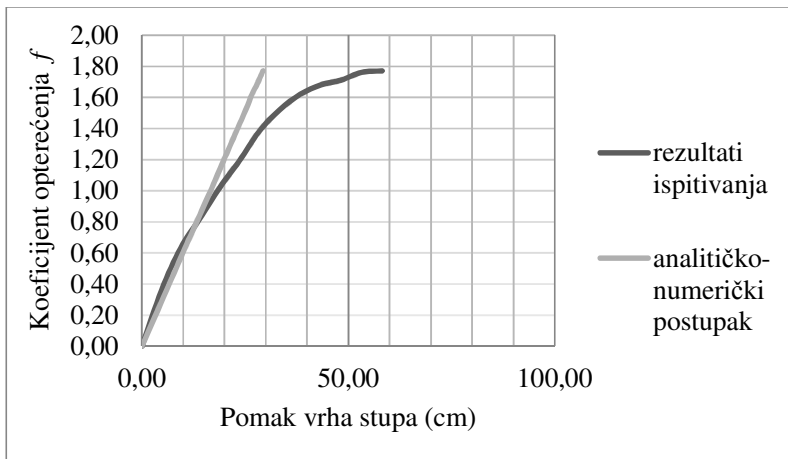
Izlaz iz ovog problema je nađen u egzaktnom rješenju gornjih jednadžbi u intervalima od 5 cm duž cijele dužine stupa preko konkretnih vrijednosti u svakom pojedinom presjeku. Tako su izračunate vrijednosti funkcija:

$$\frac{L-x}{I_y(x)}, \quad \int \frac{L-x}{I_y(x)} \cdot dx \quad \text{i} \quad \iint \frac{L-x}{I_y(x)} \cdot dx \cdot dx \quad (7)$$

pomoću trapezne formule svakih 5 cm u intervalu od vrha do dna stupa [2]. Na isti način su izračunate i vrijednosti integracijskih konstanti C i D , te je na kraju svega progib izračunat po izrazu [2]:

$$w(x) = \frac{F}{E} \iint \frac{L-x}{I_y(x)} \cdot dx \cdot dx + Cx + D. \quad (8)$$

Usporedba ovako izračunatih progiba, za stup visine $L=10$ m opterećen silom $F=1000$ kN, s izmjerenim vrijednostima progiba, prikazana je na Slici 3.



Sl. 3. Usporedba progiba AB stupa niskonaponske mreže visine $L=10$ m [2]

3.2 Numerička analiza pomoću metode konačnih elemenata

Numerička analiza pomoću metode konačnih elemenata provedena je računalnim programom SCIA pri čemu su izvršene raznovrsne aproksimacije kako geometrijskih tako i materijalnih karakteristika [6, 7].

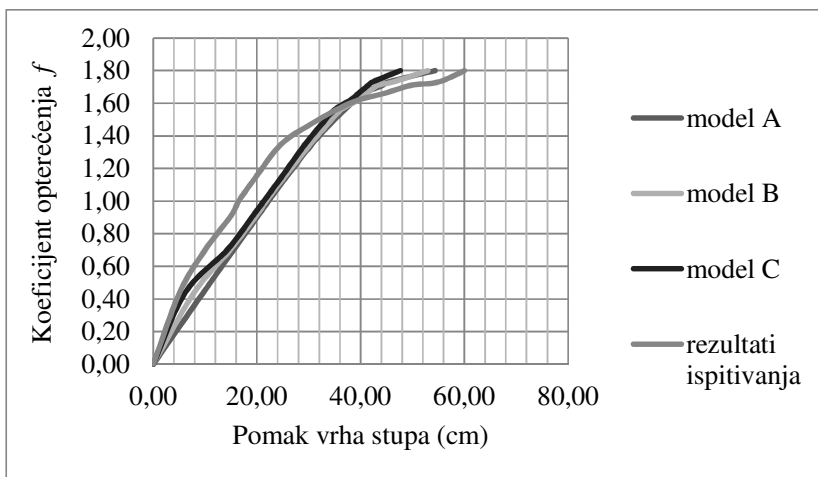
Što se tiče geometrijske diskretizacije analiziranog problema najbolje bi je bilo, na prvi pogled, izvršiti osnosimetričnim konačnim elementima, ali ovakva analiza nije moguća zbog karaktera opterećenja – jedna koncentrirana sila. 2D diskretizacija nije adekvatna jer je poprečni presjek okruglog oblika. Prema tome, proračuni u nastavku su provedeni diskretizacijom analiziranog problema s 1D (štapnim) elementima s promjenjivim geometrijskim karakteristikama poprečnog presjeka uzduž nosača.

Kako su kod štapnih elemenata sve geometrijske karakteristike konstantne duž dotičnog elementa, to se postavlja pitanje koje podatke upisati za moment tromosti. Najbolje bi bilo uzeti neku prosječnu vrijednost na dužini odabranog segmenta, ali iz kojeg presjeka: s početka, s kraja, iz sredine ili iz donje trećine odabranog segmenta.

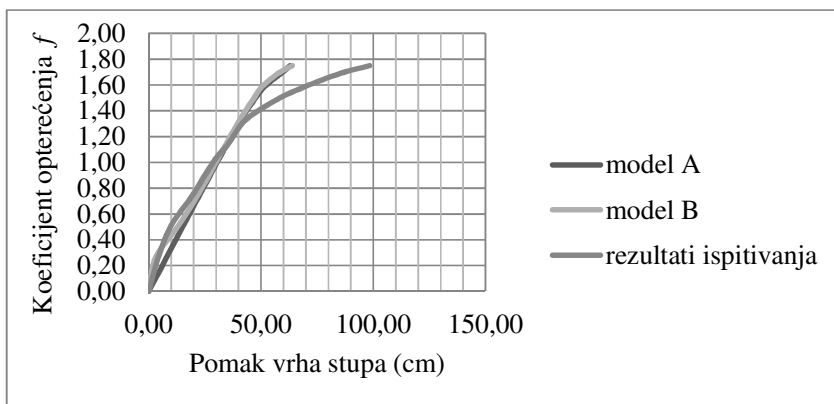
Što se tiče materijalnih karakteristika, osim ponuđene klase betona i vrste armature, moguća su četiri modela ponašanja materijala: (1) potpuno linearno ponašanje; (2) potpuno nelinearno ponašanje (ovo je de facto primjena teorije drugog reda bez ikakve linearnosti); (3) kao (2) ali s uključenim popuštanjem u vlačnoj zoni; i (4) slobodni upis: po volji definirani 1D model materijala koji je, u našem slučaju, kombinacija linearnosti na početku i nelinearnog ponašanja iznad granice tečenja.

Nadalje, uzimajući u obzir cjelokupni poprečni presjek, beton i armaturu, zbog male debljine stijenki AB stupa (6,5 do 9,0 cm), može se analizirati i utjecaj površine armaturnih šipki ($\phi 12$, $\phi 14$ ili $\phi 16$, ovisno o duljini stupa) na sve geometrijske karakteristike poprečnih presjeka. Ovdje još treba napomenuti da je duljina armaturnih šipki bila raspoređena u tri grupe dužina (L , cca $2/3L$ i cca $1/3L$).

Iz svega navedenoga se vidi široka lepeza mogućih istraživanja kako utjecaja raznih čimbenika tako i njihovih međusobnih utjecaja, što je u tijeku u radovima [6] i [7]. Dio rezultata je prikazan na Slikama 4 [6] i 5 [7]. Modeli A odgovaraju ponašanju materijala (2), klase betona C 40/50 i armature B 500B, modeli B odgovaraju ponašanju materijala (3), dok model C odgovara modelu B s klasom betona C 50/60.



Sl. 4. Usporedba progiba AB stupa niskonaponske mreže visine $L=9$ m [6]



Sl. 5. Usporedba progiba AB stupa srednjenaponske mreže visine $L=12$ m [7]

4 ZAKLJUČAK

U ovom radu je pokazano kako se nekim numeričkim idejama odnosno aproksimacijama kao i adekvatnim numeričkim modeliranjem svih čimbenika koji na razne načine mogu utjecati na točnost rezultata može analizirati ponašanje konzole promjenjivog okruglog šupljeg poprečnog presjeka. Sve ovo je i dodatno potvrđeno usporedbama s rezultatima eksperimentalnih istraživanja.

Literatura:

- [1] Šimić, V., "Otpornost materijala - I", Školska knjiga, Zagreb, 1992.
- [2] Ban, M., "Progib tipskog AB stupa niskonaponske mreže, Završni rad, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Sveučilište u Splitu, Split, 2008.
- [3] Bartulović, D., "Tipski armiranobetonski stupovi niskonaponske mreže", Glavni i izvedbeni projekt, Grading Projekt - Split, Split, T.D. 16/99, Split, 1999.
- [4] Marović, P., "Izveštaj o izvršenom probnom opterećenju i ispitivanju tipskih AB stupova niskonaponske i srednjenaponske mreže visine 9.0 m, 10.0 m i 12.0 m", Građevinski fakultet, Sveučilište u Splitu, Split, 2000.
- [5] Bartolac, M., Krolo, J., Paska, I., "Experimental testing of precast concrete poles for overhead electrical lines", Book of Abstracts - Proc. of the 29th Danubia-Adria Symposium, Ur. M. Ognjanović, University of Belgrade, Belgrade, Serbia, 2012. str. 30-31.
- [6] Putnik, G., "Numeričko modeliranje i analiza ponašanja AB stupa niskonaponske mreže", Diplomski rad, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, 2014.
- [7] Ljubas, M., "Numeričko modeliranje i analiza ponašanja AB stupa srednjenaponske mreže", Diplomski rad, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, 2014.

Autori:

Pavao Marović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija, Matice hrvatske 15, HR-21000 Split, tel. 021/303-380, e-mail: marovic@gradst.hr

Mirela Galić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija, Matice hrvatske 15, HR-21000 Split, tel. 021/303-334, e-mail: mirela.galic@gradst.hr

VIŠERAZINSKO MODELIRANJE ELASTIČNIH MATERIJALA

Munjas, N., Čanadija, M. i Brnić, J.

Sažetak: U radu je prezentirana metoda višerazinskog modeliranja elastičnih heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije prvoga reda. Koncept analize koja se vrši na makro i mikro razini sastoji se od prijenosa varijabli stanja s jedne razine na drugu. Korištena je pretpostavka malih deformacija. Razvijen je model reprezentativnog volumenskog elementa (RVE) na koji su primijenjeni periodični rubni uvjeti. Rješavanjem problema rubnog uvjeta (BVP) dobiven je numerički konstitutivni zakon koji daje odnos između naprezanja i deformacije u svakoj integracijskoj točki makrorazine. Numerička procedura razvijena je za dvodimenzijske probleme i temelji se na teoriji prvog reda. Procedura je verificirana na jednom primjeru i doneseni su odgovarajući zaključci.

Gljučne riječi: elastični materijal, višerazinsko modeliranje, računalna homogenizacija prvog reda, metoda konačnih elemenata

1 UVOD

Razvojem komercijalnih softvera koji se temelje na metodi konačnih elemenata (MKE) nastale su i napredne računalne metode modeliranja koje omogućuju lakše razumijevanje ponašanja materijala i odziva inženjerskih konstrukcija.

Jedna od tih metoda je tzv. višerazinska (dvorazinska) metoda modeliranja koja se temelji na računalnoj homogenizaciji materijalne strukture te povezivanju proračuna na različitim razinama koje imaju određene veličine. Prve metode računalne homogenizacije razvijene su za linearno elastično materijale [1].

Klasična metoda računalne homogenizacije sastoji se od definiranja reprezentativnog volumenskog elementa (RVE) koji predstavlja geometriju materijala na mikrorazini. RVE se definira na način da su poznati konstitutivni odnosi unutar svakog pojedinog elementa mikrorazine, da bi time mogli pristupiti formulaciji mikroskopskih rubnih uvjeta na temelju poznatih ulaznih varijabli. Proračun na RVE-u daje kao izlazni podatak makroskopske varijable. Na taj način imamo proračunate odnose između ulaznih i izlaznih varijabli makrorazine, što nam daje uvid u kompletan odziv konstrukcije [2].

2 RAČUNALNA HOMOGENIZACIJA PRVOG REDA

Računalna metoda homogenizacije prvog reda uzima u obzir samo gradijente makroskopskog polja pomaka koji su veličine prvog reda. Shema homogenizacije ulazi unutar okvira standardne teorije mehanike kontinuuma.

2.1 Reprezentativni volumenski element (RVE)

Fizička svojstva mikrorazine prikazana su pomoću RVE modela koji služi za određivanje odziva makroskopske strukture u svakoj materijalnoj točki.

Prikladan odabir veličine RVE-a određuje točnost modeliranja materijala. Njegova veličina mora biti dovoljna da bi se moglo modelirati sva svojstva koja smatramo da su važna za proračun, a dovoljno precizno odgovaraju npr. statističkim uzorak mikrostrukture. Ta veličina dakako ne može biti pak prevelika iz razloga što time možemo značajno produžiti vrijeme trajanja računalnog proračuna [2].

2.2 Rubni uvjeti definirani pomakom

Kod ovog pristupa ograničenja pomaka rubnih čvorova RVE-a predstavljaju rubne uvjete za proračun mikrorazine.

Položaj svakog čvora mikrorazine definiran je u početnoj konfiguraciji pomoću *Lagrangeovih materijalnih koordinata* vektorom položaja \mathbf{X} , dok je u trenutnoj konfiguraciji definiran pomoću *Eulerovih prostornih koordinata* vektorom položaja \mathbf{x} [4].

Veza između svakog čvora na granici RVE-a određena je izrazom:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{X}, \quad (1)$$

gdje tenzor \mathbf{F}_M predstavlja materijalni makroskopski gradijent deformiranja:

$$\mathbf{F}_M = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2)$$

Pomak svakog čvora mikrorazine određen je vektorom pomaka:

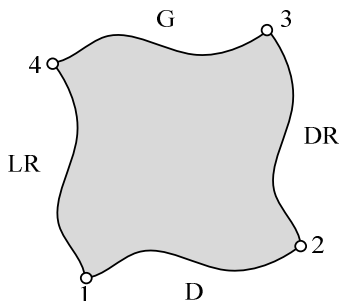
$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3)$$

Koristeći prethodne izraze možemo dobiti rubne uvjete pomaka čvorova RVE-a:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F}_M - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X}. \quad (4)$$

2.2 Periodički rubni uvjeti

Uz pretpostavku globalne periodičnosti mikrorazine standardno se koriste periodički rubni uvjeti. Rubovi RVE-a mogu se podijeliti u četiri dijela, "G" gornji rub, "D" donji rub, "DR" desni rub i "LR" lijevi rub (Sl. 1).



Sl. 1. Dvodimenzionalni RVE za postavljanje rubnih uvjeta

U početnoj konfiguraciji periodičnost RVE-a definirana je odnosima vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_G - \mathbf{X}_D &= \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{X}_{DR} - \mathbf{X}_{LR} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1, \end{aligned} \quad (5)$$

gdje su dani vektori položaja kutnih čvorova 1, 2 i 4. Ako položaj čvorova izrazimo pomoću materijalnog mikroskopskog gradijenta deformacije u izrazu (1), možemo napisati:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_D &= \mathbf{F}_M \cdot (\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_1), \\ \mathbf{x}_{DR} - \mathbf{x}_{LR} &= \mathbf{F}_M \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1).\end{aligned}\quad (6)$$

Kako su za kutne čvorove vektori položaja u trenutnoj konfiguraciji:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, 4 \quad (7)$$

periodične rubne uvjete možemo napisati pomoću trenutnog vektora položaja:

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_D + \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_{DR} = \mathbf{x}_{LR} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1,$$

ili pomoću vektora pomaka:

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_{DR} = \mathbf{u}_{LR} + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1,$$

gdje za kutne čvorove vektori pomaka se mogu napisati:

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{F}_M - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, 4 \quad (10)$$

2.3 Prirodni rubni uvjeti

Da bi mogli definirati problem rubnog uvjeta mikrorazine potrebno je postaviti ograničenje za površinske sile tj. postaviti vektor naprezanja koji odgovara makroskopskom tenzoru naprezanja. Ovo je treći pristup postavljanju rubnih uvjeta.

Vektor naprezanja možemo izraziti u početnoj konfiguraciji pomoću Cauchyjevog makroskopskog tenzora naprezanja:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_M, \quad (11)$$

gdje je \mathbf{n} vektor normale zatvorene rubne površine u trenutnoj konfiguraciji [2].

2.4 Ekvivalentni mikroskopski tenzor naprezanja

Nakon rješavanja problema na mikrorazini potrebno je prosljediti određene usrednjene podatke na makrorazinu, radi čega je potrebno razmotriti energijski teorem usrednjavanja, poznatiji u radovima [1] i [2] kao *Hill-Mandelov uvjet makrohomogenosti*, preko varijacijskog računa.

Taj uvjet zahtjeva da je volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u jednako lokalnoj varijaciji virtualnog rada na mikrorazini:

$$\delta W_M = \delta W_m. \quad (12)$$

Ako taj uvjet izrazimo pomoću se može izraziti preko Cauchyjevog makroskopskog tenzora naprezanja i tenzora deformacije:

$$\delta W_M = \int_V \boldsymbol{\sigma}_m : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}_m : \nabla \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dS = \int_S \mathbf{t}^n \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dS, \quad (13)$$

gdje V označava trenutni volumen RVE-a, dok \mathbf{n} predstavlja normalu na trenutnu zatvorenu rubnu površinu RVE-a S . Operator gradijent $\nabla = \overrightarrow{\text{grad}}$ predstavlja deriviranje po materijalnim koordinatama.

Hill-Mandelov uvjet za naprezanja glasi da je tenzor naprezanja na makrorazini jednak usrednjenoj vrijednosti tenzora mikrorazine po volumenu:

$$\sigma_M = \bar{\sigma}_m = \frac{1}{V} \int_V \sigma_m dV = \frac{1}{V} \int_S \mathbf{t} x dS. \quad (14)$$

2.4 Numeričko diferenciranje matrice krutosti

Analitičko određivanje tangentne matrice krutosti može predstavljati zahtjevan zadatak kod složenijih konstitutivnih modela koji se namjeravaju koristiti u nastavku ovog istraživanja. Kao jednostavna alternativa može se koristiti numeričko diferenciranje, no valja imati na umu da ovo rezultira duljim vremenom proračuna. Numeričko diferenciranje kvocijentom razlike predstavlja tzv. *diskretnu Newtonovu shemu aproksimacije* [3].

Tangentnu matricu krutosti možemo prikazati u vektorskom obliku:

$$\mathbf{C}_T = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_k \quad \dots \quad \mathbf{c}_n], \quad (15)$$

gdje \mathbf{c}_k predstavlja k -ti član matrice, za slučaj da imamo n nepoznanica. Nepoznati k -ti član se određuje numeričkom aproksimacijom prema formuli:

$$\mathbf{c}_k \approx \frac{1}{h_k} [f(\boldsymbol{\varepsilon}_i + h_k \boldsymbol{\delta}_k, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \bar{\boldsymbol{\sigma}})]. \quad (16)$$

U gornjem izrazu h_k predstavlja veličinu koraka, a vektor $\boldsymbol{\delta}_k$ sadrži nule i vrijednost 1 u k -tom redu. Veličinu koraka treba odabrati na način da dobijemo odgovarajuću matricu krutosti prema preporuci u [3] koja glasi:

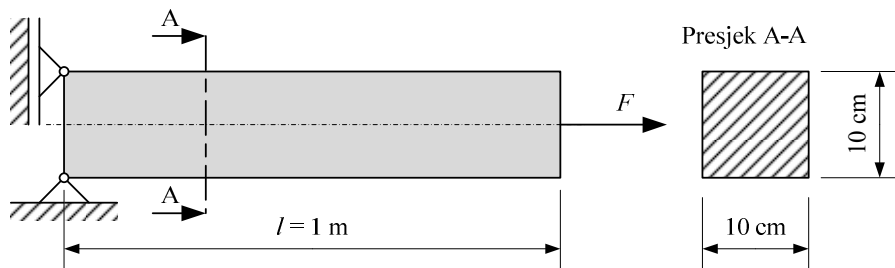
$$h_k = \nu (\varepsilon_k |_{i} + \tau), \quad (17)$$

gdje je $\nu = 10^{-3} \dots 10^{-5}$. Broj $\tau = 10^{-3}$ se unosi u izračun veličine koraka tako da u izrazu (16) izbjegnemo moguće dijeljenje s nulom.

Postoje određeni nedostaci u navedenoj metodi [3], no ona je dovoljno pouzdana za razmatranja navedena u ovome radu.

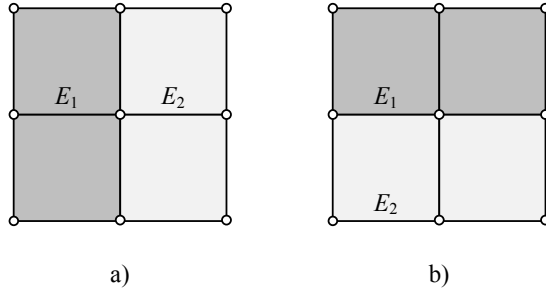
3 PRIMJERI

Primjer koji slijedi predstavlja aksijalno opterećen kvadratni štap (Sl. 2). koji je homogeniziran pomoću serijskog i paralelnog spoja dva elastična materijala (Sl. 3). Štap je zgloбно oslonjen, na način da su spriječeni pomaci kao kruto tijelo, te je opterećen aksijalnom silom $F = 200$ kN.



Sl. 2. Aksijalno opterećen štap (model makrorazine)

Poissonov broj jednak je za oba materijala i iznosi $\nu = 0,3$, dok su moduli elastičnosti definirani prema Sl. 3 i iznose $E_1 = 180$ GPa i $E_2 = 70$ GPa.



Sl. 3. a) Serijski i b) paralelni spoj modela mikrorazine

Određeni su također analitički izrazi za usporedbu rezultata proračuna. Za serijski spoj ukupni modul elastičnosti iznosi:

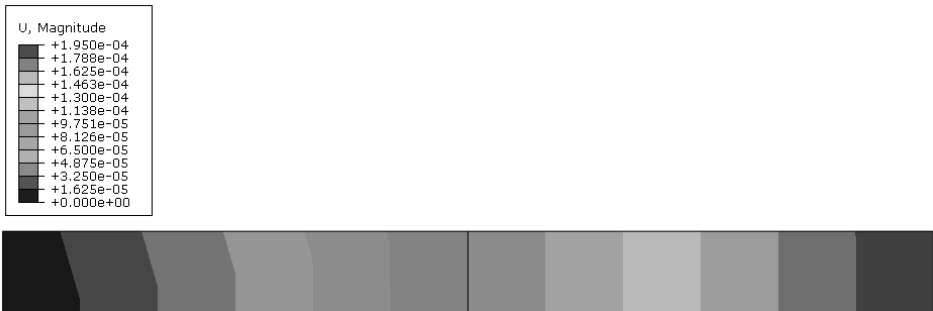
$$E_{\text{uk}} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} = 100,8 \text{ GPa} , \quad (18)$$

dok je ukupno produljenje $\Delta l_{\text{uk}} = 1,984 \cdot 10^{-4}$ m. Za paralelni spoj ukupni modul elastičnosti iznosi:

$$E_{\text{uk}} = \frac{E_1 + E_2}{2} = 125 \text{ GPa} , \quad (19)$$

dok je ukupno produljenje $\Delta l_{\text{uk}} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ m.

Na Sl. 4 i 5 su prikazani rezultati dobiveni numerički, pomoću paralelnog proračuna na dvije razine. Za proračun mikrorazine korišteni su periodički rubni uvjeti. Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata pokazuje dobro poklapanje.

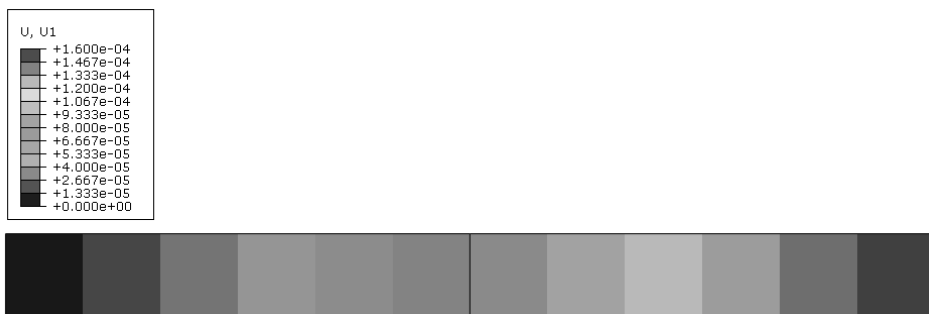


Sl. 4. Dijagram uzdužnog produljenja u makromodelu za primjer serijskog spoja mikrorazine

4 ZAKLJUČAK

Modeliranje heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije prvoga reda predstavlja jedan pouzdan način određivanja svojstava materijala s ciljem preciznijeg određivanja ponašanja inženjerskih konstrukcija.

U daljnjem razvoju modela cilj je uključiti efekte utjecaja temperature. Također, naglasak se stavlja na ostale vrste materijala kao što su npr. plastični materijali uz promjenu temperature.



Sl. 5. Dijagram uzdužnog produljenja u makromodelu za primjer paralelnog spoja mikrorazine

Literatura:

- [1] Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Brekelmans, W.A.M., “Computational homogenisation for non-linear heterogeneous solids”, u Galvanetto, U., Aliabadi, M.H.F. (eds.), “Multiscale modeling in solid mechanics”, Imperial College Press, London, 2010, str. 1-42.
- [2] Geers, M.G.D., “Scale transitions in solid mechanics based on computational homogenisation”, CISM lecture notes in advanced course “Experimental and theoretical multiscale analysis of materials and structures”, Udine, 2011.
- [3] Wriggers, P., “Nonlinear finite element methods”, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [4] Jarić, J. “Mehanika kontinuuma”, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

Autori:

Neven Munjas, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-503, fax 051/651-490, e-mail: nmunjas@riteh.hr.

Marko Čanadija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-496, fax 051/651-490, e-mail: markoc@riteh.hr.

Josip Brnić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-491, fax 051/651-490, e-mail: brnic@riteh.hr.

ZAMORNO OŠTEĆENJE PREDNAPREGNUTOG I EKSCENTRIČNO OPTEREĆENOG VIJČANOG SPOJA

Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D., Gelo, I. i Damjanović, D.

Sažetak: Vijčani spoj je izložen kombinaciji sila pritezanja koje uzrokuju značajna srednja naprezanja i dinamičkim silama. Nehomogena raspodjela opterećenja s nelinearnom interakcijom kontaktnih površina prisutna je na navojnim površinama. Vijčani spojevi sadrže u korijenu navoja zarez koji lokalno uzrokuje pojavu višeosnih koncentracija naprezanja s vrlo visokim iznosima i gradijentima naprezanja koji dovode do pojave zamornih pukotina. U takvom polju naprezanja, nužno je koristiti višeosne kriterije zamornog oštećenja. Za određivanje zamornog oštećenja korištena je kombinacija gradijenata naprezanja s teorijom kritičnih ravnina, Rainflow brojanjem ciklusa i akumulacijom oštećenja prema Haibachovoj ili modificiranoj Palmgren-Minerovoj metodi.

U radu je prikazana analiza zamornog oštećenja vijčanog spoja M10 razreda čvrstoće 10,9 opterećenog silom pritezanja od 75% granice tečenja materijala i dinamičkim opterećenjem te s obzirom na vjerojatnosti preživljavanja od 50%, 90%, 95%, 99%, 99,9%, 99,99%, 99,999% i 99,9999% uz utjecajne faktore na zamor. Normalna Gaussova raspodjela korištena je za proračun utjecajnih statističkih varijabli.

Ključne riječi: *Vijčani spoj, akumulacija oštećenja, vjerojatnost preživljavanja, inicijacija pukotina*

1 UVOD

Određivanje zamornog oštećenja, dinamičke izdržljivosti i životnog vijeka vijčanih spojeva nalazi se u problematičnom i nedovoljno istraženom području [1]. Prema najnovijim istraživanjima zamor raznih konstrukcija, posebice mehaničkih spojeva, i dalje ostaje praktičan problem [2]. Primjena vijčanih spojeva kod odobalnih konstrukcija i u podmorju (eng. *offshore & subsea*) su najkritičnije točke, kao primjerice na bušecim glavama i ostalim konstrukcijama [3]. Prema Hillu [4], 65% otkaza bušeće opreme u sektoru nafte i plina (eng. *oil & gas*) se događa zbog zamora. Prema izvršnoj zdravstvenoj i sigurnosnoj agenciji iz Velike Britanije, glavni uzrok oštećenja konstrukcija u Sjevernom moru je zamor s 25% oštećenja, dok je samo 6% oštećenja zbog korozije [5]. Kritične lokacije na motorima su također vijčani spojevi klipnjača, spoja cilindarske glave i kućišta motora i sl. Zamor vijčanih spojeva konstrukcija vjetroturbina i medicinskih konstrukcija, kao što su vijci za dentalne implantate, implantati za kralježnicu (eng. *pedicle screws*) također se nalaze u problematičnom području [6]. Iz navedenoga lako se može zaključiti o širini primjene i problemima zamornog oštećenja vijčanih spojeva.

Stanje naprezanja u epruvetama bez zarez je u potpunosti drugačije u odnosu na epruvete sa zarezom [2]. Određivanje zamornog oštećenja i dinamičke izdržljivosti vijčanih spojeva se najčešće provodi prema normi Eurocode 3 ili VDI 2230, koje se

temelje na pristupu nominalnih naprezanja. Međutim, Međutim, za vijčane spojeve je karakteristična kompleksna geometrija, nelinearna interakcija kontaktnih površina, nehomogena raspodjela opterećenja, prednapregnuto stanje uslijed sile pritezanja, dinamička opterećenja, zaostala naprezanja i sl. Osim toga, koriste se metrički, trapezni, pilasti, cijevni i drugi navoji s normalnim ili finim navojem. Navedene specifičnosti znatno kompliciraju određivanje zamornog oštećenja. Metode koje se baziraju na nominalnim naprezanjima ne mogu razmotriti i detaljno opisati lokalno stanje naprezanja, deformacija, lokalne geometrije, utjecajnih faktora, cikličkog ponašanja materijala i zamornog oštećenja u korijenu navoja. Primjena pristupa lokalnih deformacija (eng. *local-strain approach*) prikazana je u radu [7].

Najveće poteškoće određivanja zamornog oštećenja vijčanog spoja su zbog nesigurnosti točnog definiranja cikličkih svojstava materijala, $S-N$ krivulje, proizvodnih aspekata, geometrije navoja, rasipanja vrijednosti sile pritezanja i spektra cikličkih sila, akumulacije oštećenja i utjecaja okoliša. Visoke vjerojatnosti preživljavanja su potrebne za konstrukcije i zbog toga se mora primijeniti statistika [8].

Za istraživanje zamornog oštećenja korišteno je *Rainflow* brojanje ciklusa i akumulacija oštećenja prema Haibachovoj ili modificiranoj Palmgren-Minerovoj metodi s obzirom na promjenjive amplitude ekscentričnog opterećenja uz silu pritezanja od 75% granice tečenja materijala. Normalna Gaussova raspodjela korištena je za proračun utjecajnih statističkih varijabli s obzirom na vjerojatnosti preživljavanja od 50%, 90%, 95%, 99%, 99,9%, 99,99%, 99,999% i 99,9999%.

2 NUMERIČKI MODEL VIJČANOG SPOJA

2.1 Modeliranje metodom konačnih elemenata

Mreža konačnih elemenata kreirana je s linearnim heksaedarskim elementima s korištenjem *sliding contacta*. Faktor trenja definiran je s $\mu = 0,1$. Prema VDI 2230 pravilniku [9], za kombinaciju materijala čelik – čelik u suhom stanju, $\mu = 0,1 - 0,23$. Vijak je M10, razreda čvrstoće 10,9, s korištenim materijalom 42CrMo4. Ciklička petlja histereze naprezanja-deformacija definirana je s cikličkim koeficijentom očvršćenja $K' = 1,61 \cdot R_m$ i cikličkim eksponentom očvršćenja $n' = 0,15$ [10]. Mehanička svojstva materijala vijka su: $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, $R_m = 1100$ MPa, $R_{0,2} = 900$ MPa i $A = 11$ %, prema DIN EN 10 083-1. Profil navoja definiran je kao osnosimetričan jer utjecaj kuta uspona zavojnice ne utječe na raspodjelu opterećenja [11]. Sila pritezanja vijka (F_P) definirana je s obzirom na silu pri granici tečenja ($F_{0,2}$) za M10 vijak, razreda čvrstoće 10,9 [9]. Primijenjena sila pritezanja definirana je kao 75% od $F_{0,2}$, što rezultira s $F_P = 41250$ N. Ekscentrične sile s promjenjivim amplitudama definirane su prema tzv. *block-programu* gdje sile rastu od minimalne vrijednosti (700 N) do maksimalne vlačne ekscentrične sile od 7000 N. Sile na modelu prikazane su na slici 1.

2.2 Određivanje zamornog oštećenja vijčanog spoja

Ciklička svojstva materijala epruvete ($d = 7,5$ mm) za $S-N$ krivulju pri izmjeničnom vlačno/tlačnom opterećenju (omjer naprezanja $R = -1$) i relativnom gradijentu naprezanja $\chi' = 0$ s vjerojatnošću preživljavanja $P_S = 50$ % su definirana. Koljeno $S-N$ krivulje nalazi se pri $2 \cdot 10^6$ ciklusa i nagib krivulje je $k = 12$. Izmjenična dinamička izdržljivost pri $R = -1$ definirana je s $\sigma_{D,ic} = 495$ MPa [12].

Višeosna interakcija između tenzora amplituda i srednjih naprezanja riješena je pomoću teorije kritičnih ravnina. Ravnina je definirana na svakih 10° . Utjecaj srednjih naprezanja se uzima u obzir pomoću Haighovog dijagrama koji definira najkritičniju ravninu i oštećenje. Korištena je modificirana formulacija Minerove akumulacije oštećenja (eng. *Miner Modified*) s nagibom $S-N$ krivulje $k' = 2k - 1$. Preuređivanje amplituda i srednjih naprezanja uslijed plastifikacije materijala riješeno je pomoću Neuberove hiperbole. Definicija modela $S-N$ krivulje u logaritamskom mjerilu uzima tenzor amplituda naprezanja određene petlje histereze za akumulaciju oštećenja. Iz dobivene povijesti naprezanja po vremenu, *Rainflow* brojanje ciklusa primijenjeno je za definiranje zatvorenih ciklusa u petlji. Što znači da je sačuvano u matrici 64×64 amplituda/srednja naprezanja. Hrapavost površine definirana je $R_z = 2,5 \mu\text{m}$. Utjecaj promjera vijka uzet je u obzir prema FKM pravilniku [12]. Visoki gradijenti naprezanja koji nastaju uslijed savijanja bokova navoja i koncentracije naprezanja, uzrokuju mikro-podršku materijala koja dovodi do više dinamičke izdržljivosti u korijenu navoja.

Numeričke analize provedene su u Abaqusu 6,10 (Simulia, Providence, RI, USA). Analize zamornog oštećenja provedene su u FemFatu 4,8 (ECS, Steyr, Austria).

2.3 Utjecaji statistike i vjerojatnosti

U statistici, Gaussova distribucija opisuje se sa srednjom vrijednošću i standardnom devijacijom. Gaussova normalna distribucija u logaritamskom mjerilu pretpostavljena je unutar raspona rasipanja vrijednosti cikličkih svojstava materijala. Umjesto uobičajene standardne devijacije (s) u statistici, proračuni su provedeni s rasponom rasipanja (T_S). Rasipanje cikličkih svojstava materijala (omjer dinamičke izdržljivosti (σ_D) pri vjerojatnosti preživljavanja $P_S = 10$ i 90%) definirano je $s T_S = 1,26$. Normalna Gaussova distribucija je pretpostavljena za proračun utjecajnih statističkih varijabli. Raspon rasipanja broja ciklusa do inicijacije pukotine (T_N) određen je iz broja ciklusa $N_{90\%}$, pri kojemu se na 90% ispitnih uzoraka pojavila pukotina u odnosu na broj ciklusa $N_{10\%}$, pri kojemu se na 10% pojavila pukotina. Slijedeći izraz opisuje ovisnost između T_N i T_S s uključenim nagibom $S-N$ krivulje (k):

$$T_N = T_S^k. \quad (1)$$

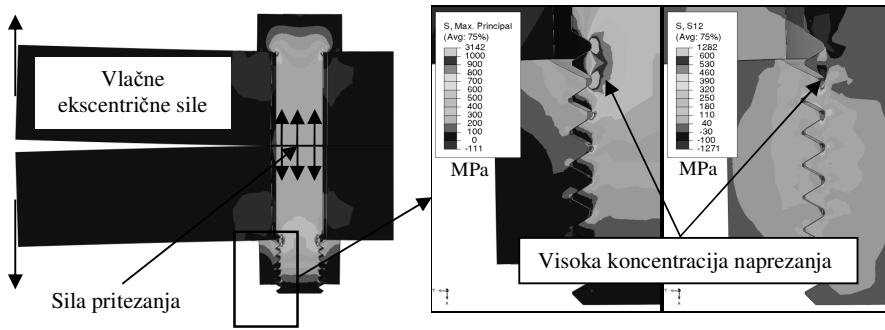
Dinamička izdržljivost za vjerojatnosti preživljavanja od 10, 50 ili 90% može se izračunati u ovisnosti između određene vjerojatnosti:

$$\sigma_{D,10} = 10^{(\log \sigma_{D,50} + 1,281 \cdot s)}, \quad (2)$$

$$\sigma_{D,90} = 10^{(\log \sigma_{D,50} - 1,281 \cdot s)}. \quad (3)$$

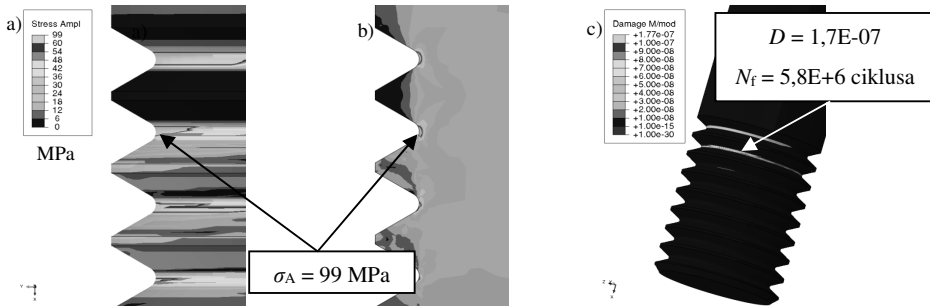
3 REZULTATI

Rezultati za vrijeme s konstantnom silom pritezanja od $F_P = 41250 \text{ N}$ i maksimalnom vlačnom ekscentričnom silom prikazani su na slici 1 koja prikazuje glavna vlačna naprezanja (σ_{maxpr}) i smična (τ_{xy}) naprezanja. Naprezanja su prikazana s 10 puta povećanim deformacijama. Vrlo visoka koncentracija naprezanja je prisutna u prvom nosivom korijenu navoja zbog linearno-elastično definiranog materijalnog modela. Rezultati dokazuju da je nužno koristiti Neuberovu hiperbolu za određivanje zamornog oštećenja zbog vrlo visokih naprezanja koja nisu realna.

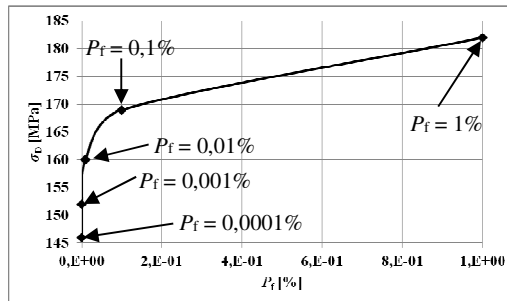


Sl. 1. Rezultati, a) glavna naprezanja, b) smična naprezanja

Rezultati zamornog oštećenja prikazani su za vjerojatnost preživljavanja od $P_f = 99,9999\%$. Dobivena je suma oštećenja $D = 1,7E-07$ s brojem ciklusa do pojave pukotine od $N_f = 5,8 \cdot 10^6$ ciklusa za najvišu vjerojatnost preživljavanja u najkritičnijem čvoru vijčanog spoja na polumjeru prvog nosivog navoja. Maksimalna amplituda naprezanja iznosi $\sigma_A = 99$ MPa pri asimetriji ciklusa od $R = 0,82$. Navedeni rezultati prikazani su na slici 2, dok dijagram na slici 3 i tablica 1 prikazuju smanjenje dinamičke izdržljivosti i životnog vijeka uz povećanje zamornog oštećenja s povećanjem vjerojatnosti preživljanja ili smanjenjem vjerojatnosti otkaza (P_f).



Sl. 2. Rezultati, a) Amplitude naprezanja na navoju s presjekom pod b), c) zamorno oštećenje



Sl. 3. Vjerojatnost otkaza (P_f) konstrukcije i pripadajuća dinamička izdržljivost (σ_r)

P_S [%]	50	90	95	99	99.9	99.99	99.999	99.9999
D [-]	1,9E-8	3,4E-8	4E-8	5,5E-8	7,9E-8	1,1E-7	1,4E-7	1,7E-7
N_f [ciklusa]	5,3E+7	2,9E+7	2,5E+7	1,8E+7	1,3E+7	9,4E+6	7,3E+6	5,8E+6
σ_D [MPa]	224	199	193	182	169	160	152	146

Tablica 1. Suma oštećenja, životni vijek i dinamička izdržljivost za vjerojatnosti preživljavanja

4 DISKUSIJA

Uslijed značajnog rasipanja vrijednosti cikličkih svojstava materijala za ispitne epruvete i realne konstrukcije, uz rasipanje iznosa spektra opterećenja i kritičnoj sumi oštećenja, o zamornom oštećenju i dinamičkoj izdržljivosti može se govoriti samo s određenom razinom vjerojatnosti. Uz navedenu tvrdnju, potrebno je naglasiti i transfer cikličkih svojstava s epruvete na realnu konstrukciju koji se smatra i dalje jednim od najvećih problema zamora i dinamičke izdržljivosti [13]. Neki koncepti, kao npr. pristup lokalnih deformacija (eng. *local-strain approach*), uzimaju za „slijepo“ transfer cikličkih svojstava i sume oštećenja s glatke epruvete na realnu konstrukciju s geometrijskim diskontinuitetima [14]. Korištena metoda za proračun zamornog oštećenja vijčanog spoja pod djelovanjem statičke sile pritezanja i promjenjivih amplituda bazirana je na pristupu naprezanja s teorijom kritičnih ravnina i utjecajnim faktorima koji lokalno modificiraju svojstva materijala, te na taj način se dobivaju realnija ciklička svojstva materijala vijčanog spoja. Zbog realnijih lokalnih cikličkih svojstava materijala, nelinearne interakcije kontaktnih površina, visoke koncentracije naprezanja i gradijenata naprezanja u korijenu navoja pri djelovanju opterećenja s promjenjivim amplitudama i s korištenjem modificirane Palmgren-Minerove sume oštećenja, može se odrediti zamorno oštećenje konstrukcije s navojem. Kritična suma oštećenja ovisi o stupnju višeosnosti i neproporcionalnosti stanja naprezanja [15]. Približno 90% rezultata kritične sume oštećenja nalazi se ispod konvencionalne vrijednosti $D = 1$. Prema međunarodnom institutu za zavarivanje (IIW), preporučena kritična suma oštećenja $D = 0,5$ za zavarene čelične spojeve s promjenjivim dinamičkim amplitudama.

Za eksperimentalno istraživanje zamora velikih konstrukcija je broj testova vrlo ograničen i često se provodi na samo jednoj ispitnoj konstrukciji. U takvim se slučajevima rizik mora istražiti i s uzimanjem statistike u obzir. Prihvaćena vjerojatnost preživljavanja ili otkaza konstrukcije u upotrebi ovisi o posljedicama otkaza [16]. Prema DNV pravilniku za pouzdanost *offshore* konstrukcija, vjerojatnost otkaza od $P_f = 10^{-6} \%$ se mora koristiti kada lomovi ne pokazuju vidljive pukotine [17]. Navedeno posebno vrijedi za kritične lokacije koje nisu dostupne prilikom inspekcija.

5 ZAKLJUČAK

Vjerojatnost preživljavanja od $P_S = 50\%$ rezultira sa oštećenjem $D = 1,9E-8$ i brojem ciklusa do inicijacije pukotina $N_f = 5,3E+7$ ciklusa, dok $P_S = 99,9999\%$ rezultira s $D = 1,7E-7$ i $N_f = 5,8E+6$ ciklusa. Povećanje vjerojatnosti preživljavanja značajno utječu na rezultate zamornog oštećenja, posebice za visoke vrijednosti iznad $P_S = 99\%$. O zamornom oštećenju i dinamičkoj izdržljivosti može se govoriti samo s određenom razinom vjerojatnosti preživljavanja ili otkaza.

Literatura:

- [1] Schijve, J., "Fatigue of Structures and Materials in the 20th Century and the State of the Art", International Journal of Fatigue, Vol.25, 2003, str. 679-702.
- [2] Schijve, J., "The Significance of Fatigue Crack Initiation for Predictions of the Fatigue Limit of Specimens and Structures", Int Journal of Fatigue, Vol.61, 2014, str. 39–45.
- [3] Esaklul, K.A., Ahmed, T.M., "Prevention of Failures of High Strength Fasteners in Use in Offshore and Subsea Applications", Engineering Failure Analysis, Vol.16, 2009, str. 1195–1202.
- [4] Hill, T.H., "A Unified Approach to Drillstem Failure Prevention", SPE Drilling Engineering, Vol.7, No.4, 1992, str. 254-260.
- [5] Review of Repairs to Offshore Structures and Pipelines, Publication 94/102 Marine Technology Directorate, UK, 1994.
- [6] Johnston, T.L., Karaikovic, E.E., Lautenschlager, E.P., Marcu, D., "Cervical Pedicle Screws vs. Lateral Mass Screws: Uniplanar Fatigue Analysis and Residual Pullout Strengths", The Spine Journal, Vol.6, 2006, str. 667–672.
- [7] Schneider, R., Wuttke, U., Berger, C., "Fatigue Analysis of Threaded Connections Using the Local Strain Approach", Procedia Engineering, Vol.2, No.1, 2010, str. 2357–2366.
- [8] Schijve, J., "Fatigue of Structures and Materials", Springer Netherland, 2009.
- [9] Verein Deutscher Ingenieure, "VDI 2230 Guidelines", 2003.
- [10] FemFat 4.7: "Theory Manual", ECS Steyr, St. Valentin, 2007.
- [11] Chen, J.J., Shih, Y.S., "A Study of the Helical Effect on the Thread Connection by 3D Finite Element Analysis", Nuclear Engineering and Design, Vol.191, 1999, str. 109–116.
- [12] Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), "Analytical Strength Assessment of Components in Mechanical Engineering", 5th Ed, VDMA Verlag GmbH, 2003.
- [13] Pyttel, B., Schwerdt, D., Berger, C., "Very High Cycle Fatigue – Is There a Fatigue Limit?", International Journal of Fatigue, Vol. 33, 2011, str. 49-58.
- [14] Schütz, W., "A History of Fatigue", Engineering Fracture Mechanics Vol.54, No.2, 1996, str. 263-300.
- [15] Susmel, L., Tovo, R., "Estimating Fatigue Damage Under Variable Amplitude Multiaxial Fatigue Loading", Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol.34, No.12, 2011, str. 1053–1077.
- [16] Radaj, D., Sonsino, C.M., Fricke, W., "Fatigue Assessment of Welded Joints by Local Approaches", 2nd Edition, Woodhead Publishing, England, 2006.
- [17] DNV, "Guideline for Offshore Structural Reliability Analysis", Report No. 95-3204.

Autori:

Stipica Novoselac, student poslijediplomskog doktorskog studija, tel. 091/5056300, e-mail: stipica.novoselac@gmail.com

Todor Ergić, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet Slavonski Brod, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, tel. 035/493-429, e-mail: tergic@sfsb.hr

Dražan Kozak, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/493-452, fax 035/446-446, e-mail: Drazan.Kozak@sfsb.hr

Gelo Ivan, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/493-419, e-mail: Ivan.Gelo@sfsb.hr

Darko Damjanović, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/ 493- 427, e-mail: darko.damjanovic@sfsb.hr

INTERPOLACIJA OVISNA O KONFIGURACIJI U NELINEARNIM RAVNINSKIM GREDNIM KONAČNIM ELEMENTIMA

Papa Dukić, E. i Jelenić, G.

Sažetak: U radu je predstavljena interpolacijska funkcija ovisna o konfiguraciji koja u graničnom slučaju linearne analize rezultira vezanom interpolacijom za koju je poznato da daje točna analitička rješenja linearne gredne teorije. Bit predložene formulacije jest u tome da se za opisivanje nepoznatog polja pomaka i polja rotacija koriste funkcije koje pomoću trenutne konfiguracije deformiranog elementa opisuju konačno stanje pomaka i rotacija. Predloženom interpolacijom ovisnom o konfiguraciji je na vrlo elegantan način povezana linearna i nelinearna analiza istom familijom interpolacijskih funkcija koje u posebnim slučajevima daju interpolacije poznate u literaturi od ranije.

Ključne riječi: nelinearna analiza, interpolacija ovisna o konfiguraciji, ravninska gredna teorija

1 UVOD

Interpolacijske funkcije koje se u metodi konačnih elemenata koriste da bi se približno opisala polja nepoznanica, daju metodi konačnih elemenata aproksimativni karakter. Ovisno o primijenjenoj interpolacijskoj funkciji će rješenja koja daje ova numerička metoda biti više ili manje točna. Stoga je jedan od glavnih razloga istraživanja interpolacijskih funkcija poboljšanje točnosti konačnih, u ovom slučaju grednih elemenata.

U linearnoj analizi Timošenkovih greda poznate su interpolacijske funkcije koje dovode do točnih analitičkih rješenja i takva interpolacija se naziva vezana interpolacija [4] koja se temelji na povezivanju polja pomaka i polja rotacija. Interpolacija ovisna o konfiguraciji [5] u nelinearnoj Reissnerovoj teoriji greda [6] predstavlja pokušaj generalizacije vezane interpolacije na nelinearnu analizu. Pri tome kao polazne točke, uz već spomenutu vezanu interpolaciju, koristimo još deformacijski invarijantnu interpolaciju [3] te helikoidalnu interpolaciju [2].

2 FORMULACIJA INTERPOLACIJE OVISNE O KONFIGURACIJI

Interpolacija ovisna o konfiguraciji je bazirana na postojećim interpolacijskim funkcijama spomenutima u uvodu te će one biti dane u nastavku.

2.1 Deformacijski invarijantna interpolacija

U svom radu Jelenić i Crisfield [3] daju geometrijski točan izoparametarski prostorni gredni element koji pokazuje svojstvo invarijantnosti deformacija obzirom na pomak i

rotaciju krutog tijela. Bit formulacije je interpolacija trenutnih lokalnih rotacija dok se vektor položaja opisuje standardnim Lagrangeovim polinomima te vrijedi:

$$\mathbf{r}(x) = \sum_{i=1}^N I_i(x) \mathbf{r}_i, \quad (1)$$

gdje je $x \in [0, L]$ parametar položaja materijalne točke na osi grede, N je broj čvorova elementa, $I_i(x)$ su Lagrangeovi polinomi reda $N-1$ koji zadovoljavaju jednakost $I_i(x_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} je Kronekerov simbol ($\delta_{ij} = 1$ za $i = j$ i $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$), a \mathbf{r}_i je čvorni vektor položaja. Multiplikativni prirast rotacijskog vektora aproksimiran je kao

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{I}}^i \Delta \boldsymbol{\theta}_i, \quad (2)$$

gdje je interpolacijska funkcija $\tilde{\mathbf{I}}^i$ dana kao

$$\tilde{\mathbf{I}}^i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_k^{ij} \boldsymbol{\Lambda}_r \left\{ (\delta_{Ik} + \delta_{Jk}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Psi}^{lh}) \sum_{m=1}^N I_m \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_m^l) \right] \mathbf{V}_j + \mathbf{H}(\boldsymbol{\Psi}^{lh}) I_k \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_j^l) \right\} \boldsymbol{\Lambda}_r^T. \quad (3)$$

U ovom izrazu indeksi I, J predstavljaju referentne čvorove, a matrice $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Psi}^{lh}), \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_m^l)$ i \mathbf{V}_j su povezane s lokalnim i čvornim rotacijama te su detaljno opisane u [3, 5]. Također, $\boldsymbol{\Lambda}_r$ je referentna orijentacija grede ovisna o orijentaciji presjeka u čvorovima (i), $\boldsymbol{\Psi}_m^l$ je vektor ukupne rotacije čvora m obzirom na referentnu orijentaciju (vektor lokalne rotacije), $\boldsymbol{\Psi}^{lh}(x) = \sum_{i=1}^N I_i(x) \boldsymbol{\Psi}_i^l$, a Δ_k^{ij} je generalizirani Kronekerov simbol ($\Delta_k^{ij} = 1$ za $i = j = k$ i $\Delta_k^{ij} = 0$ u svim drugim slučajevima). Ova interpolacija je dana za proizvoljan broj čvorova elementa a u slučaju dvočvornih elemenata se svodi na helikoidalnu interpolaciju.

2.2 Helikoidalna interpolacija

Helikoidalna interpolacija koju u svom radu [2] predlažu autori Borri i Bottasso polazi od zahtjeva da rješenje grednog problema ne bi smjelo biti ovisno o izboru referentne osi grede. Ovaj zahtjev se svodi na uvjet da vektor položaja točke na referentnoj osi grede (\mathbf{r}) opisujemo istom interpolacijom kao i rotacijski tenzor ($\boldsymbol{\Lambda}$) na način:

$$\mathbf{r}(x) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{N}}_i(x) \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\Lambda}(x) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{N}}_i(x) \boldsymbol{\Lambda}_i, \quad (4)$$

gdje je $\tilde{\mathbf{N}}_i(x)$ helikoidalna interpolacija dana u [2]. Ovaj pristup daje u potpunosti istu interpolaciju za polje rotacija kao i rad Jelenića i Crisfielda [3] za slučaj dvočvornih elemenata. Bitno je napomenuti da je helikoidalna formulacija primijenjena samo na elemente s dva čvora i dana metodologija je ograničena samo na taj slučaj, a u linearnoj analizi svodi se na vezanu interpolaciju [4].

Proširivanjem rezultata helikoidalne interpolacije na višečvorne elemente koristeći metodologiju deformacijski invarijantne formulacije dovodi do interpolacije ovisne o konfiguraciji koja je detaljno opisana u [5].

2.3 Interpolacija ovisna o konfiguraciji

Interpolacija ovisna o konfiguraciji podrazumijeva upotrebu interpolacije (2) za polje rotacija te funkciju \mathbf{J}_i za opisivanje polja pomaka. Funkcija \mathbf{J}_i predstavlja modifikaciju deformacijski invarijantne interpolacije $\tilde{\mathbf{I}}^i$ pomoću koeficijenta β koji mora postojati ukoliko želimo da interpolacija ovisna o konfiguraciji u linearnoj analizi postane vezana interpolacija za proizvoljan element višeg reda, a ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_k^{ij} \mathbf{\Lambda}_r \left\{ (\delta_{Ik} + \delta_{Jk}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\beta \Psi^{lh}) \sum_{m=1}^N I_m \mathbf{H}^{-1}(\beta \Psi_m^l) \right] \mathbf{V}_j + \mathbf{H}(\beta \Psi^{lh}) I_k \mathbf{H}^{-1}(\beta \Psi_j^l) \right\} \mathbf{\Lambda}_r^T, \quad (5)$$

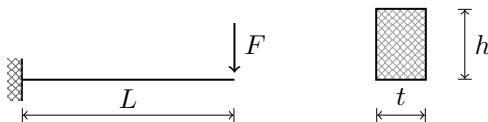
te je detaljno opisana u radu [5]. Ovisno o koeficijentu β , interpolacija \mathbf{J}_i se svodi na dva slučaja: 1) $\beta = 1$ rezultira istom interpolacijom za polje pomaka i rotacija te daje rješenje neovisno o izboru referentne osi grede, ali u graničnom slučaju linearne analize ne daje točna analitička rješenja; 2) $\beta = 2/N$ daje točna rješenja u linearnoj analizi ali ne daje rješenje neovisno o izboru referentne osi grede.

3 NUMERIČKI PRIMJERI

Numerički primjeri su predviđeni kao usporedba interpolacije ovisne o konfiguraciji s interpolacijom Lagrangeovim interpolacijskim funkcijama za slučaj kada se matrica krutosti i vektor unutarnjih sila integriraju sa smanjenom točnošću (tzv. reducirana integracija) i za slučaj točne integracije (tzv. puna integracija). Za potrebe numeričke analize korišten je algoritam napisan u programskom paketu Wolfram Mathematica.

3.1 Standardni shear locking test

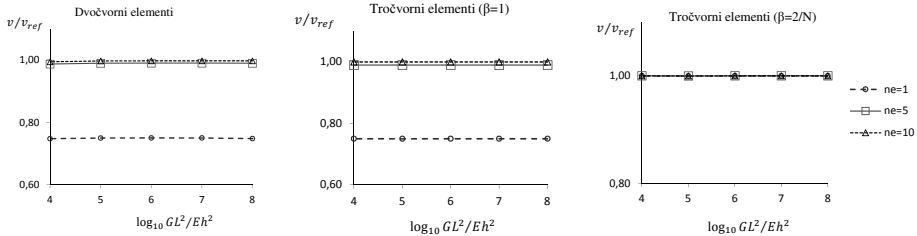
Ovaj numerički primjer [1] prikazan na Sl. 1 je odabran da bi se pokazao utjecaj poprečnih sila na pomake kada se debljina grede mijenja od male, što odgovara tankim gredama, do velike, što odgovara debelim gredama. Problem *shear locking*a se javlja kada se u elementima nižeg reda koristi Lagrangeova interpolacija u kombinaciji s punom integracijom matrice krutosti te se objašnjava kao posmično blokiranje uslijed djelovanja poprečnih sila. Ovaj fenomen postaje izraženiji kako se debljina grede smanjuje.



Sl. 1: Konzolna greda opterećena vertikalnom koncentriranom silom.

Problem je analiziran sa sljedećim materijalnim i geometrijskim karakteristikama: $L = 1$, $t = 0.1$, $E = 10^7$, $G = 10^{13}$, $F = 1$. Budući je problem lockinga direktno povezan s visinom grede h , ovu dimenziju, za potrebe ove analize, variramo od vrlo male $h = 0.1$ do vrlo velike $h = 10$. Vertikalni pomaci kraja konzole v uspoređeni su sa

referentnim rješenjem v_{ref} koje je dobiveno diskretizacijom problema sa 100 tročvornih elemenata u obliku kvocijenta v/v_{ref} . Rezultati su grafički prikazani u logaritamskoj skali na Sl. 2 u ovisnosti o parametru GL^2/Eh^2 za dvočvorne i tročvorne elemente. Konzola je modelirana s jednim, pet i deset konačnih elemenata.



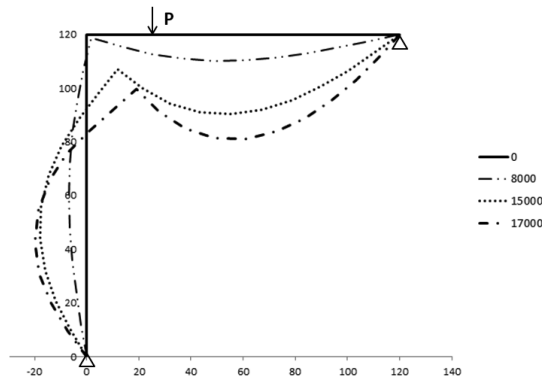
Sl. 2: Normalizirani vertikalni pomaci slobodnoga kraja konzole u ovisnosti o parametru GL^2/Eh^2 za dvočvorne i tročvorne elemente s korištenom interpolacijom ovisnom o konfiguraciji (n_e – broj elemenata u mreži).

Rezultati prikazani na Sl. 2 pokazuju da vertikalni pomaci slobodnoga kraja konzole ne ovise o visini grede te stoga možemo reći da interpolacija ovisna o konfiguraciji nije osjetljiva na problem *lockinga* niti u slučaju elementa najnižeg reda. Naravno, s povećanjem broja elemenata povećava se i točnost rješenja. Uočavamo razliku u točnosti rješenja za različite vrijednosti koeficijenta β . Vidimo da je rješenje vrlo blizu referentnom rješenju već s jednim tročvornim konačnim elementom za slučaj kada je koeficijent $\beta = 2/N$. Razlog ovome leži u tome što je razmatrani problem u domeni malih pomaka i malih rotacija te možemo reći da je vrlo blizak linearnoj analizi a interpolacija ovisna o konfiguraciji za slučaj $\beta = 2/N$ rezultira vezanom interpolacijom u graničnom slučaju linearne analize.

3.2 Leejev okvir

U svrhu testiranja točnosti i robusnosti interpolacije ovisne o konfiguraciji provest ćemo primjer dobro poznat u literaturi [7]. Primjer se sastoji od dva kraka duljine $l = 120$ zglobo oslonjena na svojim krajevima kako je prikazano na Sl. 3. Poznat je moment površine drugog reda $I = 2$, površina poprečnog presjeka $A = 6$, posmična površina $A_s = A/1.2$, modul elastičnosti $E = 7.2 \times 10^6$ te Poissonov koeficijent $\nu = 0.3$. Na jednoj petini horizontalnog kraka djeluje koncentrirana sila $P = 15000$ nanešena odjednom. Sl. 3 prikazuje deformacijske linije za različite vrijednosti koncentrirane sile $P = 8000, 15000, 17000$.

Okvir je modeliran sa pet dvočvornih do peteročvornih elemenata po svakom kraku. Referentno rješenje je dobiveno korištenjem 100 Lagrangeovih tročvornih elemenata, 50 po svakom kraku, uz korištenje reducirane integracije pri proračunu matrice krutosti i vektora unutarnjih sila. Pomaci i rotacije opterećenog čvora prikazani su u Tab. 1 te uspoređeni s Lagrangeovom interpolacijom. Simbol CDI u Tab. 1 označava interpolaciju



Sl. 3: Leejev okvir [7].

ovisnu o konfiguraciji a slijedi iz engleskog *configuration dependent interpolation*.

Interpolacija	Reducirana integracija			Puna integracija		
	u	v	φ	u	v	φ
Lagrange 2	6.4607277	-22.4863863	-0.3939265	0.0032633	-0.2281249	-0.0064778
Lagrange 3	8.0163768	-25.8624736	-0.3929177	3.3400045	-14.3642921	-0.3026289
Lagrange 4	8.0281657	-25.8924636	-0.3928227	7.8883600	-25.4463336	-0.3940329
Lagrange 5	8.0282220	-25.8926334	-0.3928215	8.0266232	-25.8883396	-0.3923843
CDI2	7.2445778	-23.6173958	-0.3968412	7.2445778	-23.6173958	-0.3968412
CDI3($\beta = 1$)	8.0265498	-25.8883573	-0.3928296	7.4676069	-24.2866212	-0.3956893
CDI3($\beta = 2/3$)	8.0210611	-25.8745419	-0.3928771	7.2254171	-24.2366473	-0.3811429
CDI4($\beta = 1$)	8.0282182	-25.8926222	-0.3928216	8.0237235	-25.8819096	-0.3928529
CDI4($\beta = 2/4$)	8.0281837	-25.8925191	-0.3928223	8.0086297	-25.8293214	-0.3929931
CDI5($\beta = 1$)	8.0282222	-25.8926338	-0.3928215	8.0281793	-25.8925181	-0.3928221
CDI5($\beta = 2/5$)	8.0282220	-25.8926335	-0.3928215	8.0279227	-25.8917751	-0.3928267
Referentno rješenje u=8.0282209 v=-25.8926306 φ=-0.3928215						

Tablica 1: Pomaci i rotacije opterećenog čvora.

Iz Tab. 1 vidimo da se Lagrangeovi dvočvorni i tročvorni elementi ponašaju vrlo slabo kada je primijenjena puna integracija dok se isti elementi s primijenjenom interpolacijom ovisnom o konfiguraciji ponašaju mnogo bolje. Zanimljivo je uočiti da dvočvorni element s korištenom interpolacijom ovisnom o konfiguraciji daje identična rješenja u slučaju pune i reducirane integracije. Također, za elemente višeg reda smanjuje se razlika u rješenju kada je primijenjena puna i reducirana integracija. S obzirom na koeficijent β također postoje razlike u rješenjima koje se također smanjuju kako se povećava broj čvorova elementa a najevidentnije su za tročvorni element. Budući je razmatrani problem vrlo nelinearan, što je vidljivo iz veličine pomaka i rotacija opterećenog čvora, zaključujemo da je u takvim slučajevima bolje koristiti interpolacijsku opciju koja daje rješenja neovisna o izboru referentne osi grede tj. kada je $\beta = 1$.

4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazana interpolacija ovisna o konfiguraciji koja pomoću trenutnog deformiranog položaja grede opisuje raspodjelu polja nepoznanica. Opisana interpolacija proizlazi iz helikoidalne interpolacije [2], koja je definirana samo za elemente s dva čvora, i proširuje je na elemente višeg reda koristeći rezultate deformacijski invarijantne formulacije [3]. U radu su dane dvije varijante interpolacije ovisne o konfiguraciji ovisno o koeficijentu β . U numeričkom dijelu rada pokazano je da predložena interpolacija vrlo dobro reproducira referentna rješenja te da nije podložna fenomenu *shear locking*.

ZAHVALA

Istraživanje koje je rezultiralo ovim radom je provedeno u sklopu znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025: “Unapređivanje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama ” koji je financijski podržalo Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

Literatura

- [1] Bathe, K.J., “Finite Element Procedures”, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [2] Borri, M., Bottasso, C., “An intrinsic beam model based on a helicoidal approximation—Part II: Linearization and finite element implementation”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, No. 13, 1994, str. 2291–2309.
- [3] Jelenić, G., Crisfield, M., “Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 171, No. 1-2, 1999, str. 141–171.
- [4] Jelenić, G., Papa, E., “Exact solution of 3D Timoshenko beam problem using linked interpolation of arbitrary order”, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, No. 2, 2009, str. 171–183.
- [5] Papa Dukić, E., Jelenić, G., Gaćeša, M., “Configuration-dependent interpolation in higher-order 2D beam finite elements”, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 78, 2014, str. 47–61.
- [6] Reissner, E., “On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem”, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 23, No. 5, 1972, str. 795–804.
- [7] Simo, J., Vu-Quoc, L., “A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 58, No. 1, 1986, str. 79–116.

Autori

Edita Papa Dukić, Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265957/265955, e-mail: edita.papa@uniri.hr/gordan.jelenic@uniri.hr

MIKRO MODELI UOKVIRENOG ZIDA S OTVORIMA







Penava, D., Sigmund, V. i Kožar, I.

Sažetak: Uokvireno zide s otvorima nedovoljno su istraženi konstruktivni elementi između ostaloga zbog različitih mogućnosti u mjerama, vrsti i smještaju otvora. Mikro modelima nastoji se na osnovu postojećih ispitivanja uraditi dopunu istih. Putem računalnog programa ATENA izrađeni su modeli ispitnih uzoraka uokvirenog zida s otvorima s čijim odgovorom su uslijed cikličkog opterećivanja modeli usklađeni. Zbog zahtjeva za poznavanjem velikog broja materijalnih svojstava, podaci koji nisu dobiveni ispitivanjem, nadomješteni su teorijskim vrijednostima. Bez prethodnog usklađivanja s ispitivanjima, mikro modeli nisu na razini koja bi omogućila njihovu primjenu.

Ključne riječi: mikro model, uokvireno zide, otvor, kalibracija

1 UVOD

Uokvireno zide s otvorima nedovoljno su istraženi konstruktivni elementi između ostaloga zbog različitih mogućnosti u mjerama, vrsti i smještaju otvora. Primjenom metode konačnih elemenata i pojednostavljenih mikro modela vršeno je usklađivanje s ispitivanjima u svrhu proširenja istraživanja. Pojednostavljeni mikro modeli odvajaju svaki zidni element te reške morta čija su svojstva opisana kontaktnim svojstvima. Putem računalnog programa ATENA [1] izrađeni su ravninski modeli uokvirenog zida s otvorima opisanih u [3,6] s čijim odgovorom su uslijed cikličkog opterećivanja modeli usklađeni, a koji su dani u Tab. 1.

Oznaka uzorka	Izgled uzorka	Vrsta i mjere otvora	Smještaj otvora
I/1		Vrata $l_o/h_o=0.35/0.90$ m	U sredini $e_o=l/2=0.90$ m
I/2		Window $l_o/h_o=50.0/60.0$ cm	U sredini $e_o=l/2=0.90$ m $P=0.40$ m
I/3		Vrata $l_o/h_o=0.35/0.90$ m	Otklonjen $e_o=h/5+l_o/2=0.44$ m
I/4		Prozor $l_o/h_o=50.0/60.0$ cm	Otklonjen $e_o=h/5+l_o/2=0.44$ m $P=0.40$ m
III/1		-	-
III/2		-	-

Tab. 1. Pregled ispitivanih uzoraka

Ovime je model bio podvrgnut nužnim prilagodbama uslijed ograničenja matematičkih modela ponašanja materijala. Zbog zahtjeva za poznavanjem velikog broja materijalnih svojstava, podaci koji nisu dobiveni ispitivanjem, nadomješteni su teorijskim vrijednostima u skladu s [5,2], koje su dane u Tab.2. Za materijalna svojstva odabirane su isključivo srednje vrijednosti u skladu s EC8.

Element	Oznaka	Vrijednost	Jedinice	Opis	
Beton okvira	s_{max}	=125	mm	razmak pukotina	
	c_{ts}	=0.4	-	koeficijent očvršćavanja u vlaku	
Zidni element	G_{mub0}/G_{mub0}	=2570/390	N/mm ²	početni modul posmika	
Kontakt morta i zidnog elementa	Pristup 1, 2 i 3	K_{nmb}	= $E_{mub0}b_m/t_{mb}$ =565	N/mm ³	normalna krutost horizontalnih reški
		K_{mb}	= $G_{mub0}b_m/t_{mb}$ =257	N/mm ³	tangencijalna krutost horizontalnih reški
		K_{nh}	= $E_{mub0}h_m/t_{mh}$ =85	N/mm ³	normalna krutost vertikalnih reški
	Pristup 2	K_{mb}	= $G_{mub0}b_m/t_{mb}$ =39	N/mm ³	tangencijalna krutost vertikalnih reški
		f_{0m}	=0,7 (0,35)	N/mm ²	srednja početna posmična čvrstoća zida
		f_{m}	=0,45 (0,2)	N/mm ²	srednja vlačna čvrstoća zida
	Pristup 3	μ_{tm}	=0,8 (0,24)	-	koeficijent trenja
		f_{vlbmb}	=0.065 f_{mub} =1.14	N/mm ²	srednja granična vrijednost posmične čvrstoće

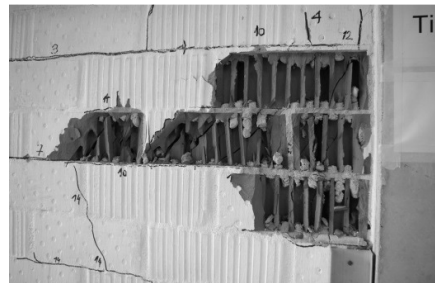
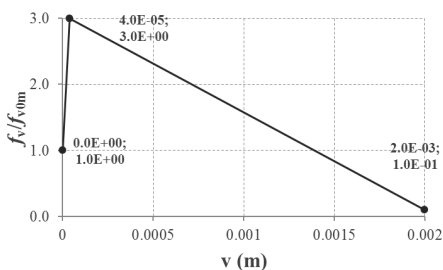
Tab. 2. Bitna svojstva materijala iz teorijskih izvora

2 MIKRO MODELI

Odabrani su teorijski modeli kojima se nastojalo najprikladnije opisati nelinearno ponašanje betona, armature, opeke i morta.

U skladu sa [2,6] za beton okvira i nadvoja odabran je 3DNonLinearCementitious2 model ponašanja materijala zbog mogućnosti predstavljanja zakrivljenih povratnih krivulja uslijed rasterećenja. Uzdužna i poprečna armatura modelirani su putem Menegoto-Pinto modela cikličkog ponašanja materijala. Usvojen je savršen spoj armature i okolnog betona zbog jednostavnosti. Nedostatak krutosti na savijanje i posmik nadoknađen je dodavanjem dodatne površine poprečne armature u vrijednosti pripadne uzdužne u skladu s [4]. Za zidne elemente odabran je SBeta model koji je prikladan za krhki materijal kao što je šuplji glineni blok. Model nema mogućnost uzimanja u obzir ortotropije zidnog elementa, pa je ovaj element predstavljen svojstvima u vertikalnom smjeru.

Reške morta modelirane su putem kontakt elementa nulte debljine, putem tri pristupa, kako je dano u Tab. 2. U drugom pristupu, svojstva su uvećana u odnosu na dobivena ispitivanjem (vrijednosti u zagradi) u skladu s [3,6]. U posljednjem, za razliku od prvog, horizontalne reške dodatno su opisane s korisničkom funkcijom kojom je u obzir uzeto uklinjavanje morta u šupljine zidnog elementa, prema Sl.1.

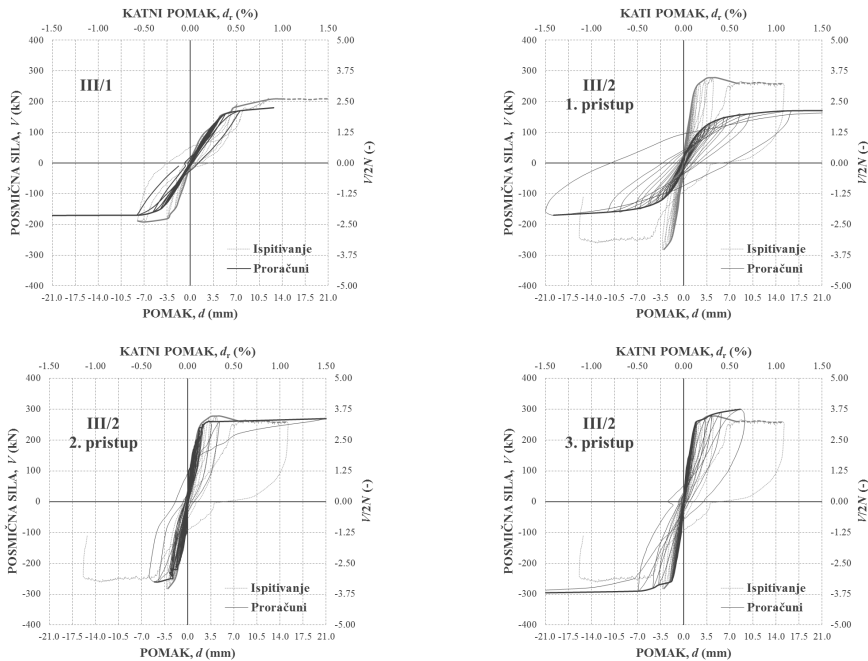


Sl. 1. Funkcija smicanja reške (lijevo) i slom zidnog elementa s uklinjenim mortom (desno)

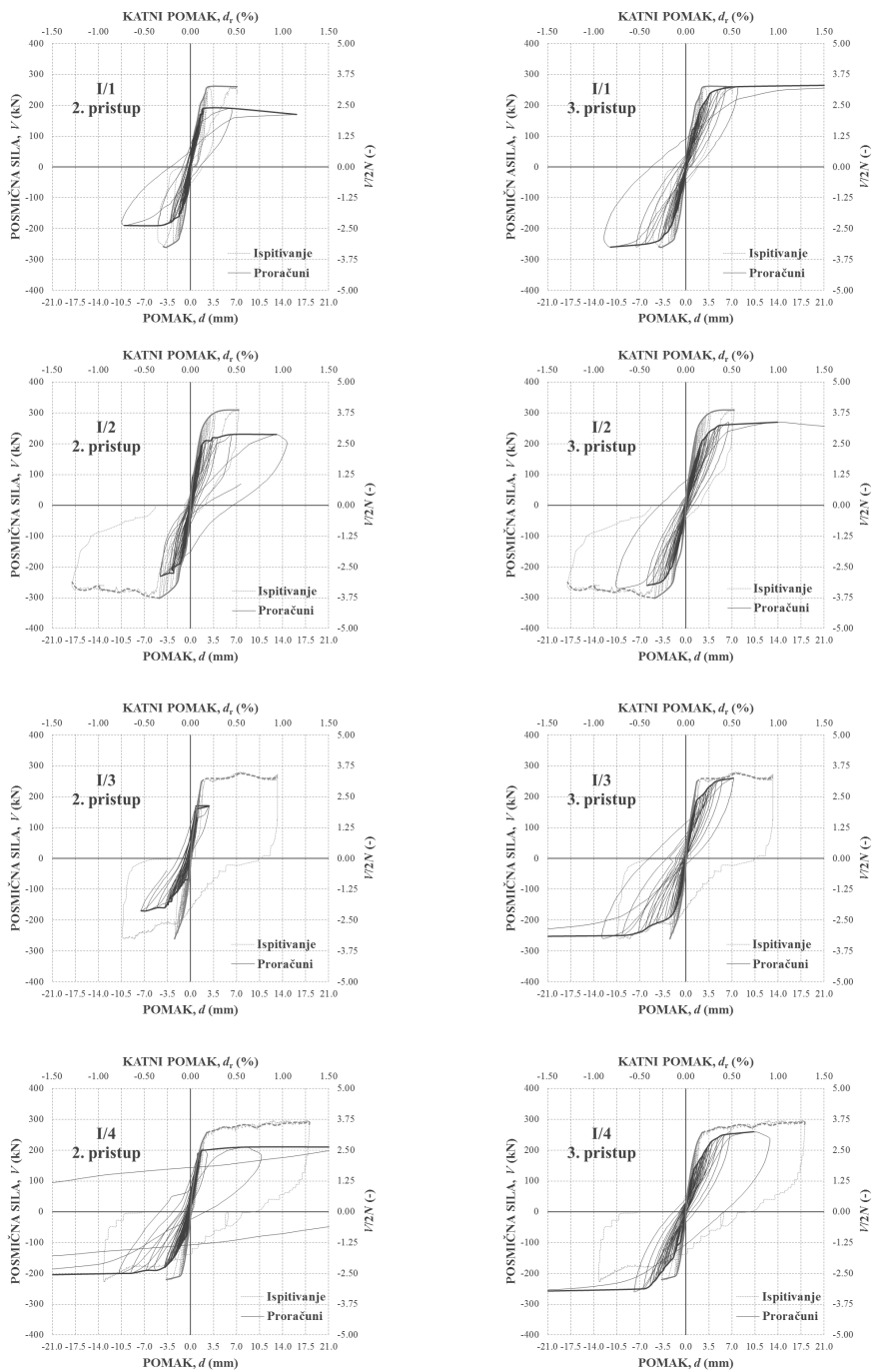
Vršna vrijednost korisničke funkcije u 3. pristupu je srednja granična vrijednost posmične čvrstoće u skladu s EC6, koja predstavlja slom zidnog elementa umjesto kontakta zidnog elementa i morta. Pripadni pomaci dobiveni su sustavnim proračunima metodom pokušaja i pogreške u nedostatku ispitivanja koji bi obuhvatili utjecaj uklinjanja. Okvir, nadvoj i zidni elementi modelirani su ravninskim elementima CCIsoQuad i CCIsoTriangle. Armatura je modelirana CCTruss elementima, dok je za kontakt reški morta s okolnim elementima odabran CCIsoGap. Primijenjeni konačni elementi opisani su u [2]. Odabrana je gustoća mreže konačnih elemenata od 5 cm zbog prihvatljivih rezultata i vremena proračuna. Opterećenje je usvojeno u skladu s [3,6]. Vertikalno stalno i horizontalno cikličko nanošeno je u obliku koncentriranih sila preko modeliranih čeličnih pločica na krajevima stupova i greda. Za rješavanje je odabrana Newton-Raphson metoda.

3 KALIBRACIJA

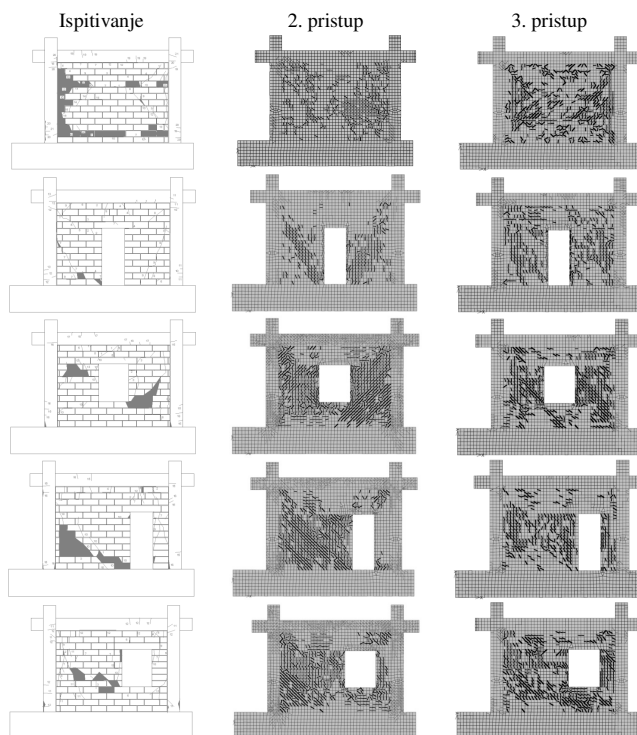
U postupku kalibracije prvo je proveden proračun mikro modela dvaju referentnih uzoraka kako bi se pojednostavio postupak. Za slučaj punog ispuna, provedena su tri pristupa modeliranja reški u skladu s Tab. 2., od kojih su pristup 2 i 3 odabrani za modeliranje modela s otvorima. Rezultati su dani u obliku krivulja odnosa posmična sile V spram pomaka d i katnog pomaka d_t te načina sloma zidanog ispuna, kao što je prikazano na Sl. 2, 3 i 4. Dodatno, rezultati su dani u obliku sekantnih krutosti $K=V/d$ za pripadne katne pomake koji predstavljaju razine oštećenosti zidanog ispuna u skladu s [3,6], a prikazani su u Tab. 3.



Sl. 2. Usporedba rezultata ispitivanja i proračuna uzoraka s otvorima



Sl. 3. Usporedba rezultata ispitivanja i proračuna uzorka s otvorima



Sl. 3. Pukotinsko stanje pri slomu zidanog ispuna uslijed ispitivanja i proračuna

Tab. 3. Usporedba sekantne krutosti ispitnih uzoraka i mikro modela

Uzorak	d_t (%)	Pozitivna strana odgovora					Negativna strana odgovora				
		Isp.	Pristup		Razlika (%)		Isp.	Pristup		Razlika (%)	
			2.	3.	2./isp	3./isp		2.	3.	2./isp	3./isp
I/1	0.10	137	104	95	24%	30%	-145	-108	-105	26%	28%
	0.20	95	53	74	44%	23%	-88	-59	-77	33%	13%
	0.50	33	23	33	30%	0%	-26	-26	-38	0%	-46%
	1.00	-	11	6	-	-	-17	-	-23	-	-33%
I/2	0.10	163	109	100	33%	39%	-150	-126	-107	16%	29%
	0.20	103	60	75	42%	27%	-87	-79	-78	9%	10%
	0.50	42	23	44	45%	-4%	-35	-	-44	-	-26%
	1.00	-	12	19	-	-	-22	-	-	-	-
I/3	0.10	160	164	121	-3%	24%	-131	-61	-112	53%	14%
	0.20	93	60	77	35%	17%	-100	-46	-63	54%	37%
	0.50	37	-	36	-	2%	-40	-21	-34	48%	16%
	1.00	20	-	-	-	-	-18	-	-24	-	-34%
I/4	0.10	142	124	95	13%	33%	-150	-51	-83	66%	45%
	0.20	93	72	68	23%	27%	-96	-51	-61	47%	36%
	0.50	40	25	44	38%	-9%	-47	-25	-39	47%	17%
	1.00	19	17	25	11%	-33%	-	-12	-28	-	-
III/1	0.10	45	42	-	7%	-	-60	-42	-	30%	-
	0.20	34	37	-	-9%	-	-48	-38	-	21%	-
	0.50	22	23	-	-3%	-	-22	-28	-	-29%	-
	1.00	12	14	-	-18%	-	-16	-21	-	-	-
III/2	0.10	151	147	162	3%	-7%	-151	-151	-163	0%	-8%
	0.20	94	83	83	12%	12%	-94	-84	-104	11%	-10%
	0.50	35	54	44	-54%	-25%	-36	-	-42	-	-17%
	1.00	18	12	-	33%	-	-17	-	-34	-	-100%

4 ZAKLJUČAK

U ovom rad prikazan je odabrani mikro model primjenom metode konačnih elemenata koji je usklađen (kalibriran) s rezultatima ispitivanja u svrhu proširenja istraživanja.

Mikro model je prvo kalibriran s referentnim ispitnim uzorcima, a zatim s uzorcima s otvorima pri čemu su korištena tri pristupa. Najprikladnijim, u pogledu usporedbe krivulja posmičnih sila spram pomaka te načina sloma pokazao se pristup s modeliranjem horizontalne reške nakon sloma početne posmične čvrstoće. Isto je vidljivo usporedbom sekantnih krutosti. Zaključeno je da je postavljeni numerički model dobro kalibriran te da su rezultati analiza usporedivi s rezultatima eksperimentalnih istraživanja.

Uočeni su problemi u pogledu modeliranja ortotropnih zidnih elemenata, koji su u nedostatku modela, modelirani kao puni zidni elementi. Ovime je zidani ispun postao podložniji slomu po horizontalnim reškama morta.

Mikro modeli nisu na razini koja bi omogućila njihovu izravnu uporabu, stoga ih je nužno uskladiti s eksperimentalnim rezultatima.

Literatura:

- [1] Cervenka Consulting Ltd., "ATENA ver. 4.3.1.0", računalni program, Cervenka Consulting Ltd., Prag, 2012.
- [2] Cervenka, V., Jendele, L., Cervenka, J., "ATENA Program Documentation Part 1 Theory", Cervenka Consulting Ltd., Prag, 2012.
- [3] Penava, D., "Utjecaj otvora na seizmički odgovor armirano-betonskih okvira sa zidanim ispunom", Disertacija, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, 2012.
- [4] Pryl, D., Cervenka, J., "ATENA Program Documentation, Part 1 of 1, Troubleshooting Manual", Cervenka Consulting Ltd., Prag, 2013.
- [5] Saneinejad, A., "Non-Linear Analysis of Infilled Frames", Disertacija, Univesrity of Sheffield, 1990.
- [6] Sigmund, V., Penava, D., "Influence of Openings, With and Without Confinement, on Cyclic Response of Infilled R-C Frames — An Experimental Study", Journal of Earthquake Engineering, Vol.18, No.1., 2014, str. 113-146.

Autori:

Davorin Penava, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, 31000 Osijek, tel. 031/374-277, e-mail: dpenava@gfos.hr, web stranica: www.gfos.hr

Vladimir Sigmund, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, 31000 Osijek, tel. 031/374-277, e-mail: sigmund@gfos.hr, web stranica: www.gfos.hr

Ivica Kožar, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-900, e-mail: ivicak@gradri.hr, web stranica: www.gradri.uniri.hr

KRUTOST I ČVRSTOĆA SEGMENTA KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA PRI MONTAŽI I TRANSPORTU

Pustaić, M., Wolf, H. i Pustaić, D.

Sažetak: U radu se razmatraju problemi krutosti i čvrstoće, tj. određivanje pomaka i unutarnjih sila (naprezanja), jednog segmenta kućišta statora hidrogeneratora opterećenog vlastitom težinom. Pri tome se segment kućišta slobodno oslanja na podlogu, ili je obješen na čeličnu užad. Na takvu proračunsku shemu svodi se proračun unutarnjih sila i pomaka segmenta statora velikih hidrogeneratora pri njihovom transportu, montaži i pri oslanjanju segmenta na podlogu pri ulaganju statorskog namota. U analizi su korištene analitičke metode. Analitički izrazi za unutarnje sile i pomake izvedeni su potpuno egzaktno, primjenjujući energijske metode (drugi Castiglianov teorem). Rezultati su dani tablično te u obliku dijagrama.

Ključne riječi: Segment kućišta statora hidrogeneratora, krutost i čvrstoća segmenta, pomaci i unutarnje sile, analitičke metode, Castiglianovi teoremi.

1 UVOD

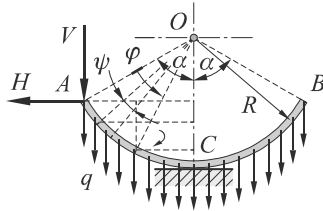
Kućište statora hidrogeneratora je složena strojarska konstrukcija. Po svojoj izvedbi ono predstavlja ortotropnu konstrukciju. U kućište statora ulaže se statorski paket i statorski namot. U eksploataciji električnog generatora, kućište statora opterećeno je okretnim elektromagnetskim momentom, silama jednostranog magnetskog privlačenja i vlastitom težinom, [5], [7]. U ovome radu razmatra se samo utjecaj vlastite težine segmenta kućišta statora na pomake i unutarnje sile. Pri ulaganju statorskog paketa i statorskog namota, kao i pri transportu, segment kućišta statora *simetrično* je opterećen i učvršćen. Utjecaj drugih vrsta opterećenja kućišta statora hidrogeneratora razmatran je u radovima [1], [2], [3], [4], [5], [6] i [7]. Kućišta velikih hidrogeneratora su promjera od 4 m pa sve do 20 m pa čak i više. Da bi se ona mogla transportirati od tvornice do gradilišta hidrocentrale izvode se u *segmentnoj izvedbi*. U gradnji velikih hidrogeneratora broj segmenata statora najčešće iznosi 2, 3, 4, 6 i 8, [7].

2 ODREĐIVANJE UNUTARNJIH SILA I POMAKA SEGMENTA KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA

2.1 Segment kućišta statora slobodno se oslanja na podlogu

Razmatra se problem proračuna čvrstoće, tj. određivanje unutarnjih sila i pomaka, jednog segmenta kućišta statora hidrogeneratora opterećenoga vlastitom težinom. Pri tome se segment slobodno oslanja na podlogu kao na slici 1, ili je obješen na čeličnu užad kao na slici 3. Na takvu proračunsku shemu svodi se proračun unutarnjih sila i pomaka segmenta statora velikih hidrogeneratora pri njihovu transportu, montaži i pri oslanjanju segmenta na podlogu pri ulaganju statorskog namota, [4] i [5]. Potrebno je odrediti unutarnje sile u segmentu (momente savijanja, poprečne i uzdužne sile) kako

bi se mogla provesti analiza naprezanja te provjeriti čvrstoća segmenta statora. Isto tako, često puta je potrebno odrediti vertikalni i horizontalni pomak točke A pod djelovanjem vlastite težine. Zadatak se može riješiti primjenom *drugoga Castiglianova teorema*, [8], tako da u točki A dodamo dvije fiktivne sile, vertikalnu V i horizontalnu H za koje uvrštavamo, nakon provedenoga parcijalnog deriviranja, da su jednake nuli. Uzet ćemo u obzir samo energiju deformiranja od savijanja, a zanemarit ćemo energiju smicanja i energiju od rastezanja, odnosno sabijanja segmenta prstena, [4] i [8].



Sl. 1. Segment kućišta statora hidrogeneratora, opterećen vlastitom težinom, slobodno se oslanja na podlogu. U točki A dodane su dvije fiktivne sile V i H , [5]

Moment savijanja $M(\varphi)$ u proizvoljnu radijalnom presjeku segmenta prstena, pod kutom φ , prema slici 1, iznosi, prema [2]:

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= \int_0^{\varphi} qR [R \sin(\alpha - \psi) - R \sin(\alpha - \varphi)] d\psi + V [R \sin \alpha - R \sin(\alpha - \varphi)] + \\
 &+ H [R \cos(\alpha - \varphi) - R \cos \alpha] = \\
 &= qR^2 \left[+\cos(\alpha - \psi) - \psi \sin(\alpha - \varphi) \right]_{\psi=0}^{\psi=\varphi} + VR [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)] + \\
 &+ HR [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha] = \\
 &= qR^2 [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha - \varphi \sin(\alpha - \varphi)] + VR [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)] + \\
 &+ HR [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha], \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha
 \end{aligned} \tag{1}$$

Na osnovi analitičkog izraza (1) izračunate su vrijednosti momenata savijanja u segmentu kućišta statora i te vrijednosti su prikazane u obliku dijagrama na slici 2. Vidi se da se maksimalne vrijednosti momenata savijanja pojavljuju u točki oslanjanja segmenta na podlogu te je to ujedno i opasni presjek. Kako je to *presjek simetrije*, onda je poprečna sila u tome presjeku jednaka nuli. Parcijalne derivacije momenta savijanja $M(\varphi)$ po fiktivnim silama V i H jednake su:

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial V} = R [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)], \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial H} = R [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha]. \tag{2}$$

Vertikalni pomak točke A može se naći pomoću *drugoga Castiglianova teorema*, [4] i [8]. Budući da smo proveli parcijalno deriviranje, sada se u podintegralnoj funkciji može uvrstiti da su fiktivne sile V i H jednake nuli, tj. $V = 0$ i $H = 0$. Tako se dobije:

$$w_A = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial V} R d\varphi =$$

$$= \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha q R^2 [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha - \varphi \sin(\alpha - \varphi)] \cdot R [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)] R d\varphi. \quad (3)$$

Nakon integriranja i sređivanja, [10], slijedi:

$$w_A = \frac{qR^4}{EI_y} \left[\frac{1}{4} (\alpha^2 + 9\sin^2 \alpha) + \cos \alpha - 1 - \alpha \cdot \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \right]. \quad (4)$$

Izraz se može kompaktno zapisati na sljedeći način, [4]:

$$w_A = \frac{qR^4}{EI_y} \cdot k_w^A(\alpha). \quad (5)$$

Značenje pomoćne funkcije $k_w^A(\alpha)$ slijedi neposredno usporedbom izraza (4) i (5). U gradnji velikih hidrogeneratorskih statora broj segmenata najčešće iznosi 2, 3, 4, 6 i 8. Tome odgovaraju vrijednosti kuta 2α od 180° , 120° , 90° , 60° i 45° . Zato su vrijednosti pomoćne funkcije $k_w^A(\alpha)$ izračunate samo za tih pet diskretnih vrijednosti kuta α te su prikazane u tablici 1.

Tablica 1. Vrijednosti pomoćne funkcije $k_w^A(\alpha)$ za određivanje vertikalnog pomaka točke A segmenta kućišta statora

α [$^\circ$]	90	60	45	30	22,5
α [rad]	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/8$
$k_w^A(\alpha)$	2.9605e-1	1.0131e-1	3.826e-2	8.54e-3	2.818e-3

Na potpuno analogan način može se odrediti i horizontalni pomak točke A. Može se pisati da je:

$$u_A = \frac{\partial U}{\partial H} = \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial H} R d\varphi =$$

$$= \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha q R^2 [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha - \varphi \sin(\alpha - \varphi)] \cdot R [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha] R d\varphi. \quad (6)$$

Integriranjem i sređivanjem dobije se, [10]:

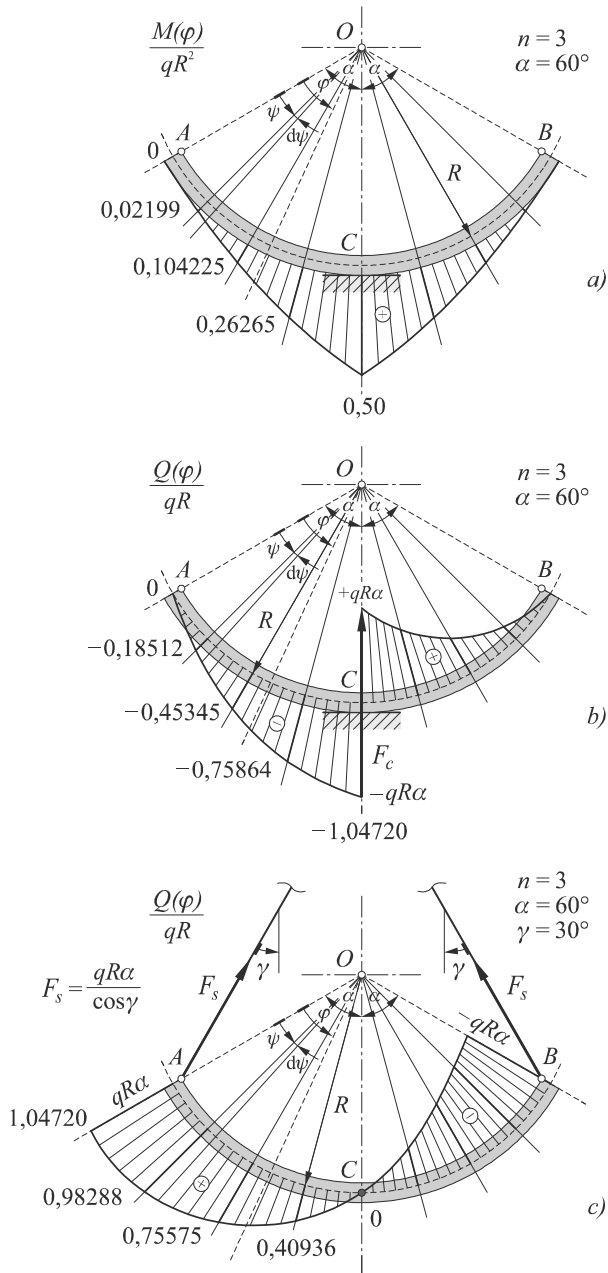
$$u_A = \frac{qR^4}{EI_y} \left[\frac{1}{4} \alpha - \frac{9}{8} \sin 2\alpha + \alpha \cos \alpha (1 + \cos \alpha) \right]. \quad (7)$$

I ovaj se analitički izraz može kompaktno zapisati na sljedeći način, [4]:

$$u_A = \frac{qR^4}{EI_y} \cdot k_u^A(\alpha). \quad (8)$$

Značenje pomoćne funkcije $k_u^A(\alpha)$ slijedi neposredno usporedbom izraza (7) i (8). Uz komentar koji smo malo prije naveli o broju segmenata kućišta statora velikih

hidrogeneratora, vrijednosti pomoćne funkcije $k_u^A(\alpha)$ izračunate su za pet diskretnih vrijednosti kuta α te su prikazane u tablici 2.



Sl. 2. Dijagram momenata savijanja i poprečnih sila u segmentu kućišta statora hidrogeneratora od utjecaja vlastite težine: a) i b) segment se oslanja na podlogu, c) segment se pridržava s dva čelična užeta

Tablica 2. Vrijednosti pomoćne funkcije $k_u^A(\alpha)$ za određivanje horizontalnog pomaka točke A segmenta kućišta statora

α [°]	90	60	45	30	22,5
α [rad]	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/8$
$k_u^A(\alpha)$	3.9270e-1	7.2919e-2	1.9409e-2	2.7700e-3	6.7592e-4

Na slici 2a skiciran je i kotiran dijagram momenata savijanja u segmentu kućišta statora hidrogeneratora u slučaju kada se on oslanja na podlogu. Dijagram raspodjele poprečnih sila za taj slučaj dan je na slici 2b, dok slika 2c prikazuje dijagram raspodjele poprečnih sila u slučaju da je segment kućišta statora obješen na dva čelična užeta.

2.2 Segment kućišta statora obješen je na dva čelična užeta

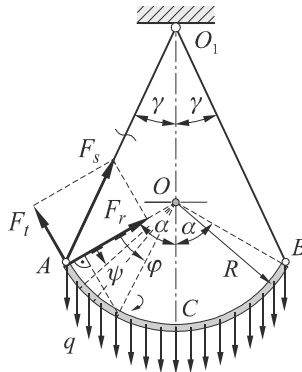
U inženjerskoj praksi često se pojavljuje problem da je potrebno segment kućišta statora objesiti na dva čelična užeta, prema slici 3, te ga podizati, spuštati ili prenositi. Takav se slučaj pojavljuje pri montaži statora hidrogeneratora i pri njegovu transportu, [4] i [5]. Označimo kut među užetima s 2γ kao na slici 3. Ukupna težina cijeloga statora iznosi F_G pa će jednoliko raspodijeljeno kontinuirano opterećenje od vlastite težine biti jednako $q = F_G/2R\pi$ N/m. Iz uvjeta statičke ravnoteže segmenta odrede se sile u užetima te iznose:

$$F_s = \frac{qR\alpha}{\cos\gamma}, \quad (9)$$

dok će *radijalna* i *tangencijalna* komponenta sile biti jednake:

$$F_r = F_s \cos(\alpha - \gamma) = qR\alpha \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos\gamma}, \quad (10)$$

$$F_t = F_s \sin(\alpha - \gamma) = qR\alpha \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos\gamma}.$$



Sl. 3. Segment kućišta statora hidrogeneratora, opterećen vlastitom težinom i obješen na dva čelična užeta, [5]

Odredimo moment savijanja u proizvoljnu radijalnom presjeku segmenta statora pod kutom φ . Analitički izraz za moment savijanja $M(\varphi)$ sastojat će se od prvog pribrojnika izraza (1) što predstavlja moment savijanja od vlastite težine, te još dva pribrojnika, a to su momenti savijanja od sila F_r i F_t . Imamo, dakle:

$$M(\varphi) = qR^2 \cdot [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha - \varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi)] - F_r R \sin \varphi - F_t (R - R \cos \varphi). \quad (11)$$

U ovome problemu interesantna je analiza radijalnog u_r i tangencijalnoga (cirkularnog) pomaka u_t točke A u kojoj je uže vezano za segment kućišta statora, [5]. Ti se pomaci mogu naći pomoću drugoga *Castiglianova teorema*, [4] i [8], kao:

$$u_{r,A} = \frac{\partial U}{\partial F_r} = \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F_r} R d\varphi, \quad (12)$$

$$u_{t,A} = \frac{\partial U}{\partial F_t} = \frac{1}{EI_y} \int_0^\alpha M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F_t} R d\varphi. \quad (13)$$

Integriranjem i sređivanjem dobiju se pomaci [5], [10]:

$$u_{r,A} = \frac{qR^4}{EI_y} \left\{ \frac{\alpha}{2} [\alpha \cos \alpha + \sin \alpha - \sin 2\alpha + (1 + \alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha - 2 \cos \alpha) \cdot \operatorname{tg} \gamma] - \frac{1}{4} (\alpha \sin \alpha + 4 \cos^2 \alpha + \alpha^2 \cos \alpha - 4 \cos \alpha) \right\}. \quad (14)$$

Izraz se može sažeto zapisati u obliku, [4]:

$$u_{r,A} = \frac{qR^4}{EI_y} \cdot k_{u_r}^A(\alpha, \gamma). \quad (15)$$

Tangencijalni pomak $u_{t,A}$ iznosi:

$$u_{t,A} = \frac{qR^4}{EI_y} \left\{ \frac{1}{4} [5\alpha^2 \sin \alpha + \alpha(9 \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha) - (5 + 4 \cos \alpha) \sin \alpha] + \frac{\alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma}{2} [\sin \alpha(1 + 2 \cos \alpha) - 3\alpha \cdot \cos \alpha] \right\}, \quad (16)$$

ili kompaktno, [4]:

$$u_{t,A} = \frac{qR^4}{EI_y} \cdot k_{u_t}^A(\alpha, \gamma). \quad (17)$$

Značenje pomoćnih funkcija $k_{u_r}^A(\alpha, \gamma)$ i $k_{u_t}^A(\alpha, \gamma)$ lako se odredi, uspoređujući izraz (14) s izrazom (15) te onaj (17) s prethodnim (16). Obadvije pomoćne funkcije su izrazito složene i ovisne o trigonometrijskim funkcijama kutova α i γ . Kut α , kako smo već istaknuli, poprima pet diskretnih vrijednosti, dok kut γ najčešće iznosi ili 45° ili 30° . Za te vrijednosti kutova α i γ izračunate su vrijednosti pomoćnih funkcija i prikazane su u tablici 3.

Tablica 3. Vrijednosti pomoćnih funkcija $k_{u_r}^A(\alpha, \gamma)$ i $k_{u_t}^A(\alpha, \gamma)$ za određivanje radijalnoga i tangencijalnog pomaka točke A segmenta kućišta statora hidrogeneratora

$\gamma = 30^0$					
$\alpha [^0]$	90	60	45	30	22,5
α [rad]	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/8$
$k_{u_r}^A(\alpha, \gamma)$	1.1050	2.8336e-1	9.4294e-2	1.8603e-2	5.7657e-3
$k_{u_t}^A(\alpha, \gamma)$	7.1690e-1	1.1303e-1	2.7504e-2	3.5550e-3	8.2140e-4
$\gamma = 45^0$					
$k_{u_r}^A(\alpha, \gamma)$	1.6264	3.7341e-1	1.1772e-1	2.1895e-2	6.5647e-3
$k_{u_t}^A(\alpha, \gamma)$	1.0489	1.4872e-1	3.4313e-2	4.1830e-3	9.3512e-4

3 ZAKLJUČAK

U radu su razmatrani problemi čvrstoće i krutosti segmenta kućišta statora hidrogeneratora opterećenog vlastitom težinom. Pri tome se segment kućišta slobodno oslanja na podlogu, ili je obješen na čeličnu užad. Na takvu proračunsku shemu svodi se proračun unutarnjih sila i pomaka segmenta statora velikih hidrogeneratora pri njihovom transportu, montaži i pri oslanjanju segmenta na podlogu pri ulaganju statorskog namota. Analize su provedene analitičkim, energijskim metodama, [4] i [8], a rezultati su prikazani dijagramski i tablično. Analizom dijagrama momenata savijanja, prema slici 2a, može se zaključiti da je opasni presjek onaj gdje se segment oslanja na podlogu te da se u tome presjeku pojavljuju najveća naprezanja od savijanja. Sličan zaključak vrijedi i za segment kućišta statora koji je obješen na dva čelična užeta. I u tome se slučaju najveća naprezanja pojavljuju u presjeku simetrije C. Znatan dio rada posvećen je određivanju i analizi pomaka pojedinih karakterističnih točaka segmenta kućišta statora, (točke A i B na slikama 1, 2 i 3), [4], [5] i [9]. Analiza pomaka od posebne je važnosti za eksploataciju električnih rotacijskih strojeva. Analiza je provedena pomoću drugoga *Castiglianova teorema*.

Literatura

- [1] Pustačić, M., Wolf, H., Pustačić, D., „Analiza unutarnjih sila i pomaka u kućištu statora hidrogeneratora od okretnog elektromagnetskog momenta“, Četvrti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Slavonski Brod, 2011.
- [2] Pustačić, M., Wolf, H., Pustačić, D., „Utjecaj vlastite težine kućišta statora hidrogeneratora na veličinu unutarnjih sila i pomaka“, Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Terme Jezerčica, Donja Stubica, 2013.
- [3] Pustačić, M., „Analiza naprezanja i pomaka u statoru horizontalnog hidrogeneratora“, Završni rad preddiplomskog studija (mentor: prof. dr. sc. Hinko Wolf), Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.
- [4] Pustačić, D., Tonković, Z., Wolf, H., „Mehanika deformabilnih tijela“, I. dio: „Mehanika konstrukcija“, II. dio: „Čvrstoća elemenata konstrukcija“. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2014.
- [5] Detinko, F.M., Zagorodnaja, G.A., Fastovskij, V.M., „Pročnost i kolebanja električnih mašina“, Energija, Leningrad, 1969.

- [6] Kožešnik, J., „The Mechanics of Electrical Rotating Machines“, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1965.
- [7] Wiedemann, E., Kellenberger, W., „Konstruktion elektrischer Maschinen“, Springer – Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
- [8] Feodosjev, V.I., „Soprotivlenie materialov“, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko – matematičeskoj literaturi, Moskva, 1974.
- [9] Ponomarev, S.D., Biderman, V.L., Liharev, K.K., Makušin, V.M., Malinin, N.N., Feodosjev, V.I., „Raščeti na pročnost v mašinostroenii“, tom I., 1956; II., 1958; III., Mašgiz, Moskva, 1959.
- [10] Bronštejn, I.N., Semendjajev, K.A., „Matematički priručnik za inženjere i studente“, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

Autori:

Maja Pustaić, Monter – Strojarske montaže d.d., 10000 Zagreb, Velimira Škorpika 28, tel. (098) 93 87 255, e-mail: maja.pustaic@gmail.com

Hinko Wolf, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. 01 61 68 168, e-mail: hinko.wolf@fsb.hr

Dragan Pustaić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. 01 61 68 178, e-mail: dragan.pustaic@fsb.hr

METODA USVOJENIH DEFORMACIJA ZA 9-ČVORNE ELEMENTE MINDLINOVIH PLOČA

Ribarić, D.

Sažetak: Ovdje je prikaz novog 9-čvornog četverostraničnog elementa za analizu umjereno debelih i tankih ploča po Mindlinovoj teoriji. Deformacija smicanja unutar elementa interpolirana je direktno izrazom koji je linearan u glavnom prirodnom smjeru i kvadratan u sporednom, umjesto da je derivirana iz polja pomaka i rotacija kao u standardnoj metodi pomaka. Pri tome stupnjevi slobode ostaju čvorni pomaci i čvorne rotacije, a ne novi parametri smicanja kao u mješovitoj metodi. Matrica krutosti elementa se zbog toga izvodi jednako kao i za elemente opisane standardnim interpolacijama pomaka i rotacija, minimiziranjem ukupne potencijalne energije. Ovdje su prikazani rezultati ponašanja novog elementa, prednosti i nedostaci u odnosu na druge konačne elemente razvijene na konceptu samo interpoliranih pomaka i rotacija.

Ključne riječi: Mindlinova teorija ploča, konačni elementi, vezana interpolacija, metoda usvojenih deformacija smicanja

1 UVOD

Za modeliranje umjereno debelih ploča po Mindlinovoj teoriji, metoda usvojenih deformacija primjenjena na konačne pločaste četverostranične elemente s po četiri čvora, pokazala je dobre rezultate po brzini i stabilnosti konvergencije točnome rezultatu različitih modela ploča [1,2,5].

S druge strane 9-čvorni četverostranični elementi bazirani na vezanoj interpolaciji polja pomaka i polja rotacija pokazali su se uspješnima u opisivanju složeno distordiranih mreža sa zakrivljenim stranicama [3].

Ovdje se metoda usvojenih deformacija želi primjeniti i na 9-čvornim četverostraničnim elementima, tako da se funkcija deformacija smicanja unutar domene elementa reducira na minimalni polinomni stupanj, jer je to preduvjet izbjegavanja efekta „lockinga“, posebno kod rijetkih mreža čvorova. Također, parametri koji opisuju smicanje ostaju čvorni pomaci i rotacije, čime su zadovoljeni kriteriji stabilnosti („count conditions“), a matrica krutosti elementa može biti izvedena minimiziranjem funkcionala ukupne energije konačnog elementa.

2 MINDLINOVA TEORIJA PLOČA

Mindlinova teorija opisuje umjereno debele i u krajnjem slučaju tanke ploče, tako da povezuje transverzalni pomak srednje ravnine modela (w) i rotacije presjeka ploče oko dva koordinatna smjera (θ_x, θ_y) s deformacijom smicanja slijedećim poznatim izrazima

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} w = \mathbf{e}\boldsymbol{\theta} + \nabla w. \quad (1)$$

Istovremeno zakrivljenost deformirane ravnine ovisna je samo o rotacijama presjeka ploče

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \quad (2)$$

te se konstitutivne jednadžbe u slučaju izotropno linearno elastičnih ploča, izvode za definirane materijalne veličine Youngovog modula (E), Poissonova koeficijenta (ν) i iz njih izvedenog modula smicanja (G), te faktora korekcije smicanja (uobičajeno $k=5/6$), u formi

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma} = \mathbf{D}_s(\mathbf{e}\boldsymbol{\theta} + \nabla w) \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}_b \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \quad (4)$$

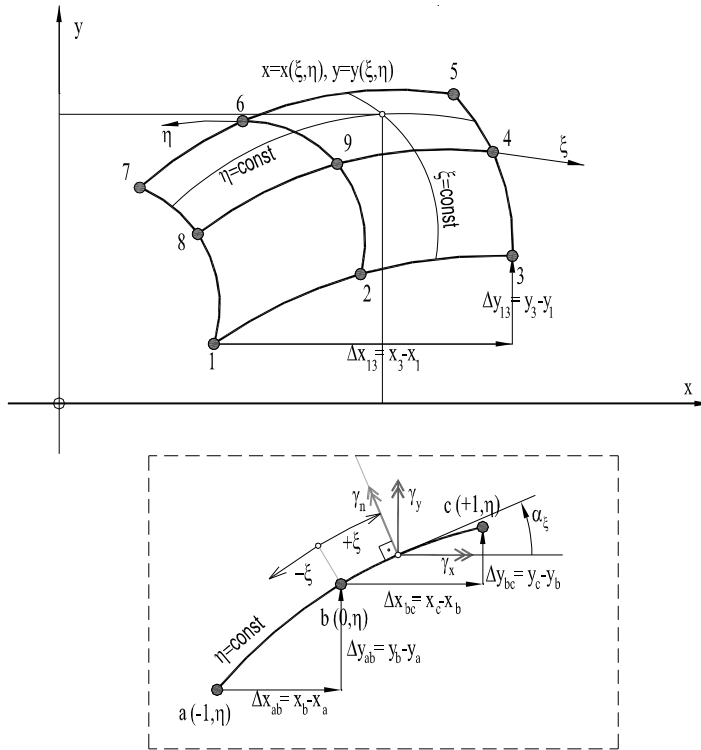
t je u gornjim izrazima debljina ploče, S_x i S_y rezultante naprezanja smicanja, M_x , i M_y rezultante momenata od normalnih naprezanja, odnosno M_{xy} tangencijalnih naprezanja u pripadajućim presjecima ploče.

3 VEZANA INTERPOLACIJA ZA DISTORDIRANI 9-ČVORNI ELEMENT

Da bi 9-čvorni pločasti element mogao zadovoljiti stanje čistog savijanja na „patch-testu“ u prizvoljno distordiranoj formi, dokazano je [3] da mora imati interpolacijski izraz za transverzalni pomak w bi-kvartične polinomne forme u prirodnim koordinatama, a da pri tome interpolacijski izrazi za rotacije presjeka (θ_x, θ_y) mogu ostati bi-kvadratni polinomi. Proširenje interpolacije pomaka do tražene forme izvodi se uvođenjem 16 dodatnih „bubble“ internih stupnjeva slobode.

Kako se deformacije smicanja (1) izvode iz interpolacija pomaka i rotacija, smicanja svakog od dva prirodna smjera (Sl.1.) postaju kubne funkcije po glavnom smjeru i kvartične po sporednom. Ravnoteža momenata ploče sa silama smicanja uvjetuje nižu razinu polinoma smicanja u odnosu na polinome dobivene iz (2), pa je to razlog efekta „lockinga“ u situaciji kad debljina ploče teži tankom limitu (Kirchhoffova teorija ploča). Stoga je poželjno reducirati razinu polinoma deformacije smicanja, a to se može izvesti dijelom izborom „bubble“ parametara tako da

eliminiraju polinomne članove trećeg i drugog reda u glavnom prirodnom smjeru, ostavljajući samo linearnu promjenu. Tako se formulira nova interpolacija za pomake koju nazivimo vezana interpolacija, jer ona u polje pomaka uvodi rotacijske stupnjeve slobode.



Sl. 1. Distortirani 9-čvorni četverostranični pločasti element – odnos između globalnih i prirodnih koordinata

Na primjer, izraz za deformaciju smicanja uzduž stranice 1-2-3 elementa u prirodnim koordinatama ima linearnu formu (5) zavisnu od prirodne varijable ξ , a pri $\eta = -1$.

$$\gamma_{123,\xi} = \left\{ \frac{w_3 - w_1}{2} + \frac{1}{3} \left[(\theta_{y1} - 2\theta_{y2} + \theta_{y3}) \frac{\Delta x_{13}}{4} - (\theta_{x1} - 2\theta_{x2} + \theta_{x3}) \frac{\Delta y_{13}}{4} + \frac{\theta_{y3} - \theta_{y1}}{2} (\Delta x_{23} - \Delta x_{12}) - \frac{\theta_{x3} - \theta_{x1}}{2} (\Delta y_{23} - \Delta y_{12}) \right] + \right. \\ \left. + \xi \left(w_1 - 2w_2 + w_3 + (\theta_{y1} - 2\theta_{y2} + \theta_{y3}) \frac{(\Delta x_{23} - \Delta x_{12})}{4} - (\theta_{x1} - 2\theta_{x2} + \theta_{x3}) \frac{(\Delta y_{23} - \Delta y_{12})}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\theta_{y3} - \theta_{y1}) \frac{\Delta x_{13}}{4} - (\theta_{x3} - \theta_{x1}) \frac{\Delta y_{13}}{4} \right) \right\} \frac{1}{\partial \xi} \quad (5)$$

Ovakvom redukcijom polinoma deformacije smicanja obuhvaćen je samo glavni prirodni smjer, dok u sporednom ostaje zarobljena kvartična razina polinoma i ona ostavlja prisutnim problem „lockinga“ kod relativno rijetkih mreža modela konačnih elemenata.

Daljnja redukcija polinoma nije više moguća adekvatnom zamjenom „bubble“ parametara, jer je prethodna redukcija uklonila njih 12, a preostala četiri poprimaju nul-vrijedosti po svim čvornim linijama. Ideja ove analize je da se daljnja redukcija provede usvojenim poljem smicanja koji će u sporednom smjeru imati minimalnu polinomnu razinu kroz tri reducirana smicanja po vezanoj formi sličnoj (5) za svaku od tri čvorne linije. Ta minimalna razina je kvadratna:

$$\gamma_{\xi} = (-\eta) \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \gamma_{123,\xi} + 4 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \left(\frac{1+\eta}{2} \right) \gamma_{894,\xi} + \eta \left(\frac{1+\eta}{2} \right) \gamma_{765,\xi}$$

i

$$\gamma_{\eta} = (-\xi) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \gamma_{187,\eta} + 4 \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \gamma_{296,\eta} + \xi \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \gamma_{345,\eta},$$

Deformacije smicanja u prirodnim smjerovima treba potom transformirati u globalne koordinate.

4 NUMERIČKI PRIMJERI

4.1 „Patch testovi“

Element razvijen metodom usvojenih deformacija smicanja nosi oznaku *Q9-AS* („assumed shear strain“) i najprije je testiran na standardnim „patch“ modelima sa po pet elemenata različitih klasa distordiranosti unutar pravokutne vanjske konture [3]. Na testnom modelu se simulira stanje konstantnog prostornog savijanja tako da se zadaju čvorni pomaci i rotacije po konturnim čvorovima mreže, a očekuju točne vrijednosti pomaka i rotacija na unutarnjim čvorovima, te točne vrijednosti naprežanja u svim integracijskim točkama (konstantno M_x , M_y , i M_{xy} , te $S_x = S_y = 0$).

Na razini distordiranosti mreže „0“ i „1“ prema klasifikaciji iz [3] novi element ispunjava gornje zahtjeve, te se stoga *Q9-AS* može smatrati konzistentnim i stabilnim da može aproksimirati točno rješenje svakog modela ako dimenzije elemenata u mreži postaju sve manje, a mreža gušća. Element pokazuje vrlo dobre rezultate i kod distordiranosti razine „2“ [3], ali samo za umjereno debele ploče, dok kod tankih ploča odstupanja od točnih traženih vrijednosti rastu s veličinom distordiranosti srednjih čvorova stranica.

4.2 Kvadratna upeta ploča

Za ilustraciju najvrijednijih mogućnosti novog elementa *Q9-AS* modelirana je kvadratna ploča s upetim osloncima po konturi i opterećena jednolikim pritiskom. Raspon ploče je $L=10.0$, Youngov modul je $E=10.92$, Poissonov koeficijent je $\nu=0.3$, a pritisak ima intenzitet $q=1.0$. Pri tome je varirana debljina ploče od $t=1.0$ ($L/t=10$), što odgovara relativno debeloj ploči, do $t=0.01$ ($L/t=1000$), što odgovara vrlo tankoj ploči. Uz to analiziran je i utjecaj broja integracijskih točaka na kontrolne rezultate – pomak središnjeg čvora mreže i moment savijanja u integracijskoj točki nablížoj središnjem čvoru. Normirani rezultati dati su u Tablicama 1. i 2. za dva odnosa raspona i debljine ploče, te za broj integracijskih (Gaussovih) točaka, odnosno za usporedni konačni element *Q9-U3* [4] razvijen na vezanoj interpolaciji polja pomaka i rotacija.

Po kontrolnim veličinama iz Tablica 1. i 2. može se zaključiti da je novi konačni element konzistentan i stabilan pri konvergenciji, da konvergira nešto bolje od *Q9-U3* u oba slučaja i da zahtjeva manji broj integracijskih točaka za jednako točno rješenje.

Razlika u vrijednostima momenata, više je posljedica položaja najbliže Gaussove točke sredini ploče nego točnosti metode.

Tablica 1. Upeta kvadratna ploča: normirani pomak i moment na sredini ploče uz pravilnu mrežu elemenata, $L/t = 10$

Gustoća mreže	Q9-AS		Q9-AS		Q9-U3 [4]	
	w^*	$M^*(3 \times 3)$	w^*	$M^*(4 \times 4)$	w^*	$M^*(4 \times 4)$
1x1	0.1748790	3.20288	0.1748790	3.67382	0.1505885	3.65586
2x2	0.1513430	2.39818	0.1513430	2.46309	0.1504650	2.48749
4x4	0.1504777	2.33298	0.1504777	2.34710	0.1504383	2.35333
8x8	0.1504602	2.32285	0.1504602	2.32623	0.1504581	2.32785
16x16	0.1504623	2.32069	0.1504623	2.32152	0.1504622	2.32193
32x32	0.1504625	2.32016	0.1504625	2.32037	0.1504625	2.32047
Ref. [5]	0.1499	2.31	0.1499	2.31	0.1499	2.31

Tablica 2. Upeta kvadratna ploča: normirani pomak i moment na sredini ploče uz pravilnu mrežu elemenata, $L/t = 1000$

Gustoća mreže	Q9-AS		Q9-AS		Q9-U3 [4]	
	w^*	$M^*(3 \times 3)$	w^*	$M^*(4 \times 4)$	w^*	$M^*(5 \times 5)$
1x1	0.1540948	3.30430	0.1540948	3.85260	0.0002699	0.00808
2x2	0.1276116	2.37110	0.1276116	2.43638	0.0991833	2.03701
4x4	0.1265942	2.30284	0.1265942	2.31637	0.1211225	2.24156
8x8	0.1265380	2.29310	0.1265380	2.29631	0.1262063	2.29204
16x16	0.1265347	2.29113	0.1265347	2.29192	0.1265273	2.29216
32x32	0.1265345	2.29067	0.1265345	2.29086	0.1265343	2.29096
Ref. [5]	0.1265319	2.29051	0.1265319	2.29051	0.1265319	2.29051

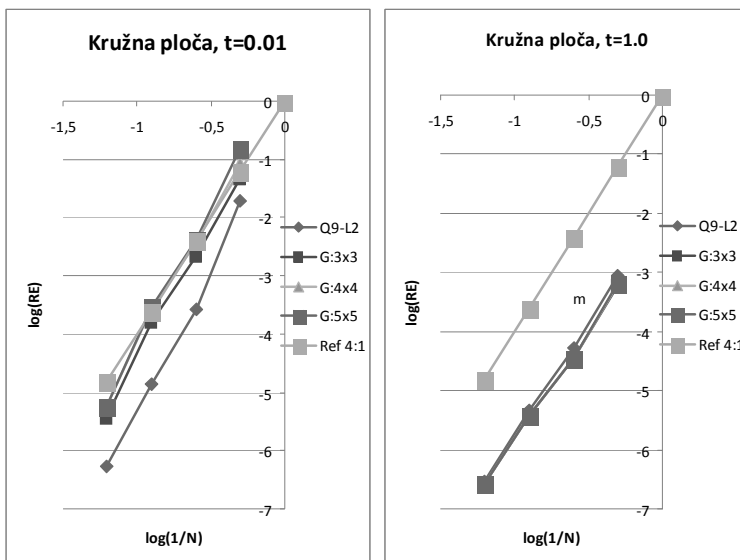
4.3 Kružna prosto oslonjena ploča

Primjer kružne ploče je zanimljiv zbog toga što im se model mora opisati čvornim mrežama koje su distordirane, a po kružnoj liniji ruba i oslanjanja, razina distorzije mora biti kvadratna. Također, to je primjer za kojeg postoji točno analitičko rješenje, pa se može izračunati i greška u deformacijskoj energiji modela [3].

U numeričkom primjeru kružna ploča ima raspon $L=2R=10.0$, Youngov modul je $E=10.92$, Poissonov koeficijent je $\nu=0.3$, a ploča je opterećena jednolikim pritiskom intenziteta $q=1.0$. Promatraju se utjecaji distorzije i debljine ploče (za $t=0.01$ i $t=1.0$) na brzinu smanjenja relativne greške (RE [3]) pri proguščenju mreže čvorova (Sl. 2.).

5 ZAKLJUČAK

Metodom usvojenih deformacija smicanja razvijen je novi 9-čvorni konačni element oznake Q9-AS, koji je i konzistentan i stabilan na različitim testnim numeričkim primjerima.



Sl. 2. Konvergencija relativne greške RE [3] u odnosu na gustoću mreže $1/N$ (N je broj elemenata u radialnom smjeru. Analizirana je i ovisnost o broju integracijskih točaka (G:3x3 do G:5x5) na novom elementu $Q9-AS$, te odnos prema elementu $Q9-L2$ [3]

U usporedbi s elementima razvijenim po metodi vezane intergracije, novi element pokazuje jednako dobre ili nešto bolje rezultate na kontrolnim veličinama kod mreža distordiranih do razine „1“ i kod relativno debelih ploča. Kod više razine distorzije i posebno kod tankih ploča kontrolni rezultati više nisu konkurentni konačnom elementu $Q9-L2$ iz kojega je novi element deriviran. Međutim, $Q9-AS$ ostaje zanimljiv i zbog toga što mu dostaje numerička integracija s 3x3 Gaussovih točaka, za raličku od nužnih 5x5 za vezani element $Q9-L2$.

Literatura:

- [1] Ibrahimbegović, A., “Quadrilateral finite-elements for analysis of thick and thin plates“, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.110, 1993, str. 195-209.
- [2] Lee, P.S., Bathe, K.J. “The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending“, Advances in Engineering Software, Vol.41, 2010, str. 712-728.
- [3] Ribarić, D., Jelenić, G., “Distortion-immune nine-node displacement-based quadrilateral thick plate finite elements that satisfy constant-bending patch test“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.98, No.7, 2014, str. 492-517.
- [4] Ribarić, D., Jelenić, G., “Higher-order linked interpolation in quadrilateral thick plate finite elements“, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 51, 2012, str. 67-80.
- [5] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., “The Finite Element Method. Its Basis and Fundamentals“, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.

Autor:

Dragan Ribarić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić br. 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-917, e-mail: dragan.ribaric@uniri.hr, web stranica: <http://portal.uniri.hr/portfelj/dragan.ribaric@uniri.hr>

IZVOD MATRICE MASA INTERPOLACIJOM OVISNOM O PROBLEMU ZA PROSTORNI TIMOŠENKOV KONAČNI ELEMENT

Rukavina, T. i Jelenić, G.

Sažetak: U ovom radu prikazano je dobivanje matrice masa za prostorni Timošenkov gredni konačni element primjenom interpolacije ovisne o problemu. Takva interpolacija ovisi o konstantama elastičnosti problema, geometrijskim karakteristikama te o opterećenju. Pomoću principa o stacionarnosti ukupne potencijalne energije primjenom ove interpolacije dobiva se matrica krutosti koja se svodi na standardni inženjerski oblik.

U radu je dan izvod matrice masa iz Hamiltonovog principa kao dinamičkog ekvivalenta principu stacionarnosti ukupne potencijalne energije. Ta je matrica masa konzistentna jer su za njeno dobivanje korištene iste interpolacijske funkcije kao za dobivanje matrice krutosti.

Dobivena matrica masa svodi se na standardni inženjerski oblik ako se zanemare posmične deformacije, a korištena je za računanje svojstvenih vrijednosti na primjeru slobodno oslonjene grede i koljenaste konzole. Uspoređene su prirodne frekvencije izračunate pomoću konzistentne, dijagonalne i inženjerske matrice masa te su prikazani rezultati u ovisnosti o broju konačnih elemenata. Također, kod slobodno oslonjene grede rezultati su uspoređeni s egzaktnim rješenjem za prirodne frekvencije Timošenkove grede uz prikaz pripadajuće greške.

Ključne riječi: interpolacija ovisna o problemu, prostorna Timošenkova greda, konzistentna matrica masa, metoda konačnih elemenata

1 UVOD

Interpolacije koje se najčešće koriste u primjeni metode konačnih elemenata na Timošenkovu gredu ne ovise o karakteristikama problema. U radu Papa Dukić i Jelenić [3] predložena je interpolacija ovisna o problemu koja iz kinematičkih i statičkih rubnih uvjeta za problem prostornog Timošenkovog konačnog elementa daje egzaktne interpolacijske funkcije za pomake i rotacije u kojima su sadržane geometrijske i materijalne karakteristike problema. Pomoću takvih interpolacijskih funkcija dobiva se matrica krutosti koja se svodi na standardni inženjerski oblik.

U ovom radu prikazat će se kako se matrica masa koja je dobivena interpolacijom ovisnom o problemu također u potpunosti poklapa s rezultatima iz literature [4], koji predstavljaju poopćenje tzv. inženjerske matrice masa uzimajući u obzir geometrijske i materijalne karakteristike problema. Na primjerima slobodno oslonjene grede i koljenaste konzole prikazat će se primjena tako dobivene matrice masa na računanje prirodnih frekvencija pomoću metode konačnih elemenata.

2 INTERPOLACIJA OVISNA O PROBLEMU

U [3] je prikazano dobivanje interpolacije ovisne o problemu za prostornu Timošenkovu gredu duljine L na osnovu jednadžbi koje su definirane u [2]. Egzaktno statičko rješenje neopterećene grede za polje rotacija koje ovisi o geometrijskim i materijalnim karakteristikama problema je

$$\theta = [\mathbf{R}_{r_0} \quad \mathbf{R}_{\theta_0} \quad \mathbf{R}_{r_L} \quad \mathbf{R}_{\theta_L}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \theta_0 \\ \mathbf{u}_L \\ \theta_L \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{p}, \quad (1)$$

gdje su

$$\mathbf{R}_{r_0} = -\frac{1-\xi^2}{2L} \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_{\theta_0} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \right) - \mathbf{I} \xi - \frac{1}{2} \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \xi^2 \right] \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_{r_L} = \frac{1-\xi^2}{2L} \mathbf{A} \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_{\theta_L} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \right) + \mathbf{I} \xi - \frac{1}{2} \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \xi^2 \right]. \quad (5)$$

Egzaktno rješenje za polje pomaka je

$$\mathbf{u} = [\mathbf{P}_{r_0} \quad \mathbf{P}_{\theta_0} \quad \mathbf{P}_{r_L} \quad \mathbf{P}_{\theta_L}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \theta_0 \\ \mathbf{u}_L \\ \theta_L \end{Bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{p}, \quad (6)$$

gdje su

$$\mathbf{P}_{r_0} = \frac{1-\xi}{2} \mathbf{I} + \xi \frac{1-\xi^2}{12} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{\theta_0} = \frac{L}{8} \left[-\widehat{\mathbf{G}}_1 - \frac{\xi}{3} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 + \xi^2 \widehat{\mathbf{G}}_1 + \frac{\xi^3}{3} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{r_L} = \frac{1+\xi}{2} \mathbf{I} - \xi \frac{1-\xi^2}{12} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_{\theta_L} = \frac{L}{8} \left[\widehat{\mathbf{G}}_1 - \frac{\xi}{3} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 - \xi^2 \widehat{\mathbf{G}}_1 + \frac{\xi^3}{3} \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{A} \widehat{\mathbf{G}}_1 \right]. \quad (10)$$

U gornjim izrazima $\xi \in [-1, 1]$ je prirodna koordinata položaja, \mathbf{p} je vektor čvornih nepoznanica gdje su \mathbf{u}_0 i \mathbf{u}_L vektori pomaka krajeva grede, a θ_0 i θ_L vektori rotacija presjeka u krajevima grede. Matrica \mathbf{A} definirana je na sljedeći način

$$\mathbf{A} = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+\phi_3} \\ 0 & \frac{1}{1+\phi_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gdje su koeficijenti $\phi_2 = \frac{12EI_3}{L^2GA_2}$, $\phi_3 = \frac{12EI_2}{L^2GA_3}$, a EI_2 i EI_3 su krutosti na savijanje te GA_2 i GA_3 krutosti na posmik.

Iz (1) i (6) može se dobiti izraz za ravnotežu grede primjenom principa o stacionarnosti ukupne potencijalne energije:

$$\mathbf{Kp} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

iz čega se dobiva matrica krutosti \mathbf{K} koja se svodi na standardni inženjerski oblik [4]. U jednadžbi (12) \mathbf{F} predstavlja vektor ekvivalentnog opterećenja u čvorovima.

3 IZVOD MATRICE MASA

Matrica masa dobiva se korištenjem Hamiltonova principa kao ekvivalenta principu stacionarnosti ukupne potencijalne energije

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (13)$$

gdje je $V = V_{def} - U$ ukupna potencijalna energija, V_{def} energija deformacije, U rad vanjskih sila, a T kinetička energija:

$$V_{def} = \frac{1}{2} \int_0^L \Gamma^T \mathbf{C}_N \Gamma dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^T \mathbf{C}_M \kappa dx = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{Kp}, \quad (14)$$

$$U = \int_0^L (\mathbf{u}^T \mathbf{n} + \theta^T \mathbf{m}) dx = \mathbf{p}^T \mathbf{R} \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \rho \dot{\theta}^T \mathbf{I}_e \dot{\theta}) dx, \quad (16)$$

gdje je $\mathbf{I}_e = \text{diag}(I_2 + I_3, I_2, I_3)$, $\mathbf{C}_M = \text{diag}(GI_t, EI_2, EI_3)$, $\mathbf{C}_N = \text{diag}(EA, GA_2, GA_3)$, a I_t je torzijska konstanta presjeka. Također, u jednadžbama (14) - (16) Γ i κ su vektori translacijskih i rotacijskih deformacija, a \mathbf{n} i \mathbf{m} su vektori kontinuiranog opterećenja silama i momentima.

Iz izraza (13) dobiva se jednadžba gibanja

$$\mathbf{Kp} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

gdje je \mathbf{M} matrica masa.

Kako je $\xi = \frac{2x}{L} - 1$ te zamjenom $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, izraz za kinetičku energiju postaje

$$T = \frac{L}{4} \int_{-1}^1 (A\rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \rho \dot{\theta}^T \mathbf{I}_e \dot{\theta}) d\xi. \quad (18)$$

Uvrštavanjem izraza (1) i (6), gornja se jednadžba može zapisati kao

$$T = \frac{L}{4} \int_{-1}^1 (A\rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{p}} + \rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{I}_e \mathbf{R} \dot{\mathbf{p}}) d\xi. \quad (19)$$

Podjelom (19) na dva integrala slijedi

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}^T \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\xi \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}^T \frac{\rho L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{R}^T \mathbf{I}_e \mathbf{R} d\xi \dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_T \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_R \dot{\mathbf{P}}, \quad (20)$$

gdje \mathbf{M}_T i \mathbf{M}_R predstavljaju matrice masa za translacijsku i rotacijsku inerciju:

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\xi, \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{\rho L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{R}^T \mathbf{I}_e \mathbf{R} d\xi. \quad (22)$$

Konačno, matrica masa dobiva se zbrajanjem translacijskog i rotacijskog dijela pa se dobiva

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R = \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\xi + \frac{\rho L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{R}^T \mathbf{I}_e \mathbf{R} d\xi. \quad (23)$$

Matrica masa prikazana izrazom (23) naziva se konzistentnom jer je dobivena korištenjem jednakih interpolacijskih funkcija koje su korištene za dobivanje matrice krutosti.

Dobivena matrica masa u potpunosti se poklapa s matricom masa u [4] u slučaju u kojem su uzete u obzir posmične deformacije.

4 PRIMJERI

Matrica masa dobivena interpolacijom ovisnom o problemu u ovom se poglavlju koristi za računanje svojstvenih vrijednosti na primjeru slobodno oslonjene grede i koljenaste konzole. Proračun je proveden u programskom paketu *Wolfram Mathematica*, a bazira se na metodi konačnih elemenata. Dana je usporedba prirodnih frekvencija dobivenih korištenjem dijagonalne, inženjerske i konzistentne matrice masa, a rezultati su prikazani ovisno o broju konačnih elemenata (1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64). Također, kod slobodno oslonjene grede rezultati su uspoređeni s egzaktnim rješenjem za prirodne frekvencije Timošenkovke grede [5] uz prikaz pripadajuće greške. Dijagonalna matrica masa dobivena je tako da se pretpostavi da svaki element ima polovicu svoje mase koncentriranu u svakom čvoru.

4.1 Primjer 1 - Slobodno oslonjena greda

U prvom primjeru radi se o slobodno oslonjenoj gredi duljine $L = 4$, s navedenim elastičnim i materijalnim karakteristikama: $EA = 7.5 \cdot 10^5$, $GA_2 = GA_3 = 2.6 \cdot 10^5$, $EI_2 = 15624$, $EI_3 = 156.24$, $GI_t = 244$, $\rho A = 6.25 \cdot 10^{-2}$, $\rho I_2 = 1.302 \cdot 10^{-3}$, $\rho I_3 = 1.302 \cdot 10^{-5}$.

Rezultati za prvu prirodnu frekvenciju dobiveni korištenjem dijagonalne, inženjerske i konzistentne matrice masa prikazani su u tablici 1.

Iz navedenih rezultata vidljivo je da prirodne frekvencije dobivene korištenjem konzistentne i inženjerske matrice masa s povećanjem broja elemenata brže konvergiraju točnom rješenju nego one koje su dobivene korištenjem dijagonalne matrice masa.

Tablica 1: Primjer 1 - rezultati za prvu prirodnu frekvenciju

1. frekvencija $\omega_1 = 30.83383$						
broj elemenata	Dijagonalna matrica masa		Inženjerska matrica masa		Konzistentna matrica masa	
	ω_1	greška [%]	ω_1	greška [%]	ω_1	greška [%]
1	21.64994	29.78511	34.22934	11.01227	34.22934	11.01227
2	27.97100	9.28471	30.95615	0.39670	30.95658	0.39810
4	30.06496	2.49360	30.84201	0.02652	30.84212	0.02689
8	30.63913	0.63145	30.83438	0.00178	30.83441	0.00188
16	30.78638	0.15389	30.83387	0.00013	30.83388	0.00016
32	30.82344	0.03371	30.83384	0.00001	30.83384	0.00002
64	30.83272	0.00362	30.83383	0.00000	30.83383	0.00000

4.2 Primjer 2 - Koljenasta konzola

U drugom primjeru prikazan je izračun prirodnih frekvencija za koljenastu konzolu (*eng. Elbow Cantilever*). Ovaj je primjer izrađen po uzoru na [1], a radi se o konzoli koja se sastoji se od dva dijela jednakih duljina ($L = 10$) koja su međusobno okomita, sa sljedećim geometrijskim i materijalnim karakteristikama: $EA = GA_2 = GA_3 = 10^6$, $EI_2 = EI_3 = GI_t = 10^3$, $\rho A = 1$, $\rho I_2 = \rho I_3 = 10^{-3}$.

Rezultati za prvu prirodnu frekvenciju izračunati korištenjem dijagonalne, inženjerske i konzistentne matrice masa za koljenastu konzolu prikazani su u tablici 2.

Tablica 2: Primjer 2 - rezultati za prvu prirodnu frekvenciju

1. frekvencija			
broj el.	Dijagonalna matrica masa	Inženjerska matrica masa	Konzistentna matrica masa
2	0.30894	0.37069	0.37086
4	0.35301	0.37055	0.37056
8	0.36602	0.37054	0.37055
16	0.36940	0.37054	0.37054
32	0.37026	0.37054	0.37054
64	0.37047	0.37054	0.37054

U ovom je primjeru također vidljivo da se za konzistentnu i inženjersku matricu masa brže dolazi do konstantne vrijednosti koja predstavlja točno rješenje. Frekvencije izračunate pomoću inženjerske matrice masa gotovo su jednake onima koje su izračunate pomoću konzistentne matrice masa jer su za ove primjere koeficijenti ϕ_2 i ϕ_3 vrlo mali.

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazano je dobivanje matrice masa pomoću interpolacije ovisne o problemu. Takva matrica masa svodi se na standardni inženjerski oblik u graničnom slučaju u kojem koeficijenti koji sadrže elastične konstante teže nuli.

Kroz dva primjera prikazano je korištenje dobivene matrice masa za računanje prirodnih frekvencija grede pomoću metode konačnih elemenata. Dana je usporedba rezultata računanja s dijagonalnom, inženjerskom i konzistentnom matricom masa s obzirom na broj elemenata gdje se uočava da konzistentna i inženjerska matrica masa daju puno bolje rezultate tj. frekvencije brže konvergiraju točnom rješenju.

Literatura

- [1] Jelenić, G., Crisfield, M.A.: "Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain invariant finite element for static and dynamics", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 177, 1999., str.141-171.
- [2] Jelenić, G., Papa, E., "Exact solution of 3D Timoshenko beam problem using linked interpolation of arbitrary order", *Arch. Appl. Mech.* 81(2), 2011., str. 171-183.
- [3] Papa Dukić, E., Jelenić, G., "Exact solution of 3D Timoshenko beam problem: problem-dependent formulation", *Arch. Appl. Mech.* 84(3), 2014., str. 375-384.
- [4] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1968.
- [5] Timoshenko, S.: "Vibration Problems in Engineering", 2nd edition, D. Van Nostrand Company, New York, 1937.

Autori

Tea Rukavina, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265858, e-mail: tea.rukavina@gradri.uniri.hr

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265955, e-mail: gordan.jelenic@gradri.uniri.hr

NUMERIČKO MODELIRANJE BETONA OJAČANOG ČELIČNIM VLAKNIMA

Smolčić, Ž. i Ožbolt, J.

Sažetak: U radu je prikazana eksperimentalna i 3D nelinearna numerička analiza betona armiranog čeličnim vlaknima s kukama. Eksperimentalna analiza provedena je savijanjem zarezanih greda uz kontrolu pomaka s različitim volumnim udjelima vlakana ($V_f=0\%$, 0.5% , 1.0% i 1.5%). Numerička analiza betona armiranog vlaknima provedena je na mezo nivou. Beton armiran vlaknima modeliran je kao kompozit koji se sastoji od: betona, vlakana i veza između betona i vlakana ("interface"). Beton je modeliran mikroravninskim modelom betona korištenjem 3D konačnih elemenata. Čelična vlakna su modelirana 1D štapnim konačnim elementima, koja su slučajno generirana u prostoru. Veza između betona i vlakana ("interface") modelirana je diskretnim bond elementima. Cilj provedene studije je dobivanje efektivne veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakna koja može realno simulirati ponašanje betonskih greda armiranih različitim volumnim udjelima vlakana. Rezultati studije pokazuju da predloženi model može realno predvidjeti otpornost i duktilnost greda armiranih vlaknima. Pokazano je da se porastom volumnog udjela vlakana smanjuje čvrstoća bonda i kapacitet prokliznuća vlakana. Na osnovu eksperimenta čupanja pojedinačnog vlakana, eksperimenta savijanja obične grede s zarezom i numeričke analize provedene na mezo nivou predložena je efektivna veza posmično naprezanje-prokliznuće vlakna za različite volumnske udjele vlakana u betonu.

Ključne riječi: Beton, čelična vlakna, mikroravninski model, posmično naprezanje-prokliznuće.

1 UVOD

U radu se koristi mezo modeliranje betona koje daje bolji uvid u stvarno ponašanje betona armiranog vlaknima. Beton armiran vlaknima promatra se kao kompozit koji se sastoji od tri faze: cementne matrice (beton), vlakana i veze između cementne matrice i vlakana ("interface"). Nelinearna 3D numerička analiza provedena je pomoću programa MASA, koji koristi mikroravninski model betona [2]. U programu MASA može se modelirati i armatura, kao i veza beton-armatura koja je moguća preko diskretnih bond elemenata [1]. Problem slučajnog položaja i orijentacije vlakana u prostoru riješen je pomoću programa Mathcad. Kalibracija parametara mikroravninskog modela betona i parametara diskretnog bond modela dobivena je usporedbom eksperimentalno dobivenih rezultata na betonskim gredama sa i bez vlakana. Za različite volumne udjele vlakana u betonu provedena je parametarska analiza utjecaja bond modela na nosivost grede u svrhu formuliranja zavisnosti između bond modela i volumnog udjela vlakana.

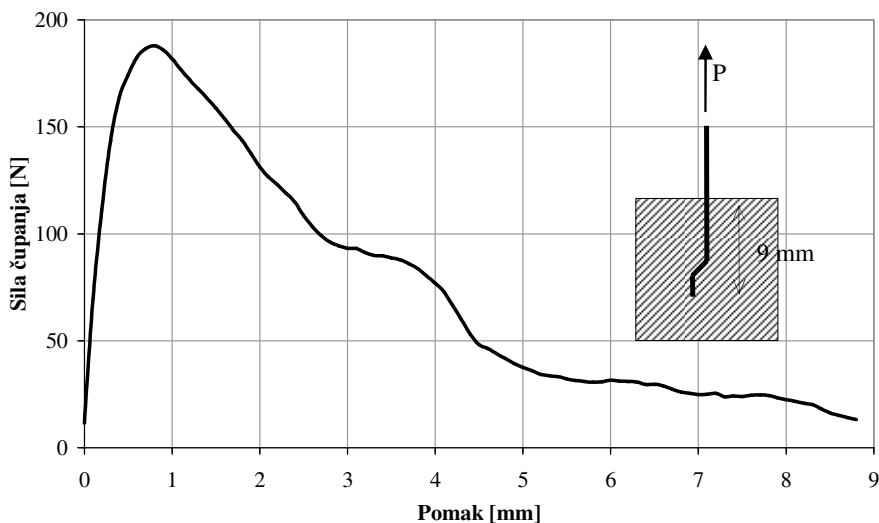
2 EKSPERIMENTALNA ANALIZA

Eksperiment ispitivanja tlačne i vlačne čvrstoće betona proveden je s tri različite mješavine betona bez vlakana. U tablici 1 dane su srednje vrijednosti tlačne i vlačne čvrstoće betona za sve tri mješavine betona.

Tab. 1. Tlačne i vlačne čvrstoće mješavina

mješavina	tlačna čvrstoća f_c [MPa]	vlačna čvrstoća cijepanjem f_t [MPa]
M1	60.94	3.96
M2	74.47	4.38
M3	71.88	4.20

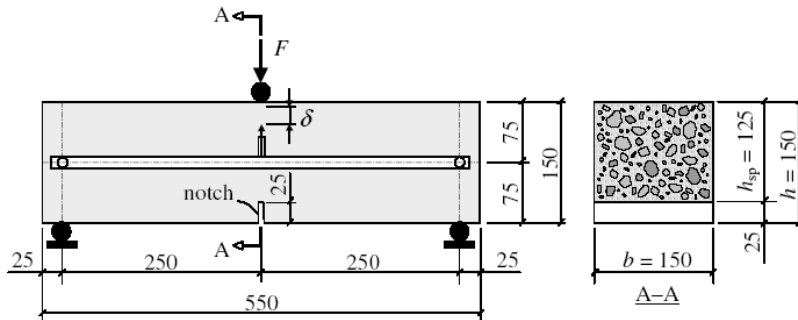
Korištena su čelična vlakna s kukama Dramix RC 65/35 BN, duljina vlakna je $l_f=35$ mm, promjer vlakna $d_f=0.55$ mm, omjer duljine i promjera vlakna je $(l_f/d_f)=65$. Eksperiment čupanja pojedinačnog vlakna proveden je na betonskim prizmama $40 \times 40 \times 160$ mm i to s tri različite mješavine betona. Čelična vlakna usidrena su u sredinu betonske prizme s duljinom sidrenja koja iznosi četvrtinu duljine vlakana ($l_e=l_f/4=35/4 \approx 9$ mm), čelično vlakno je pod kutem od 90° s obzirom na površinu betonske prizme. Na Sl. 1 prikazana je srednja vrijednost sile čupanja za sve tri mješavine betona.



Sl. 1. Eksperimentalni rezultati čupanja pojedinačnog vlakna

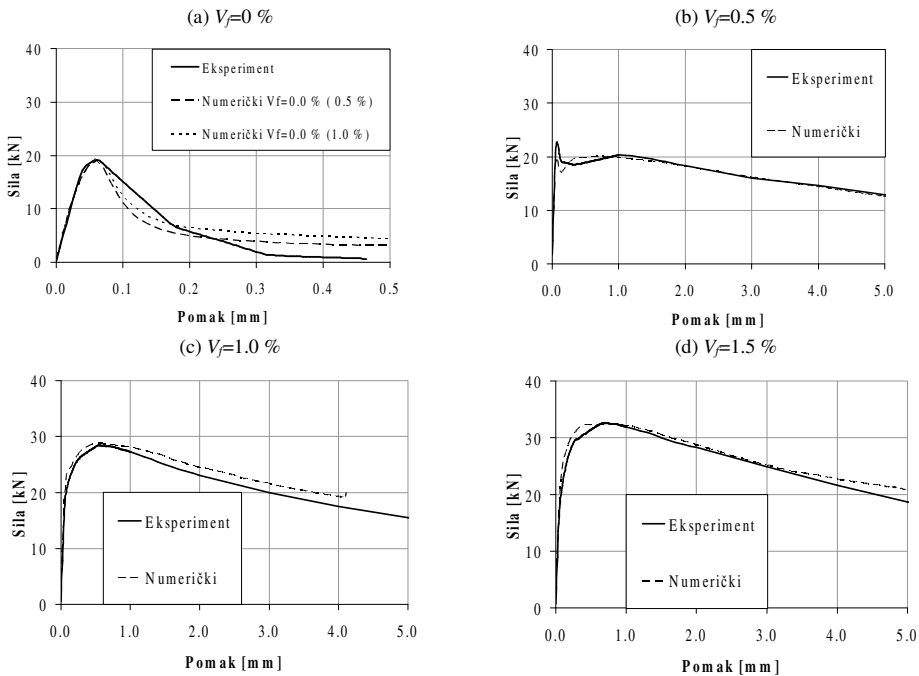
Statičko ispitivanje greda na savijanje pod kontrolom pomaka provedeno je na gredama kvadratnog poprečnog presjeka dimenzija $b \times h=150 \times 150$ mm i duljine $L=550$ mm, statičkog sustava prosta greda raspona $l=500$ mm (Sl. 2), a prema preporukama RILEM-a za konstrukcije od betona armiranog vlaknima TC 162-TDF [3]. Zarez na sredini grede izvodi se nakon 28 dana pomoću mokrog rezanja. Širina zarez u sredini

raspona je 5 mm, dok je duljina zareza 25 mm. Dakle, visina grede na mjestu zareza $h_{sp}=125$ mm. Pri eksperimentu se kontinuirano mjeri sila i pomak neposredno ispod zareza na gredi.



Sl.2. Uzorak za eksperiment statičkog ispitivanja grede na savijanje pod kontrolom pomak [3]

Na Sl. 3 prikazani su eksperimentalno dobiveni dijagrami sila-pomak grede izrađenih od betona mješavine M2 za različite volumne udjele vlakana ($V_f=0\%$, 0.5% , 1.0% i 1.5%). Za beton bez vlakana ($V_f=0\%$) prikazan je pomak do 0.5 mm, dok je za betone s vlaknima ($V_f=0.5\%$, $V_f=1.0\%$ i $V_f=1.5\%$) prikazan pomak do 5.0 mm. Vidljivo je da s porastom volumnog udjela vlakana raste maksimalna sila sloma (nosivost) i duktilnost grede.



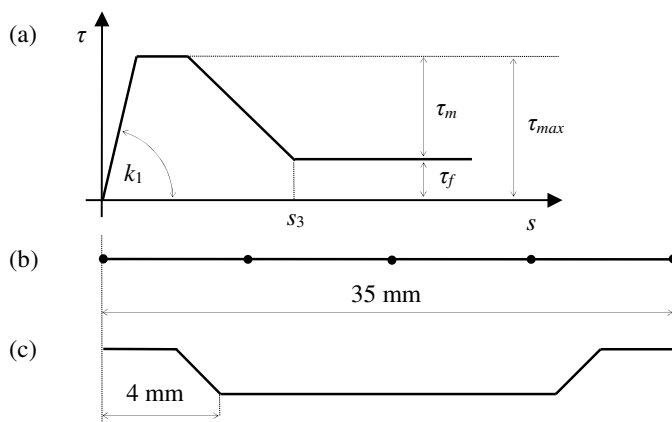
Sl. 3. Usporedba eksperimentalno dobivenog dijagrama (srednja vrijednost) sila-pomak sredine grede i dijagrama sila-pomak sredine grede dobivenog numeričkim proračunom u programu MASA za beton mješavine M2

3 NUMERIČKA ANALIZA

Da bi se smanjila veličina modela i vrijeme proračuna, vlakna su generirana samo u središnjih 150 mm grede. Korištenjem programa Mathcad 2001i za svako vlakno se generira: jedinični vektor smjera vlakna kao slučajna varijabla i težište vlakna kao slučajna varijabla, nakon toga generiraju se čvorovi i štapni konačni elementi za svako vlakno. Svako vlakno je modelirano s četiri štapna konačna elementa i pet čvorova (Sl. 4b). Za definirane štapne konačne elemente vlakana u programu FEMAP 10 mogu se izgenerirati betonski tetraedralni konačni elementi i diskretni bond elementi.

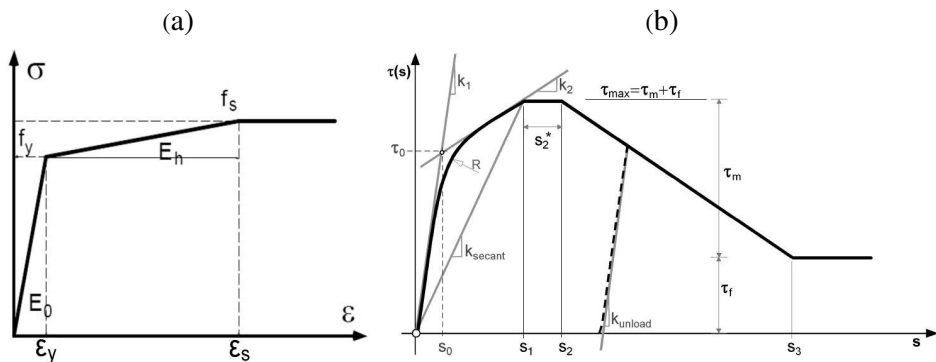
Kao konstitutivni zakon ponašanja betona korišten je tzv. mikroravninski model betona [2]. S fizikalnog motrišta u mikroravninskom modelu mikroravnine predstavljaju smjerove mogućih oštećenja ili osjetljiva mjesta u strukturi betona.

Parametri mikroravninskog modela dobiveni su kalibracijom betonske grede bez vlakana opterećene pri kontroli pomaka, na način da se je uspoređivao eksperimentalno dobiveni dijagram sila-pomak sredine grede i dijagram sila-pomak sredine grede dobiven numeričkim proračunom u programu MASA (Sl. 3a).



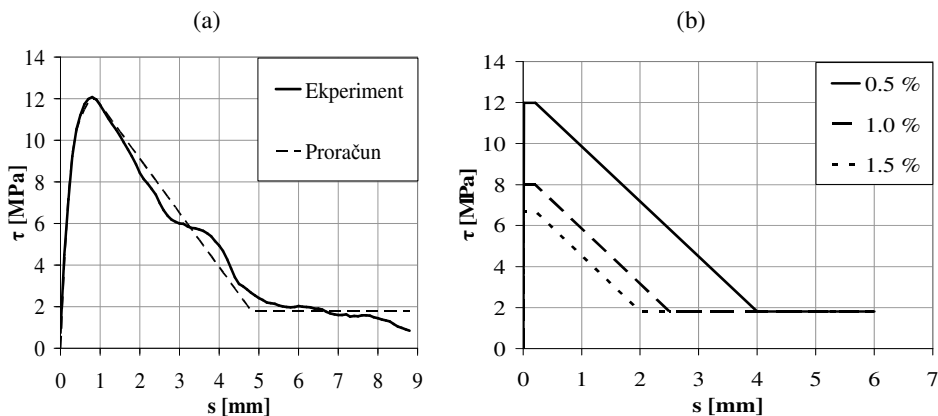
Sl. 4. Način modeliranja vlakna: (a) veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakna (τ - s), (b) štapni konačni elementi i čvorovi vlakna i (c) stvarni oblik vlakna

Mehaničke osobine čeličnih vlakana su: modul elastičnosti $E_s=210$ GPa, Poissonov omjer $\nu_s=0.33$, granica popuštanja $f_y=1.211$ GPa, vlačna čvrstoća $f_s=1.345$ GPa, modul ojačanja $E_h=14.56$ GPa i granična deformacije $\epsilon_s=0.05$ (Sl. 5a). Veza posmično naprezanje-prokliznuće vlakna (τ - s) dobivena je iz eksperimenta čupanja pojedinačnog vlakna (Sl. 1), tako da je sila čupanja podijeljena s oplošjem vlakna u kontaktu s betonom ($d_f l_e \cdot \pi$). Prikaz veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakna (τ - s) dobivene iz eksperimenta čupanja pojedinačnog vlakna dana je na Sl. 6a.



Sl. 5. Konstitutivni modeli za: (a) vlakno i (b) vezu posmično naprezanje-prokliznuće vlakna

Parametri veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakna dobiveni su minimiziranjem greške između eksperimentalno dobivene veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakana i konstitutivnog zakona prikazanog na Sl. 5b. Dobiveni su parametri diskretnog bond modela: $\tau_m=10.17$ MPa, $\tau_f=1.83$ MPa, $k_{secant}=17.129$ MPa/mm, $k_1=41.808$ MPa/mm, $k_2=2.707$ MPa/mm, $s_2^*=0.2$ mm, $s_3=4.8$ mm i $R=3.039$. Usporedba između eksperimentalno dobivene veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakana i konstitutivnog zakona prikazana je na Sl. 6a.



Sl. 6. Veze efektivnog posmičnog naprezanje-prokliznuće vlakna (τ - s) dobivena: (a) iz eksperimenta čupanja jednog vlakna i (b) kalibracijom numeričkog modela s testovima na gredama

Usporedba eksperimentalne i numerička analiza provedena na gredi s volumnim udjelom vlakana 0.5 % i paramterima diskretnog bond modela (Sl. 6a) pokazuje da se greda ponaša previše krto. Postoje dva razloga za takvo neslaganje eksperimenta s numeričkim proračunom: (i) veza posmično naprezanje-prokliznuće vlakana za pojedninačno vlaknao ne uzima u obzir interakciju između vlakakana i (ii) u kritičnome presjeku grede vlakna su opterećena (čupanje) u smjeru koji se u principu ne podudara s njezinim smjerom.

Kalibracijom veličina (τ_{max} i s_3) dobiveni su optimalni parametri veze posmično naprezanje-prokliznuće vlakana za sva tri volumna udjela vlakana i dani su u tablici 2 i Sl. 6b. Pri tome je korištena pojednostavljena veza posmično naprezanja-prokliznuće vlakna (Sl. 4a), kod koje se uzima da je $k_1=k_2=k_{secant}$ kako bi se pojednostavio postupak kalibracije.

Eksperimentalne i numeričke krivulje sila-pomak za grede s volumnim udjelom vlakana od 0% do 1.5% dane su na Sl. 3. Poklapanje između eksperimenta i numeričke analize je vrlo dobro i to za cijelo područje nakon dostizanja nosivosti.

Tab. 2. Parametri diskretnog bond modela za sve modele

volumni udio vlakana	parametri modela					
	τ_m [MPa]	τ_f [MPa]	k_{secant} [MPa/mm]	k_1 [MPa/mm]	s_2^* [mm]	s_3 [mm]
0.5 %	10.17	1.83	1200	1200	0.20	4.00
1.0 %	6.17	1.83	1200	1200	0.20	2.50
1.5 %	4.89	1.83	1200	1200	0.20	2.00

4 ZAKLJUČAK

Provedena analiza pokazala je da predloženi mezo model može realno predvidjeti otpornost i duktilnost greda armiranih čeličnim vlaknima s kukama za različiti volumenski udio vlakana. U budućnosti bi predloženi model trebalo verificirati i s vlaknima drugačijeg oblika i materijala. Zanimljiva bi bila i verifikacija mezo modela pri cikličkom opterećenju.

Literatura:

- [1] Ožbolt, J., Lettow, S. & Kožar I., “Discrete Bond Element for 3D Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures” In Balázs-Bartos-Cairns-Borosnyói (eds), Proceedings of the 3rd International Symposium: Bond in Concrete - from research to standards. Budapest: University of Technology and Economics., 2002.
- [2] Ožbolt, J., Li, Y.J. & Kožar, I., “Microplane Model for Concrete with Relaxed Kinematic Constraint”, International Journal of Solids and Structures, Vol.38, 2001, str. 2683-2711.
- [3] Vandewalle, L. “RILEM TC162-TDF: Test and desig methods for steel fiber reinforced concrete: Bending test final Recommendation”, Materials and Structures, Vol.35, 2002, str. 579-582.

Autori:

Željko Smolčić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3 Rijeka, tel. 051/265-946, e-mail: zeljko.smolcic@gradri.hr, web stranica:

<https://portal.uniri.hr/portfelj/zeljko.smolcic@gradri.hr>

Joško Ožbolt, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3 Rijeka, tel. 051/265-992, e-mail: josko.ozbolt@gradri.hr, web stranica:

<https://portal.uniri.hr/portfelj/josko.ozbolt@gradri.hr>

MODELIRANJE RASPUCAVANJA GREDNIM KONAČNIM ELEMENTIMA S UGRAĐENIM DISKONTINUITETOM

Šćulac, P. i Jelenić, G.

Sažetak: U ovom radu prikazat će se numerički model za analizu raspucavanja u armiranobetonskim ravninskim elementima uslijed monotono rastućeg opterećenja. Razvijen je slojeviti gredni konačni element, koji se temelji na geometrijski točnoj Reissnerovoj grednoj teoriji, odnosno Timošenkovoj teoriji kao njezinoj geometrijski linearnoj formi. U element je ugrađena poprečna pukotina, a mehanizam njenog nastanka i razvoja opisan je koristeći princip mehanike oštećenja zajedno s točnom kinematikom veze između slojeva. Primjena slojeva omogućava praćenje razvoja pukotine po visini poprečnog presjeka. Armaturne šipke modelirane su kao dodatni sloj, unutar betonskog sloja povezan nelinearnim zakonom koji definira naprezanje prijanjanja kao funkciju proklizavanja armature. Za verifikaciju predloženog modela odabrana je slobodno oslonjena greda opterećena s dvije sile u trećinama raspona.

Ključne riječi: slojeviti gredni konačni element, poprečna pukotina, veza između naprezanja prijanjanja i proklizavanja armature, praćenje razvoja pukotina

1 UVOD

Modeliranje mehanizma nastajanja i razvoja pukotina, kao i ponašanje raspucanog betona između pukotina, korištenjem konačnih elemenata složen je proces, koji je vremenski dugotrajan i iziskuje nelinearne proračunske postupke. U odnosu na ravninske ili prostorne konačne elemente, gredni konačni elementi, temeljeni na relativno jednostavnoj grednoj teoriji, imaju znatno smanjen broj stupnjeva slobode, što ih čini numerički efikasnijima.

U nastavku će biti prikazan novorazvijeni gredni konačni element s ugrađenim diskontinuitetom, koji omogućava modeliranje raspucavanja u armiranobetonskim elementima, što uključuje praćenje položaja, širine i dubine pukotina s porastom opterećenja. Ovaj element detaljnije je obrađen u [5,6,7].

2 SLOJEVITI ARMIRANOBETONSKI GREDNI KONAČNI ELEMENT

Element prikazan u nastavku nadogradnja je elementa opisanog u [8], u kojeg je ugrađen armaturni sloj i poprečna pukotina. Konačni je element po visini poprečnog presjeka podijeljen na slojeve. Svaki sloj predstavlja jedan Reissnerov gredni konačni element [4], koji se u slučaju kada rotacije poprečnih presjeka postaju male pojednostavljuje na Timošenkov gredni element. Broj slojeva je proizvoljan, te su oni međusobno povezani krutom vezom, bez mogućnosti proklizavanja ili odvajanja, ali svaki se sloj može slobodno zaokretati neovisno o susjednim slojevima, čime je omogućeno krivljenje poprečnog presjeka. Ova kruta veza između slojeva ujedno

omogućava smanjenje broja nepoznanica problema na način da se pomaci bilo koje točke na gredi zapišu preko pomaka referentnog sloja α i kutova zaokreta pojedinih slojeva [8].

Armaturne šipke modelirane su kao dodatan sloj, konačne površine čija je debljina jednaka nuli, koji se nalazi unutar referentnog betonskog sloja α i može prokliznuti u odnosu na njega. Armaturni i betonski sloj povezani su prikladnim konstitutivnim zakonom naprezanja prijanjanja u funkciji proklizavanja armature (npr. [2]).

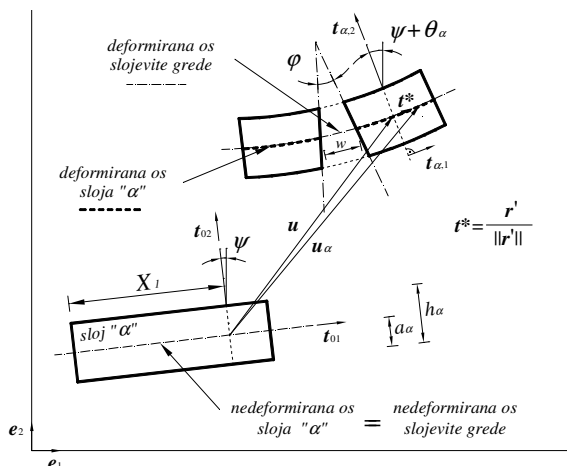
3 UGRADNJA POPREČNE PUKOTINE

Ključan sastojak ovog elementa je ugrađena poprečna pukotina. Budući da beton ima relativno malu vlačnu čvrstoću, na mjestu gdje dolazi do njenog prekoračenja otvara se pukotina. U ovom modelu pretpostavljamo kako se pukotina širi po cijeloj visini sloja u kojem je vlačna čvrstoća (provjerena na sredini sloja) prekoračena. Kako je konačni element slojevit, na ovaj način moguće je modelirati širenje pukotine po visini poprečnog presjeka.

Svaki raspucali sloj uključuje diskontinuitet u polju pomaka i diskontinuitet u polju kuta zaokreta, koji je jednak kutu otvora pukotine (sl. 1). Modeliranje ovih diskontinuiteta ostvareno je obogaćenjem neprekinutih polja pomaka i kuta zaokreta dodatnom prekinutom funkcijom sljedećeg oblika

$$k(X_1) = \begin{cases} -\frac{X_1}{L}, & X_1 < X_{1C} \\ \frac{L - X_1}{L}, & X_1 > X_{1C} \end{cases}, \quad (1)$$

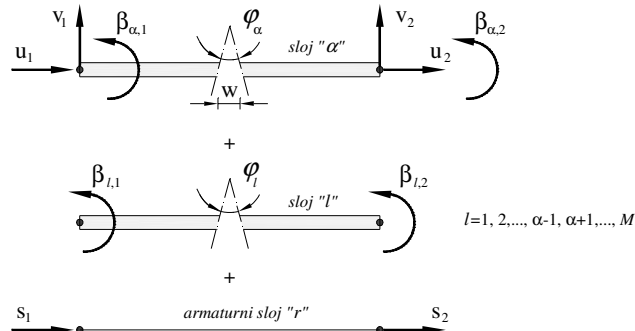
gdje je X_1 koordinata u uzdužnom smjeru elementa, L duljina konačnog elementa, te X_{1C} pretpostavljeno mjesto pukotine.



Sl. 1. Diskontinuitet u polju pomaka i polju kuta zaokreta sloja α

Konačni element izveden je na osnovu standardnih stupnjeva slobode (sl. 2): dvije komponente pomaka u svakom čvoru i po jedan kut zaokreta u pojedinom sloju za svaki čvor, dok su širina pukotine w sloja α i kut otvora pukotine svakog raspucanog

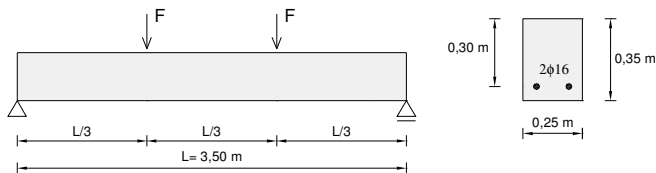
sloja φ_l dodatni stupnjevi slobode. Tome treba pridodati i proklizavanje armaturnog sloja u svakom čvoru elementa. Detaljan opis kinematike takvog elementa pri deformiranju dan je u [5], a opis nelinearnog odnosa između proklizavanja armature i pripadajućih tangencijalnih napreznja dan je u [6,7].



Sl. 2. Stupnjevi slobode slojevitog konačnog elementa za slučaj kada je broj čvorova jednak 2

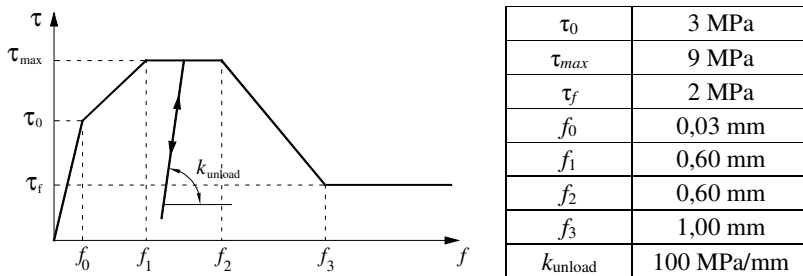
4 NUMERIČKI PRIMJER

Promotrimo slobodno oslonjenu gredu opterećenu s dvije sile F u trećinama raspona (sl. 3), za koju su u [3] dani rezultati eksperimentalnog ispitivanja (dvije grede oznaka B1-a i B1-b), sa sljedećim materijalnim karakteristikama betona: modul elastičnosti 27000 MPa, tlačna čvrstoća 36,3 MPa, vlačna čvrstoća 2,8 MPa, Poissonov koeficijent 0,2 dok je modul elastičnosti čelika 200000 MPa.

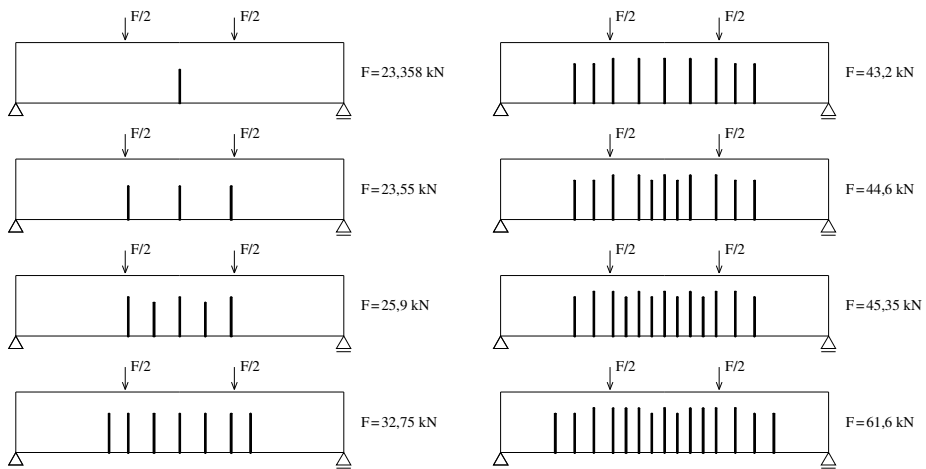


Sl. 3. Geometrijske karakteristike grede [3]

Primijenjen je multilinearini konstitutivni zakon napreznja prijanjanja kao funkcija proklizavanja armature prema [2], uz jedno pojednostavljenje – prvi nelinearni dio krivulje zamijenjen je bilinearnim (sl. 4) kako bi model bio numerički efikasniji.



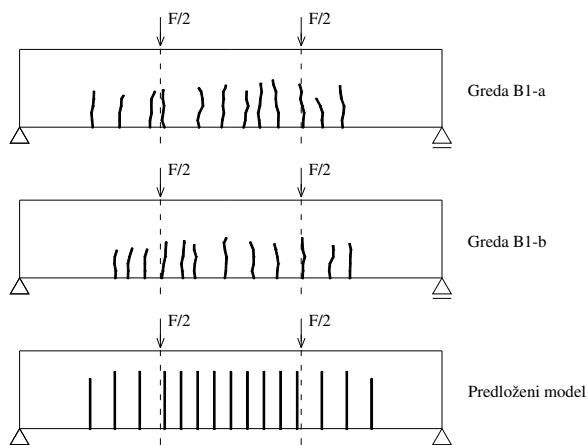
Sl. 4. Konstitutivni zakon napreznja prijanjanja τ u ovisnosti o proklizavanju armature f



Sl. 5. Proces nastajanja i razvoja pukotina

Diskretizirani model grede sadrži 51 dvočvorni element jednake duljine; poprečni presjek podijeljen je u 11 slojeva jednake visine, dok je predviđeni položaj pukotine odabran na sredini elementa. Budući da promatramo opterećenje koje ne prelazi 70% slomnog opterećenja (do te su vrijednosti u [3] dokumentirane pukotine), te za koje naprezanje u armaturi ne prekoračuje granicu popuštanja, pretpostavljamo kako će se i beton i armatura ponašati linearno-elastično.

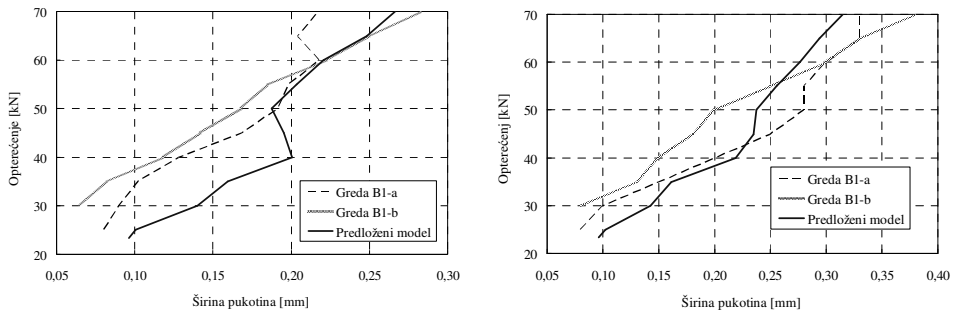
Proces nastajanja i razvoj pukotina s porastom opterećenja možemo pratiti na sl. 5. Prva pukotina nastaje na sredini grede, gdje je, uslijed opterećenja koncentriranim silama i vlastite težine grede, ujedno i najveći moment savijanja. Povećanjem opterećenja postupno nastaju nove pukotine, najprije u području srednje trećine grede, a zatim i izvan tog područja. Zbog simetrije u geometriji, rubnim uvjetima i opterećenju, sve pukotine nakon prve javljaju se u paru.



Sl. 6. Usporedba položaja i dubine pukotina pri opterećenju $F=70$ kN

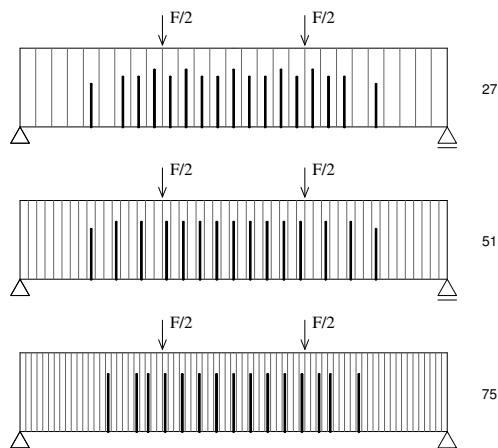
Na sl. 6 dana je usporedba položaja i dubine pukotina predloženog modela s eksperimentalnim rezultatima za vrijednost opterećenja od 70 kN. Možemo primijetiti vrlo dobra poklapanja kako u broju pukotina tako i u širini zone u kojoj se javljaju pukotine.

Srednja i najveća širina pukotina na donjem rubu grede uspoređena je na sl. 7. Uočavamo kako predložena procedura daje zadovoljavajuće rezultate također i za širine pukotina, pri čemu se bolje podudaranje s rezultatima eksperimentalnih ispitivanja javlja za veće vrijednosti opterećenja. Uključenjem kohezivnih naprezanja, tj. uzimanjem u obzir da pukotina može prenositi naprezanje dokle god je dovoljno uska (npr. [1]) možemo očekivati manje vrijednosti širina pukotina, posebno za manje vrijednosti opterećenja, te poboljšanje rezultata.



Sl. 7. Usporedba srednje širine pukotina (lijevo) i najveće širine pukotina (desno) u području srednje trećine grede

U cilju ocjene rezultata u ovisnosti o gustoći mreže u nastavku je provedena analiza s još dvije mreže konačnih elemenata: jedna sadrži 27, a druga 75 elemenata. Na sl. 8 prikazana je usporedba položaja i dubine pukotina pri opterećenju $F=70$ kN za tri promatrane mreže. Bez obzira na gustoću mreže dobivamo vrlo slične rezultate.



Sl. 8. Usporedba pukotina za mreže koje sadrže 27, 51 i 75 konačnih elemenata pri opterećenju $F=70$ kN

5 ZAKLJUČAK

Predloženom formulacijom može se vrlo djelotvorno prikazati nastanak i razvoj poprečnih pukotina, te pratiti promjenu širine pukotina s porastom opterećenja. Na osnovu analiziranog primjera možemo zaključiti kako su dobiveni rezultati vrlo dobre točnosti u usporedbi s rezultatima eksperimentalnih testova, te kako se proces raspucavanja može opisati već i s malim brojem konačnih elemenata.

Razvijena formulacija predstavlja osnovu za vrlo široku primjenu. U nastavku ovog istraživanja planira se uključenje kohezivnih naprezanja, te nelinearnosti u betonu i armaturi, što će omogućiti modeliranje raspucavanja sve do potpunog iscrpljenja nosivosti elementa.

Zahvala

Rezultati prikazani u ovom radu dio su znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025 "Unapređenje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama" financijski poduprtog od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, te potpora Sveučilišta u Rijeci br. 13.05.1.1.01 "Procjena oštećenja i ojačanje građevinskih konstrukcija" i br. 13.05.1.3.06 „Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela“.

Literatura:

- [1] Bažant, Z.P., Planas, J., "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials", CRC Press, 1998.
- [2] "CEB-FIP Model Code 1990 Design Code", Comité Euro-Internacional du Béton, Thomas Telford Ltd London UK, 1993.
- [3] Gilbert, R.I., Nejadi, S.I., "An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads", UNICV Report br. R-434, 2004.
- [4] Reissner, E., "On one dimensional finite-strain beam theory; the plain problem", Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), VOL.23, 1972, str. 795-804.
- [5] Šćulac, P., Jelenić, G., Škec, L., "Kinematics of layered reinforced-concrete planar beam finite elements with embedded transversal cracking", International Journal of Solids and Structures, Vol.51, 2014, str. 74-92.
- [6] Šćulac, P., Jelenić, G., "Modelling cracking in reinforced-concrete beams using beam finite elements with embedded discontinuity", Computational Modelling of Concrete Structures (Proceedings of EURO-C 2014, St. Anton am Arlberg), ur.: Bićanić N., Mang, H., Meschke, G., de Borst, R., CRC Press, 2014, str. 569-578.
- [7] Šćulac, P., Jelenić, G., "Armiranobetonski gredni konačni element s ugrađenom poprečnom pukotinom i nelinearnim odnosom između naprezanja prijanjanja i proklizavanja armature", Zbornik radova Građevinskoga fakulteta Sveučilišta u Rijeci, u tisku.
- [8] Škec, L., Jelenić, G., "Analysis of geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection", Acta Mechanica, Vol.225, 2014, str. 523-541.

Autori:

Paulo Šćulac, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-947, e-mail: paulo.sculac@uniri.hr

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-955, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

MODELIRANJE SLOJEVITIH GREDA S POPUSTLJIVIM KONTAKTOM MEĐU SLOJEVIMA

Škec, L. i Jelenić, G.

Sažetak: U ovom radu je predstavljen model za analizu višeslojnih greda s klizanjem i razmi-
canjem među slojevima. Svaki sloj modeliran je kao zasebna geometrijski linearna ili nelinearna
greda s linearno-elastičnim konstitutivnim zakonom te proizvoljnim položajem referentne osi na
kojoj svaki sloj može primati kontinuirana ili koncentrirana opterećenja. Slojevi se međusobno
povezuju kontaktnim elementima čineći tako višeslojnu gredu čije su nepoznate funkcije po
svakom sloju dvije komponente pomaka i kut zaokreta poprečnog presjeka. Konstitutivni zakon
kontaktnog sloja omogućava raslojavanje (delaminaciju) među slojevima, odnosno potpuni gu-
bitak kontakta među slojevima uslijed prekoračenja graničnih veličina raslojavanja. Kod takvih
modela se razlikuje poprečno (oblik I) i uzdužno (oblik II) raslojavanje, koji se mogu tretirati
kao međusobno nezavisni (gubitkom nosivosti kontakta u jednom smjeru nije nužno izgubljena
nosivost u drugom smjeru) ili zavisni (ukupna nosivost kontakta kombinacija je nosivosti u oba
smjera).

Ključne riječi: višeslojne grede, geometrijski nelinearna analiza, metoda konačnih elementa,
delaminacija

1 UVOD

Termin "modeliranje slojevitih nosača" podrazumijeva, osim modeliranja spregnutih no-
sača, i modeliranje nosača koji su izrađeni od istog materijala te su, u stvarnosti ili samo u
modelu, uslojeni. Posljednji slučaj obrađen je u radu [4], gdje su visoke homogene grede
modelirane kao višeslojni gredni nosači čime se je obuhvatilo i vitoperenje poprečnog
presjeka po visini. Gredni modeli za slojevite nosače u pravilu se razlikuju po broju slo-
jeva (dva, tri ili više) te stupnju složenosti (točnosti) geometrijskih i materijalnih relacija.
U ovom radu predstavljen je model za geometrijski nelinearne višeslojne grede s po-
pustljivim kontaktom među slojevima. Za kontaktni sloj usvojen je model kojeg su
predstavili Alfano i Crisfield [1] i koji omogućava modeliranje mješovite delaminacije
(*Mixed-mode delamination*) kombiniranjem oblika (moda) I (poprečno raslojavanje) i II
(uzdužno raslojavanje).

2 DEFINICIJA PROBLEMA

Zadana je ravna slojevita greda duljine L sastavljena od n slojeva, od kojih svaki sloj
(i) može imati zasebne materijalne i geometrijske karakteristike. Greda je smještena u
ravninu čije su prostorne osi definirane baznim vektorima e_1 i e_2 pa je položaj grede u

prostornom koordinatnom sustavu definiran baznim vektorima

$$\mathbf{t}_{0j} = \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

u nedeformiranom stanju, gdje je j oznaka osi, a ψ nagib uzdužne osi grede (definirane baznim vektorom \mathbf{t}_{01}) u odnosu na horizontalnu os prostornog koordinatnog sustava (definiranu baznim vektorom \mathbf{e}_1). U deformiranom stanju položaj nekog sloja i slojevite grede definiran je baznim vektorima

$$\mathbf{t}_{i,j} = \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \theta_i) & -\sin(\psi + \theta_i) \\ \sin(\psi + \theta_i) & \cos(\psi + \theta_i) \end{bmatrix} \mathbf{e}_j, \quad (2)$$

gdje je θ_i kut zaokreta poprečnog presjeka sloja i .

2.1 Kinematičke jednadžbe

Kinematičke jednadžbe za svaki sloj grede zapisane su u geometrijski egzaktom obliku prema Reissnerovoj grednoj teoriji [3] kao

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \langle \boldsymbol{\epsilon}_i \quad \boldsymbol{\gamma}_i \rangle^\top = \mathbf{\Lambda}_i^\top (\mathbf{t}_{01} + \mathbf{u}'_i) - \mathbf{E}_1, \quad \kappa_i = \theta'_i, \quad (3)$$

gdje su $\boldsymbol{\epsilon}_i$ i $\boldsymbol{\gamma}_i$ uzdužna i posmična deformacija na referentnoj osi i -tog sloja, dok je κ_i zakrivljenost. $(\bullet)'$ označava deriviranje po X_1 .

2.2 Vezne jednadžbe

Kontaktne sloj nema debljine i vezuje se na referentne osi susjednih greda pa se vektor relativnih pomaka nekog kontaktnog sloja α , koji se nalazi između slojeva i i $i + 1$, može zapisati kao

$$\boldsymbol{\delta}_\alpha = \langle \delta_{1,\alpha} \quad \delta_{2,\alpha} \rangle^\top = \mathbf{\Lambda}_0 (\mathbf{u}_{T,\alpha} - \mathbf{u}_{B,\alpha}), \quad (4)$$

gdje su

$$\mathbf{u}_{T,\alpha} = \mathbf{u}_{i+1} + (\mathbf{t}_{02} - \mathbf{t}_{i+1,2}) a_{i+1}, \quad \mathbf{u}_{B,\alpha} = \mathbf{u}_i + (\mathbf{t}_{02} - \mathbf{t}_{i,2}) (a_i - h_i), \quad (5)$$

pomaci gornjeg i donjeg ruba kontaktnog sloja, h_i je visina sloja i , a a_i udaljenost referentne osi sloja i od njegovog donjeg ruba.

2.3 Konstitutivne jednadžbe

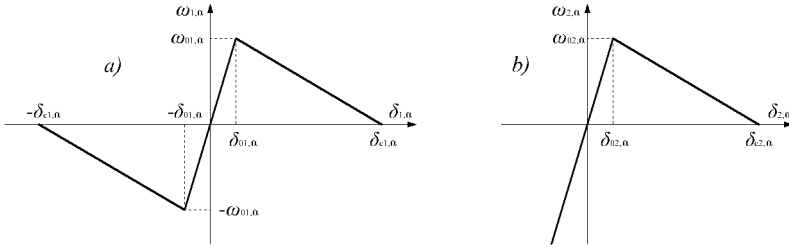
Konstitutivni zakon za svaki sloj grede je linearno-elastičan:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{M}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i A_i & 0 & -E_i S_i \\ 0 & G_i k_i A_i & 0 \\ -E_i S_i & 0 & E_i I_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

gdje su \mathbf{N}_i i \mathbf{M}_i rezultante naprezanja i moment rezultanti naprezanja, A_i , S_i i I_i su površina poprečnog presjeka, statički moment i moment površine 2. reda, a \mathbf{C}_i je konstitutivna matrica za sloj i . Konstitutivni zakon kontaktnog sloja α definiran je za svaki oblik delaminacije posebno prema Sl. 1. Za mjeru oštećenja kod mješovite delaminacije koristi se parametar koji kombinira oštećenja nastala od svakog oblika pojedinačno prema izrazu

$$\beta_\alpha(\tau') = \left[\left(\frac{|\delta_{1,\alpha}(\tau')|}{\delta_{01,\alpha}} \right)^\eta + \left(\frac{\langle \delta_{2,\alpha}(\tau') \rangle}{\delta_{02,\alpha}} \right)^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}} - 1, \quad \eta = 2, \quad (7)$$

gdje je $\langle \bullet \rangle$ je McCauleyeva zagrada definirana kao



Sl. 1: Konstitutivni zakon kontaktnog sloja za: a) oblik II (smjer 1) i b) oblik I (smjer 2)

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{ako je } x \geq 0, \\ 0 & \text{ako je } x < 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Oštećenje je nepovratno, tako da u nekom trenutku τ pseudo-vremena vrijedi

$$\bar{\beta}_\alpha(\tau) = \max_{0 \leq \tau' \leq \tau} \beta_\alpha(\tau'). \quad (9)$$

Kontaktne naprezanja ω_α računaju se prema izrazu

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \omega_{\alpha,1} \\ \omega_{\alpha,2} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{S}_\alpha \delta_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha \leq 0, \\ [\mathbf{I} - \mathbf{G}_\alpha \mathbf{P}_\alpha] \mathbf{S}_\alpha \delta_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha > 0, \end{cases} \quad (10)$$

gdje je

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{bmatrix} S_{1,\alpha} & 0 \\ 0 & S_{2,\alpha} \end{bmatrix}, \quad S_{i,\alpha} = \frac{\omega_{0i,\alpha}}{\delta_{0i,\alpha}}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_\alpha = \begin{bmatrix} g_{1,\alpha} & 0 \\ 0 & g_{2,\alpha} \end{bmatrix},$$

$$g_{i,\alpha} = \min \left\{ 1, \frac{\delta_{ci,\alpha}}{\delta_{ci,\alpha} - \delta_{0i,\alpha}} \frac{\bar{\beta}_\alpha}{1 + \bar{\beta}_\alpha} \right\}, \quad \mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \langle \text{sgn}(\delta_{2,\alpha}) \rangle \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Slučaj $\bar{\beta}_\alpha \leq 0$ predstavlja linearno-elastično područje, dok za $\bar{\beta}_\alpha > 0$ dolazi do oštećenja kontaktnog sloja te, konačno, kada je $g_{i,\alpha} = 1$ do potpunog gubitka nosivosti kontaktnog sloja ($\omega_\alpha = \mathbf{0}$). Matrica \mathbf{P}_α , ovisno o veličini parametra $S_{i,\alpha}$, ($i = 1, 2$), djelomično sprečava međusobno prodiranje susjednih slojeva u slučaju tlačnih kontaktnih naprezanja u smjeru 2 (Sl. 1. b)). Treba naglasiti da se u slučaju kada se jedan od dva oblika delaminacije ne aktivira konstitutivni zakon (10) reducira na Sl. 1.a) ili 1.b).

2.4 Ravnotežne jednadžbe - Princip virtualnog rada

Za statički problem ukupni virtualni rad za čitavu višeslojnu gredu sa n slojeva i $n - 1$ kontaktnih slojeva dobiva se kao zbroj virtualnih radova unutrašnjih sila po slojevima (V_{int}) i kontaktnim slojevima (V_{int}^*) od čega se oduzima virtualni rad vanjskih sila po slojevima (V_{ext}), odnosno

$$V \equiv V_{int} + V_{int}^* - V_{ext} \equiv 0 \quad \text{ili} \quad \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_{T,j}^T \mathbf{g}_j = 0, \quad (12)$$

gdje je $\bar{\mathbf{p}}_{T,j}$ skupni vektor čvornih virtualnih pomaka izveden iz skupnog vektora funkcija pomaka \mathbf{p}_T definiranog kao

$$\mathbf{p}_T^\top = \langle \mathbf{p}_1^\top \quad \mathbf{p}_2^\top \quad \dots \quad \mathbf{p}_n^\top \rangle = \sum_{j=1}^N \Psi_j(X_1) \mathbf{p}_{T,j}^\top, \quad \mathbf{p}_i^\top = \langle \mathbf{u}_i^\top \quad \theta_i \rangle. \quad (13)$$

Domena je diskretizirana na N čvorova gdje $\Psi_j(X_1)$ predstavlja interpolacijske funkcije, a $\mathbf{p}_{T,j}$ čvorne vrijednosti skupnog vektora nepoznatih funkcija. Na isti način (13) interpoliraju se i funkcije virtualnih pomaka $\bar{\mathbf{p}}_T$. Sa \mathbf{g}_j označen je čvorni vektor neuravnoteženih sila (rezidual) koji je definiran kao $\mathbf{g}_j = \mathbf{q}_{int,j} - \mathbf{q}_{ext,j} = \mathbf{0}$ gdje su

$$\mathbf{q}_{int,j} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \Psi_j \left[\mathbf{P}_i^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{C}_i \left\{ \begin{matrix} \gamma_i \\ \kappa_i \end{matrix} \right\} + (1 - k_{i,n}) b_i \mathbf{R}_i^\top \mathbf{B}_i^\top \mathbf{\Lambda}_0^\top \boldsymbol{\omega}_i \right] dX_1, \quad (14)$$

$$\mathbf{q}_{ext,j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i^\top \left(\int_0^l \Psi_j \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_i \\ w_i \end{matrix} \right\} dX_1 + k_{j,1} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{i,0} \\ W_{i,0} \end{matrix} \right\} + k_{j,N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{i,l} \\ W_{i,l} \end{matrix} \right\} \right) \quad (15)$$

vektor unutrašnjih i vektor vanjskih sila za geometrijski linearan slučaj ($\cos \theta_i \approx 1$ i $\sin \theta_i \approx \theta_i$), a

$$\mathbf{P}_i = [k_{i,1} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad k_{i,2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \dots \quad k_{i,n} \mathbf{I}_{3 \times 3}], \quad k_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = j, \\ 0 & \text{ako je } i \neq j, \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dX_1} \mathbf{I} & -\mathbf{t}_{02} \\ \mathbf{0}^\top & \frac{d}{dX_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_0^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_\alpha = [-\mathbf{I} \quad -\mathbf{t}_{01}(a_i - h_i) \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{t}_{01} a_{i+1}],$$

b_i je širina sloja i , \mathbf{f}_i i w_i su raspodijeljene sile i momenti po sloju i , dok su $\mathbf{F}_{i,k}$ i $W_{i,k}$ koncentrirane sile i momenti na krajevima sloja ($k = 0$ ili l).

3 POSTUPAK RJEŠAVANJA

Jednadžba $\mathbf{g}_j = \mathbf{0}$ je nelinearna po nepoznicama \mathbf{u}_i i θ_i (vidi jednadžbu (14)) i samim time nerješiva analitički. Stoga je najprije potrebno između čvorova interpolirati nepoznate funkcije prema jednadžbi (13), a zatim se vektor neuravnoteženih sila linearizira, čime se konačno dobiva čvorna tangentna matrica krutosti u obliku

$$\mathbf{K}_{j,k} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \Psi_j \left[\mathbf{P}_i^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{C}_i \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{P}_i + (1 - k_{i,n}) b_i \mathbf{R}_i^\top \mathbf{B}_i^\top \mathbf{\Lambda}_0^\top \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i \right] \Psi_k dX_1, \quad (17)$$

gdje je

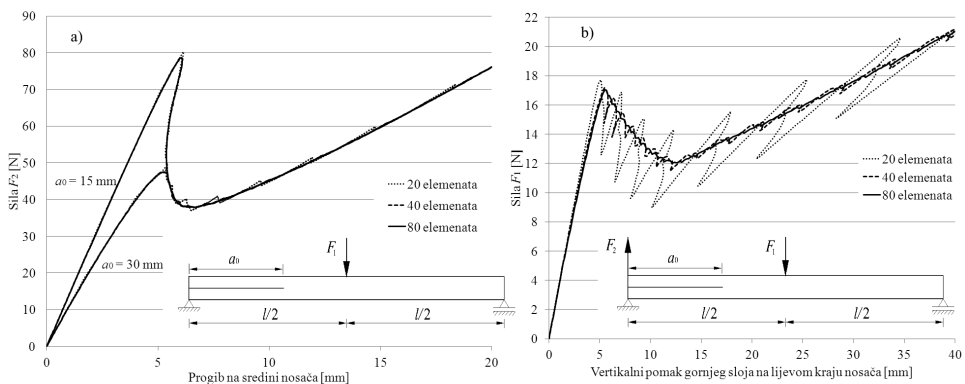
$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \begin{cases} \mathbf{S}_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha \leq 0, \\ [I - \mathbf{G}_\alpha \mathbf{P}_\alpha] \mathbf{S}_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha > 0 \text{ i } \beta_\alpha < \bar{\beta}_\alpha, \\ \left[I - \mathbf{G}_\alpha \mathbf{P}_\alpha - \frac{1}{(1 + \bar{\beta}_\alpha)^{\eta+1}} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{P}_\alpha \boldsymbol{\delta}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^\top \right] & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha > 0 \text{ i } \beta_\alpha = \bar{\beta}_\alpha, \end{cases} \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{c1,\alpha}}{\delta_{c1,\alpha} - \delta_{01,\alpha}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_{c2,\alpha}}{\delta_{c2,\alpha} - \delta_{02,\alpha}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\alpha^\top = \left\langle \frac{1}{\delta_{1,\alpha}} \left(\frac{|\delta_{1,\alpha}|}{\delta_{01,\alpha}} \right)^\eta \quad \frac{1}{\delta_{2,\alpha}} \left(\frac{|\delta_{2,\alpha}|}{\delta_{02,\alpha}} \right)^\eta \right\rangle \quad (19)$$

Čvorni vektori neuravnoteženih sila i čvorne tangentne matrice krutosti se potom slažu u globalne (\mathbf{g} i \mathbf{K}), a rješenje se dobiva koristeći Newton-Raphsonovu proceduru iterativno rješavajući jednadžbu $\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$ dok norma prirasta čvornih vrijednosti nepoznatih funkcija ili vektora neuravnoteženih sila ne postane dovoljno mala. Za integriranje kod grednih konačnih elemenata korištena je Gaussova integracija u $N - 1$ točaka po elementu, a kod kontaktnih konačnih elemenata Simpsonova integracija u $N + 1$ točaka po elementu. Zbog izrazito nelinearnog ponašanja nosača s oštrim ekstremima koji nastaju prilikom delaminacije (otkazivanja nosivosti kontaktnog sloja) u integracijskim točkama za rješavanje se koristi modificirana metoda lučne duljine (*modified arc-length method* [1]).

4 NUMERIČKI PRIMJERI

Predstavljeni model testiran je na primjeru sa Sl. 2, gdje se u slučaju kada djeluje samo sila F_1 događa samo delaminacija oblika II (klizanje jednog sloja po drugome), a kada djeluju obje sile dolazi do mješovite delaminacije (poprečno odvajanje gornjeg sloja u odnosu na donji uz međusobno uzdužno klizanje) [2]. U oba slučaja povećanjem opterećenja dolazi do propagacije pukotine a_0 s lijeva na desno. Numerički parametri su $l = 100$ mm, $a_0 = 30$ mm, $h = 3$ mm, $b = 1$ mm, $E = 135000$ N/mm², $\nu = 0.25$, $\omega_{0i} = 57$ N/mm², $\delta_{0i} = 10^{-7}$ mm, $\delta_{ci} = 0.14$ mm, $S_i = 5.7 \cdot 10^8$ N/mm³, $i = 1, 2$, $F_2 = 0.4535 F_1$. Kod rjeđih mreža može se uočiti značajnije odstupanje od točnog rješenja koje nastaje kao rasterećenje nakon potpunog gubitka nosivosti kontaktnog sloja u pojedinoj integracijskoj točki. Ta se pojava može uočiti i kod gušćih mreža, ali su tada odstupanja od točnog rješenja manja. Uočeno je da prikazani rezultati odgovaraju rezultatima iz literature [2] koji su dobiveni koristeći izotropne i ortotropne konačne elemente za ravninsko stanje naprezanja u geometrijski linearnoj analizi.



Sl. 2: Rezultati testova za: a) opterećenje silom F_1 (oblik II) i b) opterećenje silama F_1 i F_2 (mješoviti oblik) za različite mreže konačnih elemenata

5 ZAKLJUČAK

Predstavljen model za geometrijski nelinearnu višeslojnu gredu omogućava ne samo klizanje i razmicanje među slojevima [5], već i njihovo potpuno odvajanje (delaminaciju). Kontaktni konačni elementi vezuju se na referentne osi susjednih greda ne unoseći pritom nove stupnjeve slobode u sustav. Rješenje ovakvih sustava zahtjeva sofisticiranu iterativnu proceduru koja može savladati oštre ekstreme u dijagramima sila-pomak (vidi Sl. 2) pa je stoga u ovom radu korištena metoda modificirane lučne duljine [1]. Numerički primjeri pokazuju zadovoljavajuća rezultate dobivene predstavljenim modelom u usporedbi s primjerima iz literature [1, 2]. Prednost grednog modela višeslojne grede svakako je korištenje manjeg broja stupnjeva slobode u odnosu na ravninske modele. U daljnjem radu planira se testirati model na primjerima s velikim pomacima prilikom delaminacije (*peel*-testovi).

ZAHVALA

Rezultati prikazani u ovom radu financijski su poduprti putem projekta br. 114-0000000-3025 "Improved accuracy in non-linear beam elements with finite 3D rotations" Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske te uz pomoć potpore br. 13.05.13.06 "Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela" Sveučilišta u Rijeci.

Literatura

- [1] Alfano, G., Crisfield, M.A., "Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues", *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, Vol. 50, No. 7, 2001, str. 1701–1736.
- [2] Mi, Y., Crisfield, M., Davies, G., Hellweg, H., "Progressive Delamination Using Interface Elements", *J. Compos. Mater.*, Vol. 32, No. 14, 1998, str. 1246–1272.
- [3] Reissner, E., "On one-dimensional finite-strain beam theory; the plane problem", *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, Vol. 23, No. 5, 1972, str. 795–804.
- [4] Škec, L., Jelenić, G., "Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection", *Acta Mech.*, Vol. 225, No. 2, 2014, str. 523–541.
- [5] Škec, L., Schnabl, S., Planinc, I., Jelenić, G., "Analytical modelling of multilayer beams with compliant interfaces", *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 44, No. 4, 2012, str. 465–485.

Autori:

Leo Škec, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, tel. +385 51 265 956, mail: leo.skec@uniri.hr

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, tel. +385 51 265 955, mail: gordan.jelenic@uniri.hr

NUMERIČKA INTEGRACIJA ROTACIJSKOG TENZORA NA GRUPI JEDINIČNIH KVATERNIONA

Terze, Z. i Zlatar, D.

Sažetak: Ovim radom opisana je nova izvorna numerička metoda integracije rotacijskog tenzora koja koristi kvaternione (engl. *quaternions*) za parametrizaciju mnogostrukosti velikih rotacija, čime se izbjegavaju kinematički singulariteti koji se nužno pojavljuju pri svakoj parametarizaciji velikih rotacija troosnim lokalnim koordinatama (kao što su npr. Eulerovi kutovi). Izvornost predložene procedure zasniva se na novom matematičkom modelu integracijske metode koja se temelji na integraciji skupa triju običnih diferencijalnih jednadžbi (ODE) definiranih u vektorskom prostoru Lieve algebre rotacijske grupe $SO(3)$, pri čemu se koordinate trenutnog vektora rotacije koriste kao lokalne koordinate integracije. Na taj način se, za razliku od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona koja nužno iziskuje integraciju četiri diferencijalno-algebarskih jednadžbe (uz stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona), zadaća integracije prostornih rotacija svodi na prirodni oblik integracije triju ODE jednadžbi. U radu je opisan izvod matematičkog modela nove integracijske procedure te je prezentiran numerički primjer primjene algoritma. Opisan matematički model i integracijski algoritam može se smatrati rješenjem standardnog problema koji je tradicionalno bio uzrokom numeričkih poteškoća pri upotrebi jediničnih kvaterniona.

Gljučne riječi: Rotacijski tenzor, grupa jediničnih kvaterniona $Sp(1)$, rotacijska grupa $SO(3)$, integracija velikih rotacija, Lieva algebra

1 KINEMATIKA ROTACIJE KRUTOG TIJELA

Ishodišna točka predmetne analize je jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t), \quad (1)$$

kojom je definirana veza između kutne brzine tijela $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)$, izražene u lokalnom koordinatnom sustavu vezanom za tijelo, i matrice rotacije $\mathbf{R}(t)$. Rješavanjem jednadžbe (1), koja predstavlja običnu diferencijalnu jednadžbu (ODE) na rotacijskoj grupi $SO(3)$, izravno se rekonstruira orijentacija tijela $\mathbf{R}(t)$ primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Element Lieve algebre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ može se poistovjetiti s \mathcal{R}^3 preko operatora koji preslikava vektor $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{R}^3$ u koso-simetričnu matricu $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ [1], gdje je $so(3)$ Lieva algebra rotacijske grupe $SO(3)$.

Slično kao i kod Munthe-Kaas pristupa [2-4], rješenje jednadžbe (1) ima oblik

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \exp(\tilde{\mathbf{u}}(t)), \quad (2)$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na $SO(3)$ grupi dana Euler-Rodriguesovim izrazom [3]

$$\exp_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\|\mathbf{u}\|)}{\|\mathbf{u}\|} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1 - \cos(\|\mathbf{u}\|)}{\|\mathbf{u}\|^2} \tilde{\mathbf{u}}^2. \quad (3)$$

U izrazu (3), $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^3$ predstavlja trenutni lokalni rotacijski vektor a \mathbf{R}_0 matricu početne rotacije. Primjenom Magnusovog teorema [2, 5], rješenje diferencijalne jednadžbe (1) može se izraziti u obliku (2) ako $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in so(3)$ predstavlja rješenje ODE jednadžbe u vektorskom prostoru Lieve algebre u obliku

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}(\tilde{\omega}(\mathbf{R}(t))), \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}, \quad (4)$$

s operatorom $\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}$ oblika

$$\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^1(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}] + \frac{1}{12}[\tilde{\mathbf{u}}, [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}]] + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} (-\text{ad}_{\tilde{\mathbf{u}}}^j(\tilde{\omega})), \quad (5)$$

gdje je adjungirani operator $\text{ad}_{\tilde{\mathbf{u}}}$ definiran kao Lieva zagrada

$$\text{ad}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\omega}) = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}], \text{ for all } \tilde{\omega}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t) \in so(3), \quad (6)$$

a B_j predstavlja Bernoullijev broj.

2 KVATERNIONI

S obzirom na topološke karakteristike rotacijske mnogostrukosti, parametrizaciju velikih rotacija upotrebom troosnih lokalnih koordinata (npr. Eulerovi kutovi), koja bi eliminirala pojavu kinematičkih singulariteta u cijeloj domeni definicije velikih rotacija, nije moguće uvesti. Da bi se izbjegli navedeni kinematički singulariteti, uvođenje četveroparametarnih jediničnih kvaterniona (Eulerovi parametri) uobičajeno je rješenje. Međutim, numerička integracija jednadžbe kinematičke rekonstrukcije (1) pri kojoj je orijentacija krutog tijela izražena jediničnim kvaternionima, u slučaju primjene uobičajenih metoda integracije opisanih u literaturi [7] nužno iziskuje (numerički neefikasnu) integraciju diferencijalno-algebarskih (DAE) jednadžbi, što je složenija zadaća u usporedbi s izvornom ODE formulacijom prikazanom u izrazu (1). Uzrok tome je redundantnost četiri Eulerova parametra (kojima su parametarizirana 'samo' tri rotacijska stupnja slobode gibanja) i nužnost numeričke stabilizacije dodatnog kinematičkog ograničenja koje proistječe iz zavisnosti uvedenih Eulerovih parametara (elemenata jediničnog kvaterniona).

Kvaternion se može interpretirati kao uređena četvorka realnih brojeva koja se sastoji od skalarnog $q_0 \in \mathcal{R}$ i vektorskog dijela $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^3$. U radu je korištena vektorska notacija kvaterniona $\mathbf{q} \in \mathcal{H} \cong \mathcal{R}^4$

$$\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}),$$

gdje je vektorski dio napisan u obliku $\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i$, a $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ predstavlja standardnu ortonormiranu bazu na \mathcal{R}^3 . Produkt dvaju kvaterniona q i p dan je sljedećim izrazom

$$q \circ p = (q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}), \quad q, p \in \mathcal{H}, \quad (7)$$

gdje $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_i p_i$ predstavlja skalarni produkt. Jedinični kvaternioni (tj. kvaternioni jedinične veličine, $\|q\| = 1$ ili $q \circ \bar{q} = (1, \mathbf{0})$, gdje je \bar{q} konjugirana vrijednost od q) formiraju ortogonalnu i simplektičnu grupu $Sp(1) \cong \mathcal{S}^3$ koja predstavlja jediničnu sferu na \mathcal{R}^4 definiranu kao

$$\mathcal{S}^3 = \{q \in \mathcal{R}^4 \mid \|q\| = 1\}.$$

Rotacijsko gibanje krutog tijela dano je s $q(t) \in \mathcal{S}^3$, gdje t predstavlja vrijeme. Brzina krutog tijela $\dot{q} \in T_q \mathcal{S}^3$ može se definirati u vektorskom prostoru koso-simplektičnih kvaterniona

$$sp(1) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{R}^4 \mid \mathbf{w} + \bar{\mathbf{w}} = (0, \mathbf{0})\},$$

gdje je $\bar{\mathbf{w}}$ konjugirana vrijednost imaginarnog kvaterniona (engl. *pure imaginary quaternion*) \mathbf{w} . Nadalje, $sp(1)$ možemo poistovjetiti s tangentnim vektorskim prostorom na $Sp(1) \cong \mathcal{S}^3$ u identitetu grupe [6]. Također, $sp(1)$ predstavlja Lievu algebru grupe $Sp(1)$ i izomorfan je $so(3)$. Element Lieve algebre $\mathbf{w} \in sp(1)$ može se poistovjetiti s \mathcal{R}^3 i kao takav koincidira sa skupom imaginarnih kvaterniona definiranim kao $\mathbf{w} = (0, \mathbf{u})$ za $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$. Slično kao i za $\exp_{so(3)}$, i za kvaternione se može uvesti zatvorena forma eksponencijalne mape $\exp_{\mathcal{S}^3} : sp(1) \cong \mathcal{R}^3 \rightarrow Sp(1) \cong \mathcal{S}^3$. Po definiciji, eksponencijalna mapa je definirana beskonačnim redom [7]

$$\exp_{\mathcal{S}^3} \left(\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u} \right) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u} \right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u} \right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u} \right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right], \quad (8)$$

koji se može izraziti u obliku

$$\exp_{\mathcal{S}^3} \left(\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u} \right) \right) = \cos \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\| \right) (1, \mathbf{0}) + \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\| \right)}{\|\mathbf{u}\|} (0, \mathbf{u}). \quad (9)$$

Jednadžba (9) predstavlja rotacijski kvaternion (četiri Eulerova parametra) kao funkciju rotacijskog vektora $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$ koji (prema Eulerovom teoremu) jediničnim vektorom definira os rotacije, a kut rotacije je izražen pomoću modula rotacijskog vektora $\|\mathbf{u}\|$. Također, valja napomenuti da je grupa jediničnih kvaterniona izomorfn

Lievoj grupi $SU(2)$ i kao takve obje imaju dvostruko pokrivanje na $SO(3)$ [9]. U nastavku rada predložena je nova izvorna integracijska shema koja eliminira poteškoće integracije jediničnih kvaterniona u klasičnoj DAE formulaciji, definiranjem matematičkog modela numeričke integracije lokalnog rotacijskog vektora u prostoru Lieve algebre $so(3)$ u minimalnoj ODE formi.

3 INTEGRACIJSKA SHEMA

U predloženom algoritmu, rekonstrukcija orijentacije krutog tijela temelji se na eksponencijalnoj mapi definiranoj izrazom (9), gdje $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$ predstavlja rotacijski vektor trenutnog koraka integracije koji rekonstruira rotaciju iz \mathbf{q}_n u \mathbf{q}_{n+1} . Uzevši za polazište jednadžbu (2), uvodimo uzorak napredovanja koraka integracije u obliku

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \circ \exp_{\mathcal{S}^3} \left(\left(\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u}_n \right) \right) \right), \quad (10)$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na \mathcal{S}^3 grupi dana izrazom (9), a \mathbf{u}_n predstavlja rotacijski vektor n -tog koraka integracije. Za određivanje rotacijskog vektora \mathbf{u}_n , prema analogiji izraza (4) izveden je izraz oblika

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = \text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}_n}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}(t))), \quad \tilde{\mathbf{u}}_{n_0} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

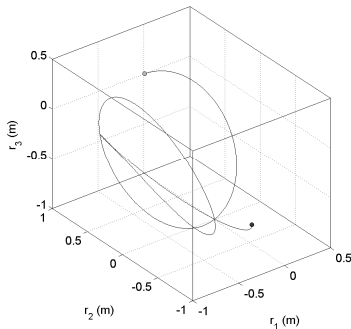
gdje je operator $\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}_n}^{-1}$ definiran u (5), a određivanje kutne brzine tijela $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{R}^3$ zahtjeva zasebnu integraciju Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela pomoću standardnog ODE rješavača (određivanje polja kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$ na temelju polja kutnog ubrzanja $\dot{\boldsymbol{\omega}}$). Budući da izraz (11) predstavlja ODE jednadžbu u vektorskom prostoru Lieve algebre, za njezino se integriranje može koristiti bilo koji od standardnih vektorskih ODE rješavača. U ovom radu korištena je Runge - Kutta metoda četvrtog reda (RK4). Ovdje možemo naglasiti da je opisana integracija u minimalnoj ODE formi u predloženom modelu omogućena činjenicom da su uvedenim \mathbf{u}_n rotacijskim vektorom istodobno definirane i nezavisne koordinate integracije u okolini trenutnog stanja rotacije \mathbf{q}_n .

4 NUMERIČKI PRIMJER: ROTIRAJUĆE TIJELO S JEDNOM UPORIŠNOM TOČKOM

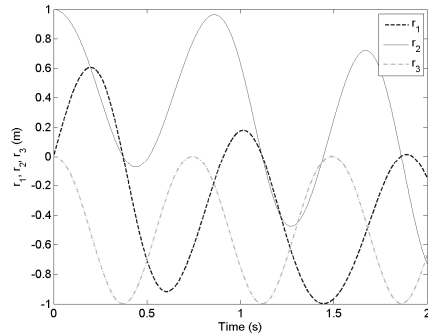
Kao numerički primjer upotrebe uvedene integracijske procedure, analizirano je gibanje rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom (*engl. Lagrangian top*) s početnom orijentacijom $\mathbf{q}_0 = (1, \mathbf{0})$ i kutnom brzinom $\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 150 \ 4.61538]^T$ te položajem središta mase $\mathbf{r}_b = [0 \ 1 \ 0]^T$, masom $m = 15$, tenzorom inercije $\mathbf{J} = \text{diag}(0.234375, 0.46875, 0.234375)$ i gravitacijskim vektorom $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -9.81]^T$.

Za integraciju ODE dinamičkih jednadžbi rotirajućeg tijela kao i za izračun lokalnog rotacijskog vektora u svakom koraku integracije (11), korištena je RK4

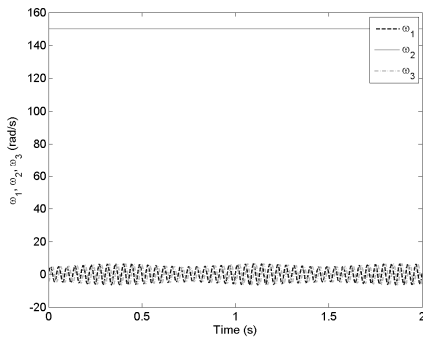
metoda. Integracijski rezultati za nepromjenjivi korak integracije $h=1e-3$ prezentirani su slikama 1 - 6.



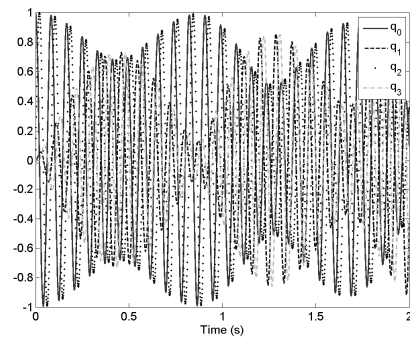
Sl. 1. Trajektorija centra mase



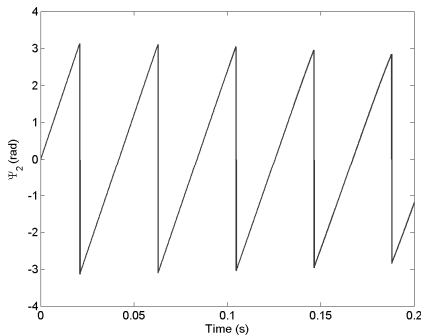
Sl. 2. Položaj središta mase rotirajućeg tijela



Sl. 3. Kutna brzina rotirajućeg tijela

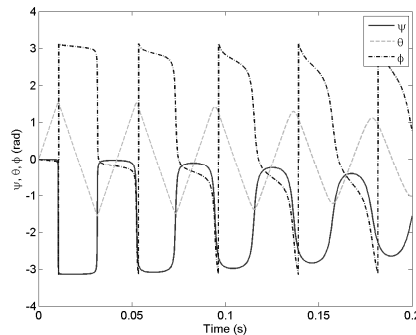


Sl. 4. Elementi kvaterniona



Sl. 5. Komponenta Ψ_2 Cartesievog rotacijskog vektora Ψ , definiranog kao

$$\|\Psi\| \leq \pi$$



Sl. 6. Tait-Bryantovi kutovi (nesimetrični 321 slijed Eulerovih kutova)

Na slikama 1-4 prikazani su rezultati dobiveni integracijom pomoću predložene procedure gdje je vidljivo da su sve integralne krivulje glatke funkcije bez diskontinuiteta. U suprotnosti tome su rezultati ODE integracije na temelju klasičnog modela lokalnih koordinata parametrizacije velikih rotacija (Karteziev rotacijski vektor

i Tait-Bryantovi kutovi), prikazani na slikama 5 i 6, na kojima je vidljiva pojava diskontinuiteta zbog pojave nužnih singulariteta. Predložena integracijska procedura rotacijskog tenzora, koja koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$ i izravnu rekonstrukciju stanja rotacije na $Sp(1)$ grupi kvaterniona, u potpunosti zaiobilazi pojavu singulariteta, a također ne uvodi integraciju redundantnih DAE jednadžbi poput standardne metode integracije jediničnog kvaterniona.

5 ZAKLJUČAK

U radu je predstavljena nova izvorna metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona kojom se rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela pri upotrebi kvaterniona, a koji je nužno iziskivao integraciju DAE jednadžbi (kao i numeričku stabilizaciju dodatnog kinematičkog ograničenja). Opisana metoda koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora u minimalnoj formi, definirane na Lievoj algebri rotacijske grupe $SO(3)$. Nakon što se izračuna lokalni rotacijski vektor za trenutni korak integracije, kurentna orijentacija se izravno rekonstruira na $Sp(1)$ grupi kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski prostor rotacijske mnogostrukosti i izbjegavaju kinematički singulariteti lokalne parametarizacije, iako se integracijska procedura temelji na rješavanju triju ODE jednadžbi.

Literatura:

- [1] Darryl D. Holm, "Geometric Mechanics. Part II: Rotating, Translating and Rolling", Imperial College Press, London, 2008.
- [2] Hairer, E., Lubich, C. and Wanner, G., "Geometric Numerical Integration", Springer, Berlin, 2006.
- [3] Iserles, Munthe-Kaas, Norsett and Zanna, "Lie-group methods", Acta Numerica, Vol.9, 2000, str. 215-365.
- [4] Munthe-Kaas, H., "Runge-Kutta methods on Lie groups", BIT, Vol.38, 1998, str. 92-111.
- [5] Zanna, A., "Collocation and relaxed collocation for the Fer and Magnus expansions", SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.36, No.4, 1999, str. 1145-1182.
- [6] Curtis, M.L., "Matrix Groups", Springer, Berlin, 1984.
- [7] Betsch, P. and Siebert, R., "Rigid body dynamics in terms of quaternions: Hamiltonian formulation and conserving numerical integration", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.79, 2009, str. 444-473.
- [8] Terze, Z., Mueller, A., Zlatar, D., "Lie-Group integration method for constrained multibody systems in state space", Multibody System Dynamics, 2013, Submitted.
- [9] Mueller, A. and Terze, Z., "On the choice of configuration space for numerical Lie group integration of constrained rigid body systems", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.262, 2013, str. 3-13.

Autori:

Zdravko Terze, Dario Zlatar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, tel. +385 1 6168 476, +385 1 6168 518, fax +385 1 6156 940, e-mail: zdravko.terze@fsb.hr, dario.zlatar@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/aero/zterze.htm

O PROJEKTU "CENTAR IZVRSNOSTI ZA PROCJENU STANJA KONSTRUKCIJA"

Tonković, Z., Vašak, M., Kožar, I. i Čanžar, P.

Sažetak: U radu je dan prikaz aktivnosti koje se vrše u okviru projekta "Centar izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija" (CEEStructHealth) financiranog iz sredstava Europske unije. U okviru projekta radi se na: uspostaviti suradnje između sveučilišta i gospodarstva osnivanjem Centra izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija; izgradnji kapaciteta Centra za analizu zamora materijala; kontrolu dinamičkog opterećenja te sustave upravljanja i mjerenja, razvojem monitoring sustava za praćenje stanja vjetroagregata; proširenju iskustava studenata tijekom njihovog obrazovanja povećanjem njihove mobilnosti sa sveučilišta u gospodarstvo; kao i na unapređenju kompetencija stručnjaka iz gospodarstva; te na povećanju prepoznatljivost Centra i njegovog potencijala za buduću suradnju sveučilišta i gospodarstva u području istraživanja i razvoja. Više informacija o aktivnostima Centra izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija (u daljnjem tekstu "Centar") može se naći na adresi: www.ceestructhealth.eu.

Ključne riječi: Centar izvrsnosti, vjetroagregat, monitoring sustav, sustav upravljanja, zamor, dinamika, laboratorijska mjerenja.

1 UVOD

Od 15. travnja 2013. godine financira se projekt pod nazivom *Centre of Excellence for Structural Health* (Centar izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija, CEEStructHealth) iz sredstava europske unije, odnosno Fonda za ulaganje u znanost i inovacije (*Science and Innovation Investment Fund – SIIF*), u okviru Operativnog programa "Regionalna konkurentnost 2007.-2013.", a koji služi povećanju komercijalizacije istraživačkih rezultata i transfera tehnologija. Projekt je financiran u iznosu od 585.654,77 EUR u trajanju od dvije godine. Na projektu, uz Fakultet strojarstva i brodogradnje (FSB) Sveučilišta u Zagrebu kao nositelj projekta, sudjeluju partnerske institucije Fakultet elektrotehnike i računarstva (FER) Sveučilišta u Zagrebu te Građevinski fakultet (GF RI) Sveučilišta u Rijeci, dok je suradna institucija iz gospodarstva KONČAR-Institut za elektrotehniku d.d (KI). Osim toga, kao suradna institucija iz gospodarstva u projekt je aktivno uključen KONČAR – Inženjering za energetiku i transport (KET) preko Poslovne jedinice Vjetroelektrane. U aktivnostima projekta sudjeluje 22 istraživača iz pet različitih laboratorija i jedne katedre (Laboratorij za numeričku mehaniku, Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku, Laboratorij za mehaniku fluida te Laboratorij za turbostrojeve s FSBa, Laboratorij za obnovljive izvore energije s FERa te Katedra za računalno modeliranje materijala i konstrukcija na GF RI) među kojima su četiri novozaposlena znanstvena novaka.

2 CILJEVI PROJEKTA

Glavni ciljevi projekta su:

- Uspostaviti suradnju između sveučilišta i gospodarstva osnivanjem Centra izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija.
- Izgraditi kapacitete Centra za analizu zamora materijala, kontrolu dinamičkog opterećenja te sustave upravljanja i mjerenja, razvojem monitoring sustava za praćenje stanja vjetroagregata.
- Proširiti iskustva studenata tijekom njihovog obrazovanja povećanjem njihove mobilnosti sa sveučilišta u gospodarstvo te unapređenjem kompetencija stručnjaka iz gospodarstva.
- Povećati prepoznatljivost Centra i njegov potencijal za buduću suradnju sveučilišta i gospodarstva u području istraživanja i razvoja.

Nakon završetka projekta, cilj je uspostaviti suradnju s novim partnerima iz gospodarstva, kao i iz međunarodne znanstvene zajednice te proširiti aktivnosti Centra na rješavanje problema drugih složenih konstrukcija, a isto tako i na uspostavljanje ovakvih ili sličnih centara na ostalim inženjerskim fakultetima unutar i izvan Republike Hrvatske.

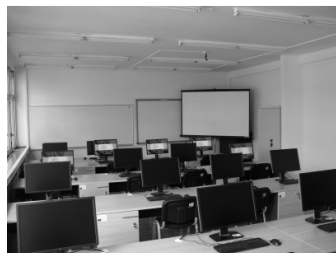
3 GLAVNE AKTIVNOSTI

3.1. Osnivanje i izgradnja kapaciteta Centra izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija

U okviru projekta osnovan je *Centar izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija* u kojem se izmjenjuju interdisciplinarna znanja između triju fakulteta i gospodarstva u području analize cjelovitosti (integriteta), monitoringa i upravljanja složenih konstrukcija (slika 1). U cilju izgradnje kapaciteta Centra za unapređenje suradnje s gospodarstvom i drugim znanstveno-istraživačkim institucijama, sredstva projekta *CEEStructHealth* korištena su za opremanje laboratorija na fakultetima uključenih u projekt. Tako je iz sredstava projekta *CEEStructHealth* financirano opremanje prostora Centra na FSBU u okviru kojeg je uređena računalna učionica s 20 računala za studente, server računalom i radnom stanicom povezanih u klaster računalo sa svom pratećom informatičkom opremom (slika 2). Računalna oprema također je nabavljena za potrebe FERa i GF RI.



Sl. 1 Početni sastanak Projekta u svibnju 2013.

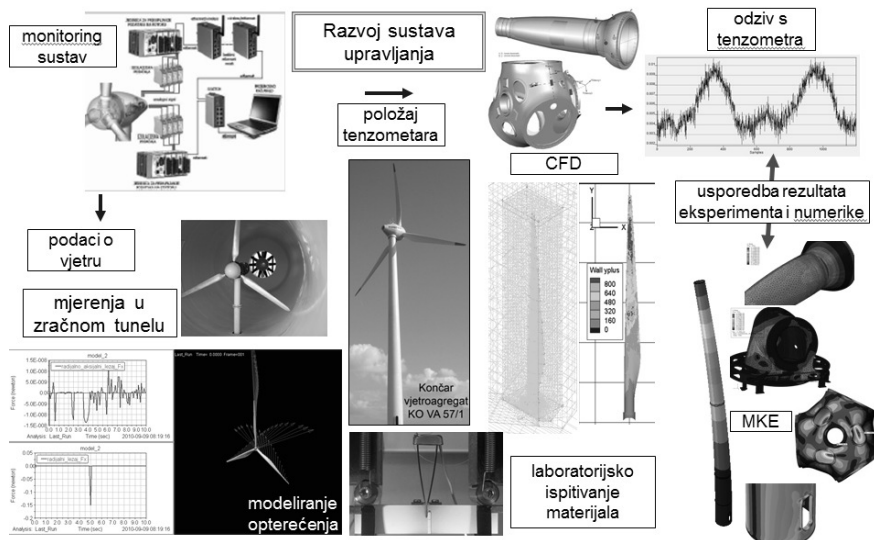


Sl. 2 Novi prostor Centra na FSBU

Osim toga, nabavljene su trajne licence programa za numeričku analizu konstrukcija ABAQUS, ANSYS i ZENCRACK za FSB te ANSYS za GF RI. To omogućuje provedbu zahtjevnih numeričkih proračuna složenih mehaničkih konstrukcija što do sada nije bilo moguće u okviru postojećih kapaciteta. Sva navedena računalna oprema i softver i na raspolaganju su studentima. Nadalje, za potrebe eksperimentalnih istraživanja mehaničkog ponašanja materijala, Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku na FSBu opremljen je iz sredstava projekata termokomorom na visokim temperaturama, dok je GF RI opremljen infracrvenom termokamerom. To omogućuje analizu procesa deformiranja materijala tijekom laboratorijskih ispitivanja, definiranje prikladnih konstitutivnih modela te validaciju numeričkih algoritama predloženih u okviru istraživanja. Nadalje, GF RI je opremljen s dodatnom mjerenom opremom potrebnom za mjerenja na vjetroagregatu na terenu, a za mjerenja u zračnom tunelu koji je instaliran na FERu nabavljena je također oprema.

3.2. Znanstveno-istraživačke aktivnosti

U cilju razvoja naprednog sustava upravljanja vjetroagregata, za vrijeme trajanja projekta provode se opsežna istraživanja na prototipu KONČAR-vjetroagregatu VA K80 snage 2,5 MW koji se testira na terenu. Ovaj je vjetroagregat zajedno s ostalih 15 KONČAR-vjetroagregata snage 1 MW (KO-VA 57/1) instaliran na Pometenom brdu u blizini Splita. Područja istraživanja u okviru projektu prikazana su na slici 3.



Sl. 3 Područja istraživanja u okviru projektu

Na temelju mjerenja na realnom objektu i u zračnom tunelu, analitičkih proračuna te laboratorijskog istraživanja materijala [1] i računalnih simulacija radi se na inovativnim metodama za procjenu dinamičkog i zamornog ponašanja kritičnih komponenata vjetroagregata kao što su osovinski rukavac, glavni nosač, glavčina i stup. U okviru mjerenja na realnom objektu ostvarena je kompletna akvizicija podataka što omogućuje istovremeno mjerenje deformacija i akceleracija na

konstrukciji uz poznati smjer i brzinu vjetra. Osim mjerenja na realnom objektu, istraživanja se paralelno vrše na umanjenom laboratorijskom modelu vjetroagregata u zračnom tunelu koji je sastavni dio Laboratorija za obnovljive izvore energije na FERu. Pritom ispitni model odgovara realnoj konstrukciji vjetroagregata. Trenutno se radi na definiranju složenog numeričkog modela vjetroagregata, ali isto tako i na relativno jednostavnom modelu koji treba poslužiti razvoju naprednijeg sustava upravljanja. Da bi se numeričke simulacije što više približile realnom ponašanju konstrukcije, ali i da bi se definirali materijali sa što boljim mehaničkim svojstvima za složenu dinamičku konstrukciju kao što je vjetroagregat, provode se laboratorijska ispitivanja materijala. Istražuje se utjecaj mikrostrukture na postupak zamornog iniciranja i rasta oštećenja u materijalu.

3.3. Edukacija istraživača, studenata i inženjera iz gospodarstva

Osim istraživača s triju fakulteta i suradne institucije iz gospodarstva, u aktivnosti projekta *CEEStructHealth* koje se odvijaju u okviru Centra uključeni su studenti preddiplomskih, diplomskih i poslijediplomskih studija kroz industrijsku praksu i terensku nastavu te izradu studentskih projekata, završnih radova, diplomskih radova i doktorskih disertacija. Tijekom trajanja projekta organiziraju se radionice i predavanja na kojima domaći i strani predavači educiraju studente i inženjere iz gospodarstva. Time se proširuju iskustva studenata tijekom njihovog obrazovanja povećanjem njihove mobilnosti sa sveučilišta u gospodarstvo. Osim toga, zajedničkim istraživanjima unapređuju se kompetencije inženjera iz gospodarstva, ali se istovremeno podiže i razina stručnog znanja istraživača s fakulteta usmjeravanjem istraživanja prema potrebama gospodarstva. Slika 3 prikazuje studente i članove projekta na stručnoj ekskurziji na Pometenom brdu u studenom 2013. godine, dok je fotografija s predavanja inženjera iz KETA studentima FSBa dana na slici 5.



Sl. 4 Stručna ekskurzija studenata i članova projekta na Pometeno brdo u studenom 2013.



Sl. 5 Predavanje inženjera iz KETA studentima FSBa

3.4. Jačanje nacionalne i međunarodne vidljivosti Centra

Cilj ove aktivnosti je objavljivanje rezultata projekta u časopisima [2, 3] te njihovo prezentiranje na znanstvenim i stručnim skupovima [4, 5, 6]. U svrhu promidžbe i vidljivosti projekta izrađena je mrežna stranica projekta koja je dostupna na adresi www.ceestructhealth.eu. Aktivnosti na projektu su usmjerene na uspostavu suradnje s novim partnerima iz gospodarstva te domaće i međunarodne znanstvene zajednice, zainteresiranih za suradnju u istraživanju i razvoju, odnosno za prijavu međunarodnih

znanstvenih projekata. Osim toga, cilj ove aktivnosti je promovirati važnost obnovljivih izvora energije u svakodnevnom životu na razini Republike Hrvatske. Radi se na organizaciji predavanja i seminara u svrhu promidžbe rezultata projekta.

4 OČEKIVANI REZULTATI

Očekuje se rješenje problema povezanih s određivanjem spektra opterećenja, opisivanjem ponašanja materijala uslijed promjenljivog opterećenja, procjenom oštećenja, kao i numeričkom simulacijom procesa deformiranja vjetroagregata. Rezultati istraživanja primijenit će se za optimiranje postojećih, kao i za razvoj novih vjetroelektrana većih snaga. Predložene metode verificirane na realnom objektu omogućit će kritičku analizu planiranog radnog područja vjetroagregata te njegovo proširenje ili suženje na osnovu rezultata projekta. To će doprinijeti povećanju pouzdanosti postojećeg prototipa vjetroagregata te će omogućiti optimalno planiranje kontrolnih pregleda. Provedenim istraživanjima proširit će se praktične i teorijske spoznaje suradnika na projektu što će predstavljati najveće postignuće projekta.

Predložena istraživanja u skladu su s razvojnim potrebama tvrtki KI i KET. Rezultati projekta omogućit će bolju osposobljenost domaće industrije u izgradnji vjetroagregata za proizvodnju električne energije uz vlastiti razvoj i izradu ključnih komponenata. Projekt će doprinijeti kvaliteti domaćeg proizvoda, a time podizanju konkurentnosti hrvatskog gospodarstva. Obzirom da je vjetroagregat vrlo složena dinamički opterećena konstrukcija, zaključci i rezultati ovog projekta moći će se primijeniti na većinu dinamički opterećenih mehaničkih konstrukcija.

5 ZAKLJUČAK

U radu je dan prikaz ciljeva, glavnih aktivnosti i očekivanih rezultata projekta "Centar izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija" financiranog iz sredstava Europske unije. Nakon prve godine realizacije projekta uspostavljena je suradnja između sveučilišta i gospodarstva osnivanjem Centra izvrsnosti za procjenu stanja konstrukcija te su izgrađeni kapaciteti Centra za analizu zamora materijala, kontrolu dinamičkog opterećenja te sustave upravljanja i mjerenja razvojem monitoring sustava za praćenje stanja vjetroagregata. Radi se na proširenju iskustava studenata, kao i na unapređenju kompetencija stručnjaka iz gospodarstva. Osim toga, aktivnosti su usmjerene na povećanje prepoznatljivosti Centra i njegovog potencijala za buduću suradnju sveučilišta i gospodarstva u području upravljanja i cjelovitosti složenih mehaničkih konstrukcija.

Zahvala

Koordinatori projekta se zahvaljuju svim članovima projekta na pomoći pri pisanju ovog članka.

Literatura

[1] Čanžar, P., Tonković, Z., Kodvanj, J. "Microstructure influence on fatigue behaviour of nodular cast iron", *Materials Science & Engineering A.*, **556**, 2012, 88-99.

- [2] Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J., "C1 Continuity Finite Element Formulation In Second-Order Computational Homogenization Scheme", Journal of Multiscale Modelling, **04**, 04, 2012, 19.
- [3] Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J., "A Second-Order Two-Scale Homogenization Procedure Using C1 Macrolevel Discretization", Computational Mechanics, 2014, DOI 10.1007/s00466-014-0995-3.
- [4] Hure, N., Vašak, M., Jelavić, M., Perić, N. "Wind Turbine Overspeed Protection Based on Robust Invariant Sets", EWEA 2014 Annual Event, Barcelona, 2014.
- [5] Lešić, V., Vašak, M., Perić, N., Jakopović, Ž., Joksimović, G., Wolbank, T., "Influence of Wind Turbine Generator Fault-tolerant Control on Power Production Quality", EWEA 2014 Annual Event, Barcelona, 2014.
- [6] Krstulović-Opara, L., Surjak, M., Vesenjani, M., Tonković, Z., Kodvanj, J., Domazet, Ž., "Comparison of Infrared and 3D Digital Image Correlation Techniques Applied for Mechanical Testing of Materials", 31th Danubia-Adria Symposium, Kempten University, Germany, 2014.

Autori:

Zdenko Tonković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-450, fax. 01/6168-187, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr, web: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>

Mario Vašak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000 Zagreb, tel. i fax. 01/6129-821, e-mail: mario.vasak@fer.hr,

Ivica Kožar, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-900, fax. 051/265-998,

Predrag Čanžar, KONČAR - Institut za elektrotehniku d.d., Zavod za sklopne aparate i postrojenja, Fallerovo šetalište 22, 10 002 Zagreb, tel. 01/3656-299, fax. 01/3667-334, e-mail: pcanzar@koncar-institut.hr

PRIMJENA METODE KONAČNIH TRAKA U ANALIZI POKRETNOG OPTEREĆENJA

Torić Malić, N. i Kožar, I.

Sažetak: U radu je prikazana primjena metode konačnih traka u analizi pokretnog opterećenja na konstrukciju, odnosno u analizi interakcije vozila i mostovnih konstrukcija.

Analiza pokretnog opterećenja na konstrukciju je vrlo kompleksan zadatak, jer uključuje analizu dva različita dinamička sustava, te njihovu međusobnu interakciju. Budući da opterećenje mijenja svoj položaj u vremenu, mijenjaju se u svakom vremenskom trenutku i karakteristične matrice sustava. Ukoliko se želi što detaljnije modelirati i konstrukcija i opterećenje, primjena metode konačnih elemenata nije praktična zbog velikog broja stupnjeva slobode sustava, što uz ažuriranje matrica sustava u svakom vremenskom koraku rezultira vrlo zahtjevnim i dugotrajnim proračunom. U nekim slučajevima, kao npr. kod masivnih mostova malih raspona, stupnjevi slobode se mogu reducirati tretiranjem vozila kao vrlo jednostavnog dinamičkog opterećenja (pomična sila ili pomična sila s masom). No, kod fleksibilnih konstrukcija opterećenih teškim vozilima malih brzina, vrlo je važno detaljno uzeti u obzir sve dinamičke karakteristike i stupnjeve slobode vozila. Metoda konačnih traka to omogućava, kao i modeliranje konstrukcije uzimajući u obzir oblik njenog poprečnog presjeka.

Načinjena je usporedba različitih modela pokretnog opterećenja, te parametarska analiza na primjeru plošnog nosača opterećenog teškim vozilima sa tri i pet osovina. Model je verificiran usporedbom sa rezultatima mjerenja, kao i onima preuzetim iz literature.

Ključne riječi: *pokretno opterećenje, metoda konačnih traka, interakcija vozila i konstrukcije, opterećenje od vozila*

1 UVOD

Problem pokretnog opterećenja se može se podijeliti na tri segmenta: modeliranje opterećenja, modeliranje konstrukcije i sprezanje ova dva modela koji su u kontaktu, što čini ovaj zadatak vrlo složenim. Problem je nelinearne prirode i svodi se na simultano rješavanje sustava više zavisnih diferencijalnih jednadžbi, zahtijevajući primjenu numeričkih metoda. Metoda konačnih elemenata, koja se najviše primjenjuje kod većine inženjerskih problema zbog svoje svestranosti, ovdje zapravo, nije pogodna iz više razloga. Prvi je taj što prilikom diskretizacije stvarne konstrukcije daje veliki broj nepoznanica i matrice velikih dimenzija koje su nepraktične za rješavanje. Drugi nedostatak ove metode je taj što opterećenje u svakom trenutku mijenja svoj položaj, te je uz već opsežan izračun u svakom vremenskom trenutku potrebno odrediti i položaj opterećenja, odnosno konačni element na kojem se opterećenje trenutno nalazi. Ukoliko se pokretno opterećenje modelira na isti način, dobivaju se sustavi koji su vremenski i računalno vrlo zahtjevni za rješavanje. Ovaj problem su mnogi autori u svojim radovima rješavali znatnom redukcijom stupnjeva slobode opterećenja ili konstrukcije, a često i jednog i drugog. Nameće se pitanje koliko su takvi modeli i analize vjerodostojni i daju li objektivian uvid u ponašanje konstrukcija i vozila.

Konstrukcija se najčešće idealizira grednim nosačem prema Euler-Bernoulli ([3],[5],[7]) ili Timoshenkovoj teoriji savijanja grednih nosača ([8],[6]). Drugi način je modeliranje konstrukcije kao plošnog nosača prema Mindlinovoj ili Kirchhoff-Love teoriji savijanja plošnih nosača ([1],[2]).

Najjednostavniji model pokretnog opterećenja, model pokretne sile ([4]) primjenjuje se u slučaju da se radi o vozilima malih masa i dimenzija. Kod vozila većih dimenzija, gdje se prijenos opterećenja ne može odvijati preko jedne točke, jednu silu zamjenjuje niz pokretnih sila na konstantnom razmaku prema udaljenosti osovina vozila. Kod ovakvih vozila, masa ima veći značaj od njegovih dimenzija, te ona može biti veličinom usporediva s masom konstrukcije. Tada ju je potrebno uzeti u obzir, zbog inercijalnih učinaka na konstrukciju ([10]). Masa vozila se obično tretira kao kontinuirana ili koncentrirana, konstantnog ili promjenjivog položaja u vremenu ([3][5]). Oba navedena modela vozila zapravo predstavljaju čisto opterećenje na konstrukciju, gdje su potpuno zanemarene dinamičke karakteristike vozila i interakcija vozila i konstrukcije. Prvi model koji uzima u obzir neke od dinamičkih karakteristika vozila je masa sa elastičnom oprugom i prigušivačem, što predstavlja pokretni oscilator ([8][4][9]). Pokretni oscilator može imati do dva stupnja slobode i predstavlja bazu za razvoj složenijih modela vozila sa više stupnjeva slobode.

U ovom radu dana je usporedba različitih modela vozila koji djeluju na konstrukciju, te zaključak o tome da li redukcija stupnjeva slobode modela pokretnog opterećenja utječe na rezultate i do koje mjere.

2 MODELI POKRETNOG OPTEREĆENJA

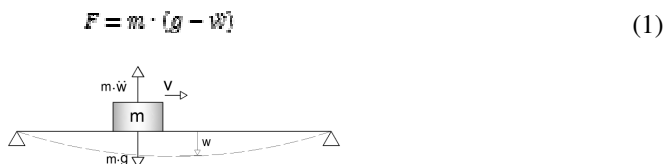
2.1 Pomična sila

Pomična sila se može opisati Dirac-ovom funkcijom preko Kronecker-ovog δ operatora u obliku $\delta(x-vt)$, gdje je v brzina pokretne sile. Opterećenje pomičnom silom je tada:

$$P = F(t)\delta(x - \gamma)\delta(y - vt)$$

2.2 Pomična masa

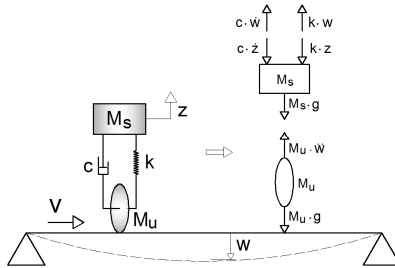
Pokretna masa, za razliku od pokretne sile uzima u obzir inercijalno djelovanje na konstrukciju. Pretpostavlja se da pokretno opterećenje djeluje na konstrukciju u samo jednoj točki, kao i kod pokretne sile, sl. 1.



Sl. 1. Pokretna masa s pripadajućim silama

2.3 Četvrtinski model vozila (oscillator)

Najjednostavniji model pokretnog opterećenja koji uzima u obzir dinamičke karakteristike vozila čine dvije koncentrirane mase povezane elastičnom oprugom i prigušivačem ([4]) prikazan na sl. 2.



Sl. 2. Model pokretnog oscilatora s pripadajućim silama

Masa M_s predstavlja masu vozila i povezana je s masom M_u elastičnom oprugom koja je oslonjena na podlogu i predstavlja masu ovsesa i kotača vozila.

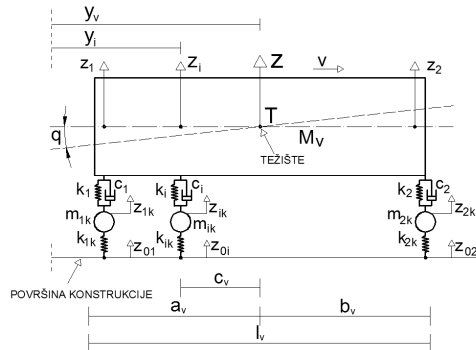
Dinamička sila je u parcijalnu diferencijalnu jednadžbu uvedena preko veličine P :

$$P = F_M + F_I + F_D \quad (2)$$

Kao što se vidi iz priloženog, dinamička sila se sastoji iz tri dijela: gravitacijskog djelovanja mase na konstrukciju - F_M , inercijalnih učinaka mase - F_I i sile u elastičnoj opruzi i prigušivaču - F_D .

2.4 Polovinski model vozila

Osnovni 2D model vozila ima 4 stupnja slobode ([4]). Na sl. 3. dan je prikaz modela. M_v predstavlja masu vozila s teretom i ima dva stupnja slobode: vertikalni pomak z i rotaciju poprečne težišne osi θ .



Sl. 3. Polovinski model vozila

Mase m_{1k} i m_{2k} predstavljaju mase osovina i pripadajućih kotača i imaju po jedan stupanj slobode – vertikalni pomak z_{1k} i z_{2k} , što skupa s dva stupnja slobode mase vozila, čini ukupno 4 stupnjeva slobode. z_{01} i z_{02} su pomaci kotača. I_θ je moment tromosti vozila u odnosu na uzdužnu težišnu os. Jednadžbe gibanja vozila sa n opruga u općenito glase:

$$M_v \cdot \ddot{z} + \sum_{i=1}^n k_i (z - z_{ik} + \theta(y_i - y_i)) = -M_v g \quad (3)$$

$$I_\theta \cdot \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^n k_i (z - z_{ik} + \theta(y_i - y_i)) (y_i - y_i) = 0 \quad (4)$$

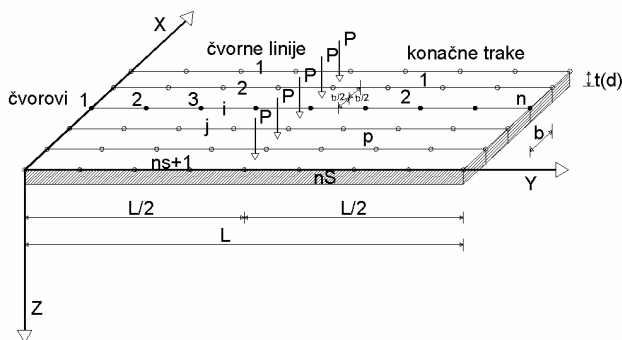
$$m_{iR} \cdot \ddot{z}_{iR} - k_i(z - z_{iR} + \theta(y_L - y_i)) - k_{iR} \cdot z_{\theta i} \quad (5)$$

3 KONAČNI TRAKASTI ELEMENT

Klasična metoda konačnih traka reducira dvodimenzionalni problem na jednodimenzionalni, primjenom separacije varijabli. Funkcije oblika za interpolacijske varijable dane su kao ([2]):

$$\delta = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m(y) \quad (6)$$

U gornjem izrazu δ je vektor čvornih parametara, $f_m(x)$ predstavlja polinomne izraze sa neodređenim konstantama za m-ti član reda, dok je $Y_m(y)$ red koji zadovoljava rubne uvjete u y smjeru. r predstavlja ukupan broj članova reda koji se uzimaju u obzir. Diskretizacija ploče trakama prikazana je na sl. 4. Interpolacijske funkcije su trigonometrijske funkcije u uzdužnom i Hermitovi polinom u poprečnom smjeru.



Sl. 4. Prikaz spajanja više konačnih traka duž čvornih linija

4 NUMERIČKI PRIMJERI

Analizirano je pet tipova pokretnog opterećenja: pokretna sila, pokretna masa, pokretna masa s oprugom - oscilator (2 stupnja slobode), polovinski model vozila (4 stupnja slobode) i puni model vozila (7 stupnjeva slobode). U tab. 1.–2. dani su podaci o analiziranim modelima konstrukcije i opterećenja.

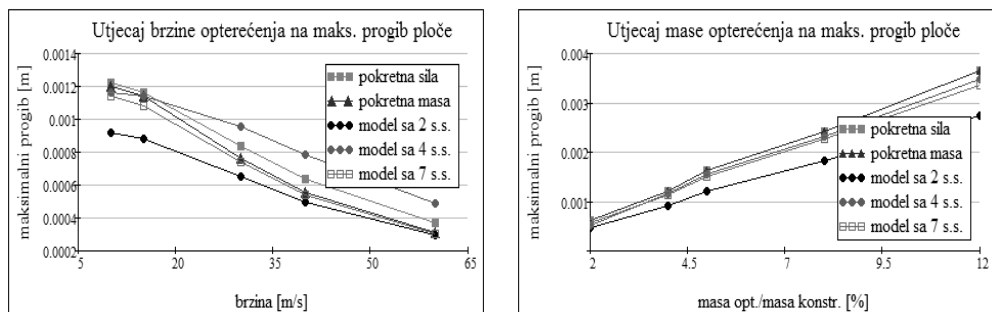
Model konstrukcije	L [m]	b [m]	h [m]	E [N/m ²]	ρ [kg/m ³]	v	I [m ⁴]
ploča	30	10	1.5	$3.5 \cdot 10^{10}$	2500	0.2	2.67

Tab. 1. Podaci o konstrukciji

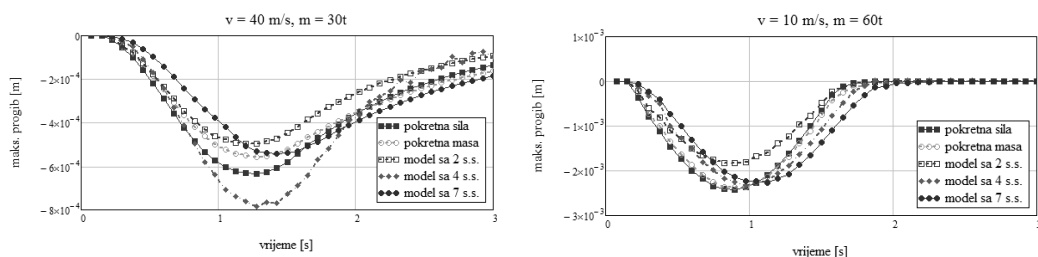
Model	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	e [m]	Masa	Krutost
Pokretna sila	–	–	–	–	–	–	–
Pokretna masa	–	–	–	–	–	$4.5 \cdot 10^4$	–
Model s 2 s.s.	–	–	–	–	–	$4.5 \cdot 10^4$	$8.5 \cdot 10^5$
Model s 4 s.s.	2.4	1.05	2.4	–	–	$4.5 \cdot 10^4$	$8.5 \cdot 10^5$
Model sa 7 s.s.	2.4	1.05	2.4	1.0	1.0	$4.5 \cdot 10^4$	$8.5 \cdot 10^5$

Tab. 2. Dimenzije i opterećenje za modele vozila

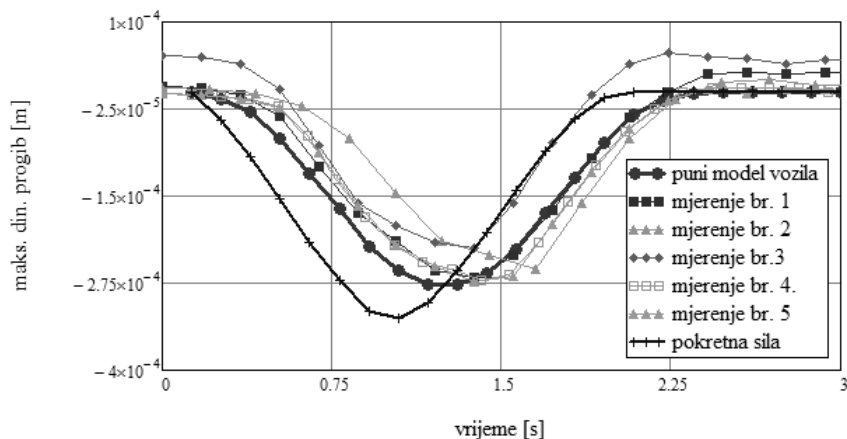
Na sl. 5. i 6. prikazan je utjecaj mase i brzine vozila kod pojedinih modela na promjenu maksimalnog progiba ploče.



Sl. 5. Prikaz utjecaja brzine i mase pokretnog opterećenja na maksimalni progib ploče



Sl. 6. Usporedba maksimalnih progiba u vremenu



Sl. 7. Usporedba izmjereno i izračunatog dinamičkog progiba cestovnog mosta

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu primijenjena je metoda konačnih traka na analizu interakcije vozila i konstrukcije u svrhu detaljnijeg modeliranja i konstrukcije i opterećenja. Iako je konstrukcija modelirana kao slobodno oslonjena ploča, ovdje prikazani model za analizu

omogućuje analizu složenih konstrukcija. Za razliku od ostalih modela čije ponašanje je različito u odnosu na mjerene podatke, puni model vozila tretira vozilo kao zaseban dinamički sustav sa svim njegovim dinamičkim karakteristikama i gibanjem u svim ravninama, te rezultate koji pokazuju dobro slaganje sa mjerenima, sl. 7. Za vrlo malu vrijednost odnosa mase opterećenja i konstrukcije ($< 0,03$ ili 3%) svi modeli imaju približno isti dinamički faktor utjecaja, dok za veći odnos mase (već od 5% nadalje), sl. 5. i 6. rezultati se značajno razlikuju, i tu se uočava prednost složenijih modela, posebice punog modela vozila (sa 7 stupnjeva slobode). Veći broj stupnjeva slobode značajno utječe na interakcijske sile, koje su bitne za međudjelovanje i detaljnije modeliranje kontakta između konstrukcije i vozila. Primjena metode konačnih traka ovdje je omogućila direktno dobivanje kontaktnih sila, istovremeno s progibima, vertikalnim brzinama i ubrzanjima na konstrukciji i vozilu.

Zahvala

Rad prezentiran na Šestom susretu Hrvatskoga društva za mehaniku načinjen je u okviru znanstvenoistraživačkog projekta „Multi-rezolucijsko modeliranje konstrukcija s parametarskom identifikacijom“ br. 13.05.1.1.02 financiran od strane Sveučilišta u Rijeci.

Literatura:

- [1] Agrawal, O.P., Stanišić, M.M., Saigal S., “Dynamic responses of orthotropic plates under moving masses”, *Archieve of Applied Mechanics*, 2004, 58, str 9-14.
- [2] Cheung, Y.K., Li, W, Chidiac, S.E., “Finite Strip Method Analysis of Bridges“, E&FN Spoo, an imprint of Chapman & Hall, London, 1996
- [3] Dehestani, M. , Mofid, M., Vafai, A., “Investigation of critical influential speed for moving mass problems n beams“, *Applied Mathematical Modelling*, 2009, Vol.33, str. 3885–3895.
- [4] Fryba, L., “Vibration of Solids and Structures under Moving Loads“, Prague: Thomas Telford, 1999 (1972 first edition), str. 94-156.
- [5] Kožar, I., “Security aspects of vertical actions on bridge structure: comparison of earthquake and vehicle induced dynamical forces“, *Engineering Computations*, 2009, Vol.26(1), str. 155-165.
- [6] Moghaddas, M., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E. and Khosravi, P., “Finite element analysis of a Timoshenko beam traversed by a moving vehicle“, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2009, Vol.223, str. 231-243.
- [7] Siddiqui, S.A.Q., Golnaraghi, M.F., Heppler G.R., “Large free vibrations of a beam carrying a moving mass“, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, Vol.38, str. 1481 – 1493.
- [8] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., “Theory of Plates and Shells“, McGraw-Hill, 1959
- [9] Torić Malic, N., Kožar, I., “Vehicle strip element in the analysis of stiffened plate under realistic moving loading“, *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part K: Journal of Multy-body Dynamics*, 2012, Vol.226(4), str. 374-384.
- [10] Yang, Y.B., Yan, J.D., Wu, Y.S., “Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Application to High Speed Railways“, World Scientific Publishing, London, 2004

Autori:

Neira Torić Malić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-994, e-mail: neira.toric@gradri.uniri.hr, web stranica: <https://portal.uniri.hr/portfelj/ntoric@uniri.hr>
Ivica Kožar, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-993, e-mail: ivicak@gradri.hr, web stranica: <https://portal.uniri.hr/portfelj/ivica.kozar@gradri.hr>

NUMERIČKI MODEL PROSTORNE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE URONJENE U MORE

Travaš, V.

Sažetak: Rad prikazuje odabrane aspekte numeričkog modela koji bi iz ove rane faze razvijanja u dogledno vrijeme trebao prerasti u model za računalno simuliranje interakcije mora i prostornih rešetkastih *offshore* konstrukcija (eng. compliant tower). U tu svrhu je razvijena numerička okosnica unutar koje se stohastička narav morskog okruženja generirana sintetički tj. iz funkcije gustoće spektra valova. Opterećenje vjetrovnih morskih valova se potom definira uz pretpostavku da se uronjeni elementi konstrukcije mogu iz hidrauličke perspektive kategorizirati kao transparentni objekti. Navedeno opravdava Morisonov model sile u kojem se kinematički parametri toka u ovoj preliminarnoj fazi definiraju iz usvojene linearne teorije valova (uvažavajući utjecaj vjetra na izmjenu polja brzine unutar Ekmanovog sloja). Prostorna rešetkasta konstrukcija se trenutno modelira samo linearno elastičnim štapnim elementima te se uvjeti dinamičke ravnoteže definiraju na nedeformiranoj konstrukciji. Vremenska integracija jednadžbi gibanja se provodi Newmarkovom β metodom. Rezultirajući numerički algoritam je preveden u računalni kod koji je implementiran u programski paket MathCAD 15 i korišten u svrhu izrade numeričkog primjera. Numerički primjer uključuje analizu slobodnih i prisilnih oscilacija konstrukcije te FFT analizu zapisa pomaka težišta platforme u vremenskoj domeni dinamičke analize.

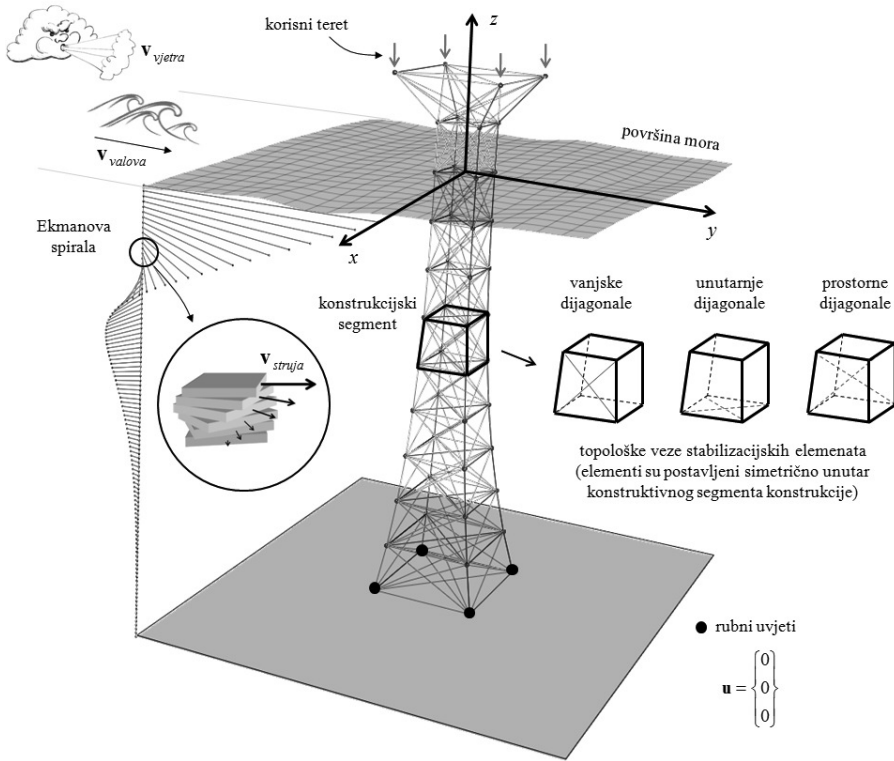
Ključne riječi: statička analiza, dinamička analiza, modalna analiza, prostorna rešetka, hidrodinamičko opterećenje mora

1 UVOD

U radu su ukratko opisani odabrani aspekti kompletiranog dijela numeričkog modela koji se još uvijek razvija u svrhu modeliranja interakcije mora i prostornih rešetkastih *offshore* konstrukcija. Dosadašnje razvojne aktivnosti su se većim dijelom odnosile na definiranje vektora vanjskog opterećenja $\mathbf{F}_v(t)$ te je modelu konstrukcije privremeno predana manja pažnja. Navedeno je rezultiralo time da se prostorna rešetkasta konstrukcija dosad modelirala linearno-elastičnim štapnim elementima te da se u svakom vremenskom koraku Δt uvjeti dinamičke ravnoteže definiraju na nedeformiranoj konstrukciji. Drugim riječima, segmenti numeričkog modela koji još uvijek nedostaju se odnose na materijalnu i geometrijsku nelinearnost, ali i na kontaktnu nelinearnost koja se namjerava implementirati u svrhu definiranja krutosti podloge [11]. Na Slici 1 je prikazan primjer modela rešetkaste konstrukcije postavljen u hidrodinamički i aerodinamički aktivnu sredinu.

2 STATIČKA ANALIZA

Statička analiza konstrukcije se provodi u svrhu inicijalizacije dinamičkog proračuna odnosno u svrhu definiranja početnih uvjeta za polje pomaka konstrukcije $\mathbf{u}(x, y, z, t = 0)$



Sl. 1: Primjer modela prostorne rešetkaste konstrukcije. Kako bi se olakšalo provođenje parametarskih analiza, putem kojih bi se tražilo optimalno konstrukcijsko rješenje, zadavanje rešetkaste konstrukcije se parametriziralo tako da se ista trenutno može definirati nizom parametara, između kojih postoje oni koji kontroliraju topološku strukturu rešetke i oni koji definiraju geometrijske značajke konstrukcijskih elemenata (na globalnoj razini i lokalnoj razini unutar koje se definiraju debljine stjenki konstrukcijskih elemenata). Praktični značaj uvedene parametrizacije se već prepoznao u određivanju poprečnih presjeka štapova koji će osigurati da se prvi i drugi modalni ton konstrukcije nalaze izvan domene naprijed zadanog spektra vjetrovnih valova.

i polje unutarnjih sila $\mathbf{F}_u(x, y, z, t = 0)$. U fizikalnom smislu ovakve okolnosti odgovaraju konstrukciji uronjenoj u morsku sredinu u kojoj nema morskih struja (odnosno transporta morske mase) i nema vjetrovnih i drugih valova (odnosno transporta energije). Isključujući ove dinamičke utjecaje, konstrukcija se opterećuje vektorom $\mathbf{F}_v(x, y, z)$ koji uključuje stalni i korisni teret te uzima u obzir uzgonsku silu na uronjene elemente konstrukcije i eventualnu stratificiranost morske sredine. Rubni uvjeti na kontaktnu konstrukciju i temeljnog tla se trenutno zadaju u obliku idealno krute veze odnosno na način da se sudjelujućim stupnjevima slobode spriječe svi pomaci (Sl. 1).

3 DINAMIČKA ANALIZA

Dinamička analiza se svodi na rješavanje jednadžbe

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_v(t), \quad (1)$$

u kojoj je \mathbf{M} globalna matrica masa, \mathbf{C} globalna matrica Rayleighovog viskozno prigušenje, \mathbf{K} globalna matrica krutosti te $\ddot{\mathbf{u}}$ i $\dot{\mathbf{u}}$ karakteristične vremenske derivacije pomaka \mathbf{u} [11, 12]. Vremenska integracija jednadžbe (1) se provodi Newmarkovom β metodom [11]. Pritom, obzirom da se trenutno radi samo o linearno-elastičnoj analizi konstrukcije, matricu \mathbf{K}^{-1} je potrebno odrediti samo jedanput, što za razliku od definiranja vektora $\mathbf{F}_v(t)$ na desnoj strani ne predstavlja značajan utrošak računarske snage. Elementi ovog drugog, trenutno računski zahtjevnijeg postupka, se izlažu u nastavku [6].

3.1 Modeliranje morskih valova

Modeliranje dinamike morskih valova se temelji na spektralnoj metodi gdje se gibanje površine mora tumači kao ishod superpozicije mnogo faznih monokromatskih komponenti valovanja (harmonijskih komponenti). U tu svrhu se zadaje funkcija gustoće spektra valova $S(\omega)$ odnosno funkcija distribucije valnih energija po različitim frekvencijama ω prisutnih faznih komponenti. Trenutno je implementiran Tabainov valni spektar

$$S(\omega) = 0.862 \frac{0.0135g^2}{\omega^5} \exp\left(\frac{5.186}{H_s^2\omega^4}\right) \gamma^{p(\omega)}, \quad (2)$$

u kojem je g ubrzanje sile teže, H_s značajna visina vala, γ parametar koji utječe na širinu spektra te $p(\omega)$ funkcija koja definira oblik spektra [9]. Generiranje površine mora se provodi superponirajući fazne komponente n dobivene diskretizacijom spektra $S(\omega)$ na N ekvidistantnih dijelova širine $\Delta\omega$. Pritom, u svrhu generiranja grupe valova, za svaku faznu komponentu n se nekom statističkom raspodjelom generira fazni odmak Θ_n i smjer napredovanja definiran kutom θ_n . Kako se amplituda pojedine faze $A(\omega_n)$ iz spektra $S(\omega)$ može definirati u obliku $\sqrt{2S(\omega_n)\Delta\omega}$, uzdignuće vodene površine η na koordinatni (x, y) u trenutku t slijedi iz principa superpozicije u obliku

$$\eta = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sqrt{2S(\omega_n) M(\theta_m) \Delta\omega \Delta\theta} \cos(k_n(x \cos \theta_m + y \sin \theta_m) - \omega_n t + \Theta_{n,m}), \quad (3)$$

gdje je $M(\theta)$ funkcija rasipanja energije zadana u rasponu kuta napredovanja faznih komponenti te k_n valni broj fazne komponente n [10]. Za definiranje komponenti brzine \mathbf{v} i ubrzanja mora \mathbf{a} na kontaktu s konstrukcijom, trenutno se koristi linearna teorija valova [5]. Na taj način se horizontalne komponente v_x i v_y brzine mora mogu izraziti u obliku

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^n A_n \omega_n \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \cos(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \begin{Bmatrix} \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

vertikalna komponenta v_z u obliku

$$v_z = \sum_{n=1}^n A_n \omega_n \frac{\sinh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \sin(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n), \quad (5)$$

te komponente akceleracije $\dot{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$ kao vremenske derivacije komponenti brzine.

3.2 Modeliranje morskih struja

U svrhu kvantificiranja utjecaja vjetra na izmjenu polja brzine $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ispod površine mora, a ne samo na generiranje kratkoperiodičnih površinskih valova, potrebno je riješiti reducirani i modificirani sustav Navier-Stokesovih jednadžbi

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - f v_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z(z) \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + f v_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z(z) \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad (6)$$

u kojima f označava Coriolisov parametar za lokalnu geografsku širinu te $A_z(z)$ koeficijent vertikalne turbulentne difuzivnosti mora. Naime, djelovanje vjetra na površinu mora se očituje u sili trenja koja uslijed viskoznosti mora uzrokuje promjenu količine gibanja čestica mora i ispod same površine. U tu svrhu se sustav (6) rješava za rubni uvjet zadanog posmičnog naprezanja τ na kontaktu mora i zraka

$$\left(A_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\tau_{xz}(t)}{\rho(z=0)} \quad \text{i} \quad \left(A_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\tau_{yz}(t)}{\rho(z=0)}, \quad (7)$$

te rubni uvjet $(v_x, v_y) \rightarrow 0$ kada $z \rightarrow -\infty$. Rješenje sustava (refje:Ekman) definira Ekmanovu spiralu odnosno vertikalni profil brzine koji nastaje kao rezultat dinamičkog uravnoteženja lokalne Coriolisove sile i sile trenja na površini mora (Sl. 1). Kako za stratificiranu morsku sredinu nisu poznata zatvorena rješenja, za zadani profil vertikalne difuzivnosti $A_z(z)$ i gustoće $\rho(z)$, integracija sustava (6) se u izrađenom numeričkom modelu provodi metodom konačnih razlika. Pritom, iako je moguće reproducirati dinamiku razvoja Ekmanove spirale, koja nastaje kao posljedica izmjene smjera puhanja vjetra, vertikalni raspored komponenti spirale $(v_x(z), v_y(z))$ se u dinamičkoj analizi konstrukcije usvaja konstantnim i jednakim onim koji se za neki konstantni smjer puhanja vjetra u dovoljno dugom vremenskom periodu uravnotežuje s lokalnom Coriolisovom silom.

3.3 Ukupno hidrodinamičko opterećenje

Ukupno hidrodinamičko opterećenje na štapove konstrukcije se definira sperponirajući polje brzine uzrokovano morskim valovima i polje brzine uzrokovano morskim strujama [3, 4]. Pritom, utjecaj viskoznih sila se zanemaruje pa se na taj način za svaki štap uzima u obzir samo okomita komponenta brzine \mathbf{v}_n i ubrzanja \mathbf{a}_n

$$\vec{\bullet}_n = \begin{pmatrix} 1 - C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_x C_y & 1 - C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & 1 - C_z^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bullet_x \\ \bullet_y \\ \bullet_z \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

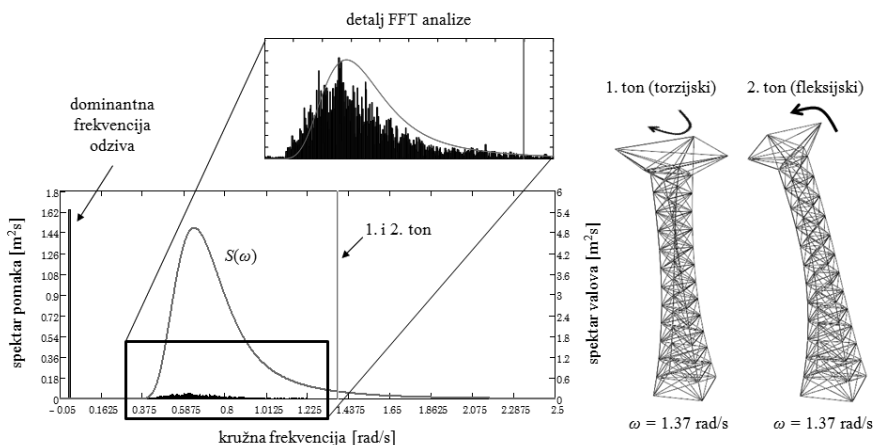
gdje C_x, C_y i C_z predstavljaju kosinuse smjerova štapa [12]. Uz pretpostavku da se štapovi konstrukcije mogu kategorizirati kao hidraulički transparentni objekti, kvantifikacija hidrodinamičkog djelovanja mora na segment istih ds se nadalje provodi Morisonovim modelom sile [8]

$$d\mathbf{F} = \left(\rho \frac{D^2 \pi}{4} C_m \mathbf{a}_n - (C_m - 1) \rho \frac{D^2 \pi}{4} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{D}{2} C_d (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{u}}_n) |\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{u}}_n| \right) ds, \quad (9)$$

u kojem je C_m koeficijent inercije i C_d koeficijent otpora oblika. Vektor sile \mathbf{f} koji djeluje na štap slijedi iz integracije doprinosa $d\mathbf{F}$ po dužini štapa i interpolacije dobivene vrijednosti u krajeve istog. Vektor vanjskog opterećenja \mathbf{F}_v slijedi iz sume svih vektora \mathbf{F} napisanih u globalnim koordinatama.

4 NUMERIČKI PRIMJER

Numerički primjer se provodi za rešetkastu konstrukciju prikazanu na Slici 1. Pritom, kako bi detaljno izlaganje svih ulaznih parametara modela iziskivalo veći tabelarni iskaz, isto će se ovdje izostaviti te će više o ovom parametrima biti rečeno na kongresnom izlaganju. Od mjerodavnih parametara se može navesti da se radi o rešetkastoj konstrukciji koja je temeljena u moru dubine 100 m i u okruženju u kojem vjetar dostiže brzinu od 30 m/s generirajući valove s značajnom visinom H_s do 5 m. Modalnom analizom je utvrđeno da prvi mod (torzijski) ima frekvenciju od 1.37 rad/s, a drugi mod frekvenciju od 1.37 rad/s (fleksijski). Na Slici 2 je prikazana usporedba usvojenoga valnog spektra $S(\omega)$ i spektra odziva konstrukcije. Numerički primjer će se detaljnije izložiti u sklopu kongresnog izlaganja, a bazirati će se na sličnim primjerima iz literature [1, 2, 7].



Sl. 2: Odabrani dio rezultata numeričkog primjera.

5 ZAVRŠNI KOMENTARI

Prikladno je spomenuti da dio motivacije za izradu ovdje ukratko izloženog numeričkog modela proizlazi iz skore realizacije projekta "Razvoj istraživačke infrastrukture na Kampusu Sveučilišta u Rijeci" unutar kojeg će se putem Europskih fondova namijenjenih za regionalni razvoj opremiti laboratoriji Građevinskog fakulteta u Rijeci. Naime, između ostalog, hidrotehnički laboratoriji se u sklopu navedeno namjerava opremiti računalno kontroliranim segmentnim generatorom valova montiranim na eksperimentalni bazen koji će na taj način omogućiti sagledavanje ovakvih dinamičkih sustava iz eksperimentalne perspektive. Dakle, osim intervencija koje će se prvenstveno odnositi na proširenje kataloga konačnih elementa (uvodeći tročvorne Timošenkovske gređne elemente te četverokutne pločaste konačne elemente) i implementiranja geometrijske, materijalne i kontaktne nelinearnosti; nastavak razvoja numeričkog modela će u jednom trenutku dovesti do postavljanja rezultata numeričke analize pred eksperimentalnu kušnju.

Literatura

- [1] Adrezin, R., Bar-Avi, P., Benaroya, H., “Dynamic Response of Compliant Offshore Structures - Review”, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 9, 1996, str. 114–131.
- [2] Clauss, G., Lee, J., “Dynamic Behaviour of Compliant Towers in Deep Sea”, *Proceedings of OMAE03, 22 nd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2003.
- [3] Haritos, N., “Introduction to the Analysis and Design of Offshore Structures– An Overview”, *EJSE Special Issue: Loading on Structures*, 2007, str. 55–65.
- [4] Journee, J.M.J., Massie, W.W., “Offshore Hydromechanics”, *Delft University of Technology*, 2001.
- [5] Kim, C., “Nonlinear Waves and Offshore Structures (Advanced Series on Ocean Engineering)”, *World Scientific*, 2008.
- [6] Kurian, V., Ng, C., Liew, M., “Dynamic Responses of Truss Spar Due to Wave Actions”, *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, Vol. 6, 2013, str. 812–818.
- [7] Mohamad, A.A., Al-Kadhimi, A., Shaker, M., “Dynamic Behavior of Jacket Type Offshore Structure”, *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol. 6, 2012, str. 418–435.
- [8] Morison, J.R., Johnson, M.O.J.W., Schaaf, S.A., “The force exerted by surface waves on piles”, *Petroleum Transactions (American Institute of Mining Engineers)*, Vol. 189, 1950, str. 149–154.
- [9] Tabain, T., “Standard Wind Wave Spectrum for the Adriatic Sea Revisited (1977-1997)”, *Brodogradnja*, Vol. 45(4), 1997, str. 303–313.
- [10] Travas, V., Krvavica, N., “Spektralni i monokromatski pristup definiranju hidrodinamičkog opterećenja na vertikalne pilote”, *Hrvatske vode*, Vol. 22, 2014, str. 13–22.
- [11] Wilson, E., “Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures”, *Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA*, 1995.
- [12] Zienkiewicz, O., Lewis, R., Stagg, K., “Numerical Methods in Offshore Engineering”, *Wiley*, 1978.

Autor

Vanja Travaš, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Katedra za hidrotehniku, Radmile Matejčić 3, tel. 051/265-983, e-mail: vanja.travas@uniri.hr

PRIMJENA NAVAL HYDRO PAKETA ZA DVOFAZNA STRUJANJA

Vukčević, V. i Jasak, H.

Sažetak: Ovaj rad prikazuje pregled primjene *NavalHydro* paketa u programu OpenFOAM za simulacije viskoznih, turbulentnih, dvofaznih strujanja sa slobodnom površinom. Za praćenje slobodne površine se koristi "Volume of Fluid" metoda, te se numerički proračuni vrše metodom kontrolnih volumena. Programski paket *NavalHydro* omogućava različite vrste simulacija vezane za brodsku hidrodinamiku, kao i za ostala područja gdje postoje dominantna strujanja sa slobodnom površinom. U ovom radu su ukratko prikazani primjeri otpora broda na mirnom moru, kao i gibanje broda kao krutog tijela na valovima. Također je prikazana simulacija kolapsa brane u kojoj vodeni val udara nepomičan, kruti stup.

Ključne riječi: Metoda kontrolnih volumena, Navier – Stokesove jednadžbe, dvofazna strujanja, OpenFOAM

1 UVOD

Brzi razvoj računalnih resursa u zadnjih 20 godina je omogućio primjenu računalne mehanike fluida (eng. Computational Fluid Dynamics, CFD) u brodograđevnoj industriji. Strujanja u brodskoj hidrodinamici su nestlačiva, viskozna, dvofazna, turbulentna i često nestacionarna. U programu OpenFOAM [1] je razvijen *NavalHydro* paket, te su njegove mogućnosti ukratko prikazane.

U sljedećem poglavlju prikazan je matematički model spomenutih strujanja. Treće poglavlje ukratko opisuje numeričku implementaciju metode kontrolnih volumena (eng. Finite Volume Method, FVM) i algoritam rješavanja sprege brzine i tlaka. U sljedećim poglavljima su prikazani rezultati simulacija: otpor broda na mirnom moru, gibanje broda kao krutog tijela na valovima, te kolaps brane u kojoj vodeni val udara nepomičan stup.

2 MATEMATIČKI MODEL

U ovom poglavlju je prikazan matematički model nestlačivog, dvofaznog strujanja s "Volume of Fluid" (VOF) metodom za praćenje slobodne površine.

2.1 Navier – Stokesove jednadžbe i jednadžba kontinuiteta

Dvofazno, nestlačivo i turbulentno strujanje se često modelira jednadžbom kontinuiteta (1) i Navier – Stokesovim jednadžbama (2) [2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \mu_{eff} + \sigma \kappa \nabla \alpha, \quad (2)$$

gdje su: \mathbf{U} brzina, p tlak, te ρ i μ_{eff} gustoća i dinamička viskoznost, redom. \mathbf{g} predstavlja gravitacijsku akceleraciju. σ i κ su redom koeficijent površinske napetosti i srednja zakrivljenost slobodne površine. α je indikatorska (VOF) funkcija koja će biti objašnjena u sljedećem poglavlju.

2.2 VOF jednadžba

Gornje jednadžbe bi se trebale riješiti za obje faze (vodu i zrak), zadovoljavajući rubne uvjete na slobodnoj površini. Da bi se izbjegla takva procedura, uvodi se dodatna VOF jednadžba pomoću koje je moguće fluid modelirati kao jedan kontinuum mješovitih svojstava. Polje gustoće i viskoznosti se mogu izraziti prema:

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2, \quad (3)$$

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2. \quad (4)$$

U gornjim jednadžbama indeks 1 predstavlja vodu, a indeks 2 zrak. α ima vrijednost 1 u vodi, te vrijednost 0 u zraku. Transportna jednadžba je sljedećeg oblika:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\alpha(1 - \alpha)\mathbf{U}^r) = 0. \quad (5)$$

Prva dva člana predstavljaju uobičajenu advekcijску jednadžbu, dok je zadnji član dodan da bi se zadržao oštar prijelaz između dvaju fluida [3].

2.3 Modeliranje turbulencije

Najčešće korišteni modeli turbulencije su modeli turbulentne viskoznosti [4] s dvije jednadžbe. Takvi modeli rješavaju dvije dodatne parcijalne diferencijalne transportne jednadžbe koje imaju naglašen lokalni karakter. Dodavanje takvih jednadžbi vodi do produljenja proračuna od svega 2 do 5%. $k - \omega SST$ [5] model je korišten u ovom radu. Nakon rješenja jednadžbi, turbulentna kinetička energija k i specifična disipacija ω su poznati, te služe za proračun μ_{eff} koji je potreban za jednadžbu (2).

3 NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA

Metoda kontrolnih volumena (FVM) se koristi za diskretizaciju jednadžbi opisanih u prethodnom poglavlju. Koristeći standardne FVM procedure, postignuta je točnost drugog reda u prostoru. Brzina i tlak su spregnuti korištenjem PIMPLE algoritma koji je kombinacija SIMPLE i PISO algoritma. Korištenjenem PIMPLE algoritma su omogućeni veliki Courantovi brojevi, odnosno veliki vremenski koraci. Sve jednadžbe, uključujući VOF jednadžbu se tretiraju implicitno, koristeći ograničene diskretizacijske sheme. Razvijene su dvije specijalizirane aplikacije: *steadyNavalFoam* za stacionarna strujanja, te *navalFoam* za nestacionarna strujanja. Stacionarna strujanja obuhvaćaju otpor broda na mirnom moru, gdje su tranzijentni efekti zanemareni.

Valovi se modeliraju relaksacijskim zonama [6]. Zone se postavljaju blizu ulaznoj i izlaznoj granici domene gdje se rješenje iz potencijalnog strujanja superponira s CFD rješenjem.

4 OTPOR BRODA NA MIRNOM MORU

Razvijeni programski paket je korišten za simulaciju otpora KRISO kontejnerskog broda (eng. KRISO Container Ship, KCS) [7]. Trup broda ima kormilo, bez ostalih privjesaka kao što je vidljivo na Sl. 1. Sve geometrijske i ostale karakteristike prikazane su u [7]. U proračunu je korištena simetralna ravnina koja omogućuje smanjenje proračunskog vremena. Brzina broda je 2.196 m/s, što odgovara Froudeovom broju od 0.26.

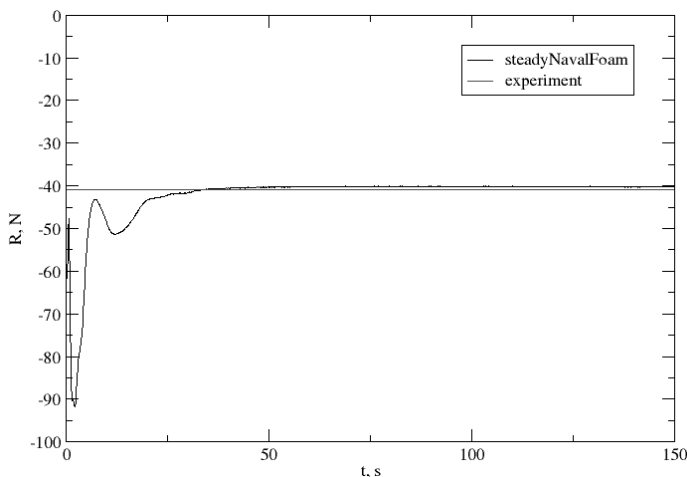


Sl. 1. Trup KCS broda, bočni pogled.

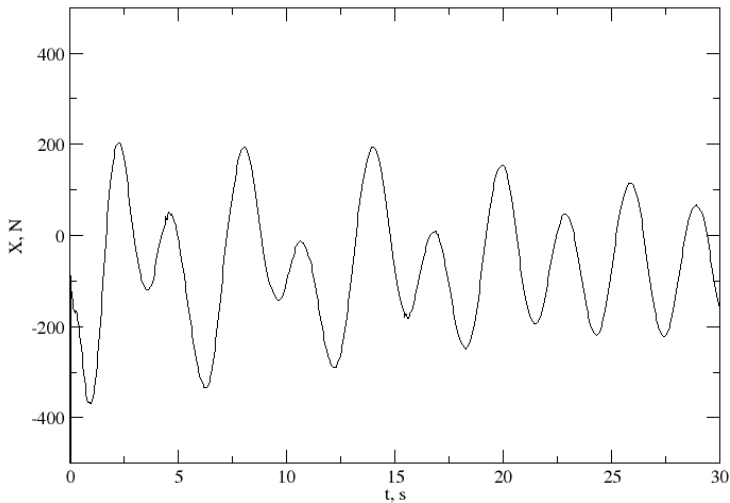
Proračunska mreža sadrži 950 000 kontrolnih volumena. Konvergencija sile otpora i usporedba s eksperimentalnim podacima je prikazana na Sl. 2. Relativna greška u ukupnoj sili otpora u odnosu na eksperiment je 1.9%. Trajanje simulacije je manje od 1 sat. Konvergencija je ostvarena nakon 75 s, dok je ugašena nakon 150 s.

5 SIMULACIJA KCS BRODA U POLJU VALOVA

KCS brod opisan u prethodnom poglavlju je korišten za simulaciju pomorstvenosti. Kako je model simetričan, dva stupnja slobode se računaju (poniranje i posrtanje), dok su ostali fiksirani. Brzina napredovanja broda je 2.196 m/s, period vala je 3 s, dok je valna visina 0.25 m. Za usporedbu, model je dugačak 7.28 m. Koriste se Stokesovi valovi drugog reda. Sila zalijetanja je prikazana na Sl. 3. Ovakve vrste simulacija daju neiscrpan raspon podataka: signale sila i momenata tijekom vremena, svih šest stupnjeva slobode, elevaciju slobodne površine, konture brzine, te volumna polja brzine, tlaka i varijabli turbulencije. Ostali numerički ili eksperimentalni podatci nisu dostupni za usporedbu.



Sl. 2. Konvergencija sile otpora i usporedba s eksperimentalnim podacima, $F_n = 0.26$.



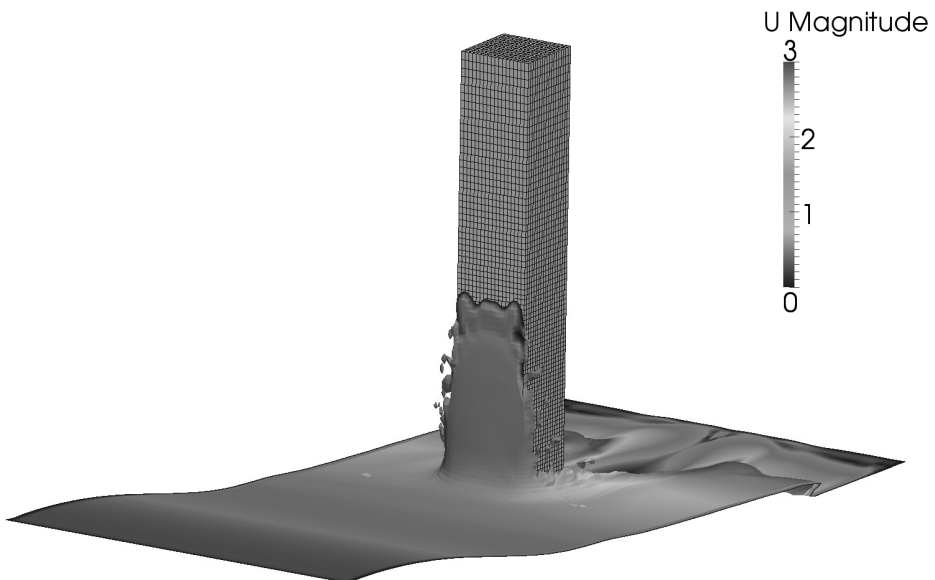
Sl. 3. Sila zalijetanja u vremenu.

6 UDAR VALA O NEPOMIČNI STUP

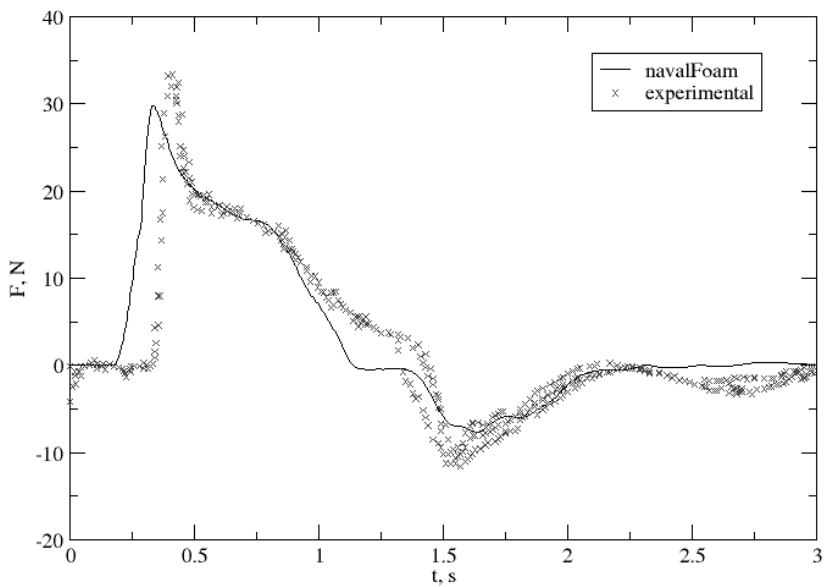
Konačno, prikazan je udar vala o nepomični stup kvadratnog poprečnog presjeka uslijed kolapsa brane (eng. "dam break"). Takva oštra geometrija predstavlja dodatne poteškoće pri numeričkim proračunima korištenjem VOF metode. Geometrija i eksperimentalni rezultati sile se mogu pronaći u [8]. Mreža korištena za proračun je blok strukturirana i ortogonalna, te sadrži približno milijun kontrolnih volumena. U eksperimentima je izmjerena sila u smjeru udara vala, te je uspoređena s numeričkim proračunom. U ovom proračunu se nisu koristili modeli turbulencije zbog dominantnog inercijskog efekta problema. Sl. 4. prikazuje izgled slobodne površine u trenutku neposredno nakon udara vode o stup. Usporedba numerički izračunate sile s eksperimentalnim podacima je prikazana na Sl. 5. Vršna proračunata sila je približno 8% manja od eksperimentalne. Povratni val se očituje u negativnoj sili, te je također dobro predviđen.

7 ZAKLJUČAK

U radu je ukratko prikazan programski paket *NavalHydro* za modeliranje dvofaznog, nestlačivog i turbulentnog strujanja. Validacija navedenog paketa je napravljena s tri različite vrste simulacija. Prilikom projektiranja novog broda, njegova sila otpora se mora moći pouzdano odrediti. Pokazano je dobro slaganje sile otpora s eksperimentalnim rezultatima. Takvi proračuni su brzi što omogućuje primjenu paketa u svrhu optimizacije forme trupa. Proračun broda na valovima pokazuje realno gibanje broda, iako rezultati nisu uspoređeni s rezultatima dobivenim drugim metodama zbog njihove nedostupnosti. Konačno, prikazan je udar brane o nepomični stup kvadratičnog presjeka. Sila pokazuje dobro poklapanje s eksperimentalnim rezultatima i u trenutku povratnog vala.



Sl. 4. Prikaz udara nailaznog vala o nepomični stup.



Sl. 5. Usporedba uzdužne sile s eksperimentalnim podacima.

Ovo kratko razmatranje dovodi do zaključka da je programski paket *NavalHydro* dovoljno zreo za savladavanje različitih problema u brodograđevnoj ili sličnim industrijama gdje postoje problemi vezani za dvofazna strujanja, te će biti predmet našeg daljnjeg rada.

Literatura:

- [1] Weller, H. G., Tabor, G., Jasak, H. "A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques", Computers in Physics, No. 12., 1998, str. 620-631.
- [2] Ubbink, O., Issa, R. I., "A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes", Journal of Computational Physics, No. 153, 1999, str. 26-50.
- [3] Rusche, H., "Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fraction", Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 2002.
- [4] Wilcox, D. C., "Turbulence Modeling for CFD", DCW Industries, Inc., La Canada, CA, 2006.
- [5] Menter, F. R., Kuntz, M., Langtry, R. "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", Turbulence, Heat and Mass Transfer, No. 4., 2003, str. 625-632.
- [6] Jacobsen, N. G., Fuhrman, D. R., Fredsøe, J. "A Wave Generation Toolbox for The Open – Source CFD library: OpenFOAM", International Journal for Numerical Methods in Fluids, No. 9., 2012, str. 1073-1088.
- [7] ..."Göteborg 2010: A Workshop on CFD in ship Hydrodynamics", dostupno na <http://www.insean.cnr.it/sites/default/files/göteborg2010/index.html>, 25. Ožujka, 2014.
- [8] Gómez – Gesteira, M., "SPHERIC SPH benchmark test cases: Test 1 – Force exerted by a schematic 3D dam break on a square cylinder", dostupno na http://cfm.mace.manchester.ac.uk/sph/TestCases/SPH_Test1.html, 15. Veljače 2014.

Autori:

Vuko Vukčević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, tel. 01/6168-239, e-mail: vuko.vukcevic@fsb.hr

Hrvoje Jasak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, tel. 01/6168-239, e-mail: hrvoje.jasak@fsb.hr

NUMERIČKA SIMULACIJA SUDARA METODOM KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA

Živaljić, N., Nikolić, Ž., Smoljanović, H. i Topić, D.

Sažetak: Sudar je fizikalna pojava koja se očituje u kontaktnoj interakciji dvaju tijela uslijed različitih brzina. Fizikalna veličina kojom se najčešće opisuje gubitak energije prilikom sudara dvaju tijela je koeficijent restitucije i njega je moguće eksperimentalno odrediti u ovisnosti o obliku kontaktnih površina, veličini sudarnih tijela, vrsti materijala itd.

Gubitak energije koji se događa uslijed sudara dvaju tijela, u kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) opisuje se modelom prigušenja koji je definiran koeficijentom prigušenja. Da bi se u FEM/DEM metodi mogao simulirati gubitak sudara dvaju diskretnih elemenata potrebno je ispravno procijeniti veličinu koeficijenta prigušenja.

U ovom radu analizirana je veza koeficijenta prigušenja u FEM/DEM metodi i koeficijenta restitucije za slučaj sudara dvaju tijela različitih materijala, oblika i veličina.

Ključne riječi: Koeficijent prigušenja, koeficijent restitucije, FEM/DEM

1 UVOD

Sudar je fizikalna pojava koja se očituje u kontaktnoj interakciji dvaju tijela uslijed čega dolazi do promjene gibanja. U tom procesu javlja se određeni gubitak energije koji je potrebno uzeti u obzir prilikom simulacije sudara. Gubitak energije se u sudaru odvija preko nekoliko mehanizama. Jedan mehanizam povezan je sa stvaranjem trajnih deformacija u okolini kontaktne površine, drugi mehanizam povezan je sa stvaranjem pukotina uslijed čega dolazi do kidanja veza među česticama materijala, dok je treći mehanizam povezan s pretvaranjem dijela energije u obliku topline. U sklopu FEM/DEM metode gubitak energije koji nastaje zbog stvaranja pukotina modeliran je kontaktnim elementima koji su umetnuti između mreže konačnih elemenata, dok su preostali mehanizmi uzeti u obzir preko modela prigušenja koji je definiran koeficijentom prigušenja. Da bi se mogao dobro simulirati sudar, potrebno je ispravno procijeniti njegovu veličinu. Fizikalna veličina kojom se u praksi najčešće opisuje gubitak energije prilikom sudara dvaju tijela naziva se koeficijent restitucije i njega je moguće eksperimentalno odrediti.

U ovom radu analizirana je veza između koeficijenta prigušenja i koeficijenta restitucije za razne vrste materijala, razne oblike i veličine tijela koji su u sudaru.

2 KOMBINIRANA METODA KONAČNO-DISKRETNIH ELEMENATA

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) [1-3] zasniva se na simulaciji ponašanja velikog broja diskretnih elemenata koji se mogu naći u međusobnoj interakciji. Svaki diskretni element je diskretiziran s vlastitom mrežom konačnih elemenata čime je omogućena njegova deformabilnost. Između mreže

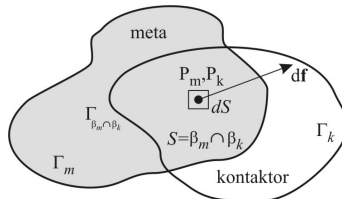
konačnih elemenata implementirani su kontaktne elementi koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina u vlaknu i posmiku.

Veza naprežanja i deformacija u konačnom trokutnom elementu uzeta je u obzir preko visko-elastičnog zakona prema izrazu

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu} \check{\mathbf{E}}_d + \frac{E}{1-2\nu} \check{\mathbf{E}}_s + \bar{\mu} \mathbf{D} \quad (1)$$

gdje je \mathbf{T} Cauchyev tenzor naprežanja, E modul elastičnosti, ν Poissonov koeficijent, $\check{\mathbf{E}}_d$ dio Green-St. Venantova tenzora deformacija koji se odnosi na promjenu oblika, $\check{\mathbf{E}}_s$ dio tenzora deformacija koji se odnosi na promjenu volumena, $\bar{\mu}$ koeficijent prigušenja i \mathbf{D} tenzor brzine deformacija [1-3].

Kontaktne interakcije između dvaju diskretnih elemenata koji se nađu u kontaktu modelirane su pomoću *penalty* metode koja se zasniva na principu potencijalnih kontaktnih sila za proračun normalnih odnosno Mohr-Columbovog modela trenja za proračun tangencijalnih sila. Nad svakim konačnim elementom uspostavljeno je jedno potencijalno polje čija vrijednost opada od središta, gdje poprima maksimalnu vrijednost, prema rubovima gdje je potencijal jednak nuli. Nakon što su detektirani parovi diskretnih elemenata, algoritmom kontaktne interakcije određuju se kontaktne sile između dva diskretna elementa u kontaktu od kojih se jedan proglašava kontaktorom, a drugi metom. Kada su u kontaktu, kontaktor i meta se preklapaju preko površine S koja je omeđena vanjskim rubom $\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}$ kao što je prikazano na sl. 1.



Sl. 1. Kontaktne diferencijalne sile u okolini točaka P_m i P_k

Ukupna kontaktne diferencijalne sile na kontaktoru $d\mathbf{f}_k$ definirane su kao

$$d\mathbf{f}_k = [\text{grad} \varphi_k(P_m) - \text{grad} \varphi_m(P_k)] dS \quad (2)$$

gdje su P_m i P_k preklapajuće točke mete i kontaktora, a φ je odgovarajuća funkcija potencijala. Integracijom (2) preko cijele preklapajuće površine S dobije se ukupna kontaktne sile

$$\mathbf{f}_k = \int_{S=\beta_m \cap \beta_k} [\text{grad} \varphi_k - \text{grad} \varphi_m] dS \quad (3)$$

koja se još može zapisati u obliku

$$\mathbf{f}_k = \oint_{\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}} \mathbf{n}_\Gamma [\varphi_k - \varphi_m] d\Gamma \quad (4)$$

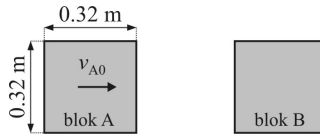
gdje je \mathbf{n}_Γ jedinična vanjska normala na rub Γ preklapajuće površine S .

3 ANALIZA PRIGUŠENJA

U numeričkim analizama koje su prethodno provedene [4] analizirana je ovisnost koeficijenta restitucije o gustoći mreže konačnih elemenata, vrijednosti *penalty*

koeficijenta, brzini sudara te postojanju kontaktnih elemenata između mreže konačnih elemenata.

Numeričke analize provedene su na dva kamena bloka A i B prikazanih na sl. 2.

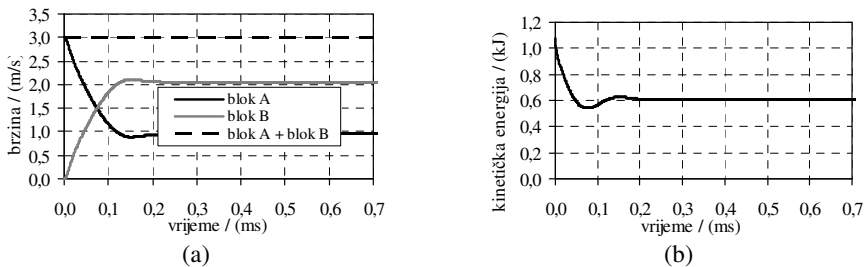


Sl. 2. Sudar dvaju kamenih blokova

Bloku A zadana je početna brzina v_{A0} kojom putuje prema bloku B koji miruje sve dok ne dođe do sudara. Nakon sudara blok A nastavlja se gibati brzinom v_{A1} , a blok B brzinom v_{B1} . Brzine blokova i kinetička energija sustava za karakterističan sudar prikazana je na sl. 3. Na temelju poznatih brzina blokova prije i poslije sudara moguće je izračunati vrijednost koeficijenta restitucije prema sljedećem izrazu

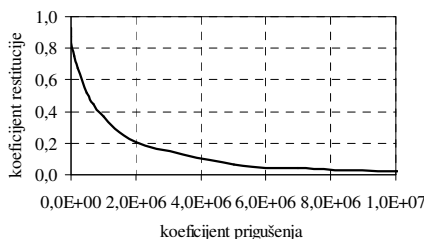
$$k = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{v_{A0} - v_{B0}} \quad (5)$$

gdje su v_{A0} i v_{B0} brzine blokova A i B prije sudara, dok su v_{A1} i v_{B1} brzine blokova A i B nakon sudara.



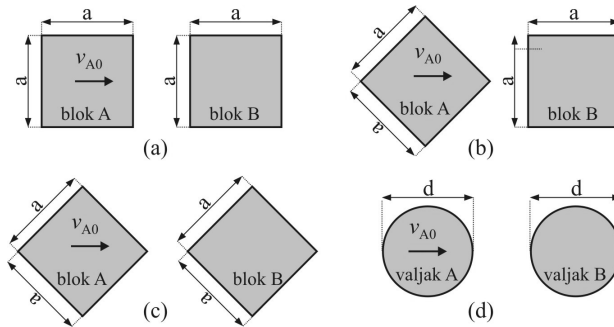
Sl. 3. Sudar dvaju kamenih blokova: (a) brzina, (b) kinetička energija

U tim analizama pokazalo se da za vrijednosti *penalty* koeficijenta 25 puta većeg od modula elastičnosti materijala i dovoljno gustu mrežu konačnih elemenata između koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja postoji jedinstvena veza, neovisna o brzini sudara diskretnih elemenata i o postojanju kontaktnih elemenata između mreže konačnih elemenata. Ta veza, koja je značajna pri procjeni koeficijenta prigušenja na temelju poznatog koeficijenta restitucije, prikazana je na sl. 4.



Sl. 4. Veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja $\bar{\mu}$

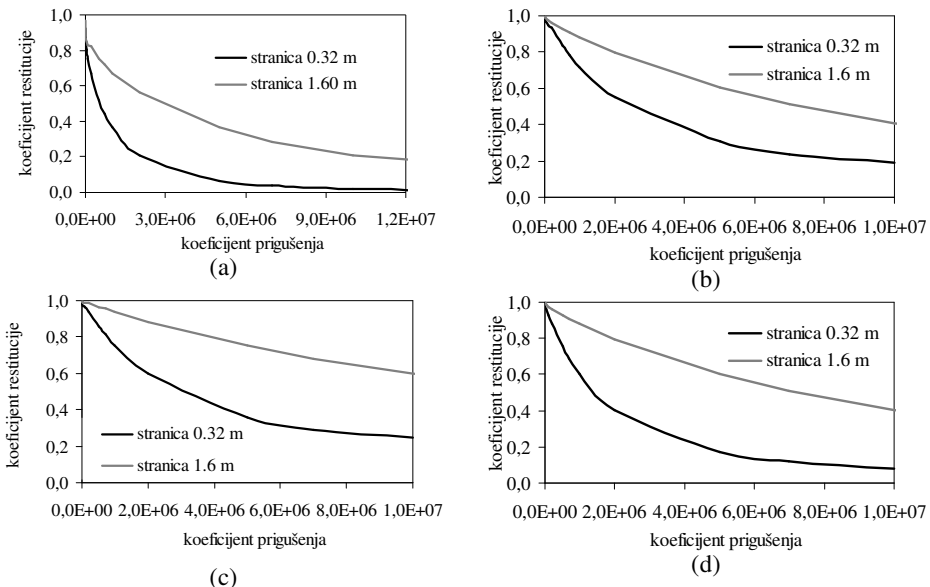
U nastavku ovog rada, nadovezujući se na prethodne zaključke [5], analizirana je ovisnost koeficijenta restitucije o koeficijentu prigušenja za razne oblike, veličine i vrste materijala tijela koja sudjeluju u sudaru. Oblici analiziranih tijela prikazani su na sl. 5., a materijalne karakteristike u tablici 1.



Sl. 5. Oblici analiziranih tijela u sudaru: (a) dvije kocke duž stranica, (b) stranica i brid dviju kocki, (c) dva brida dviju kocki, (d) dva valjka duž plašta.

Tablica 1: Karakteristike materijala kao ulazni parametri

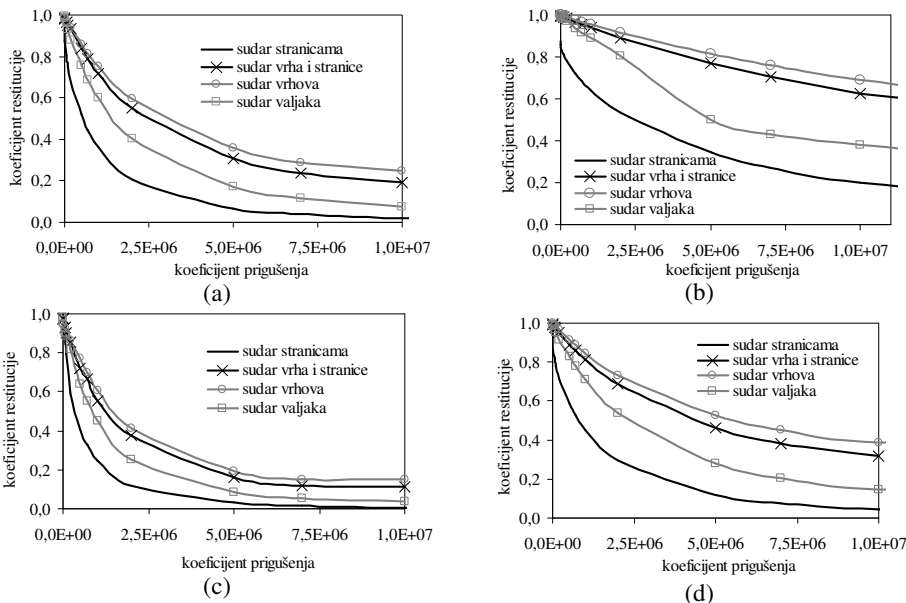
	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Beton	30.5	0.2	2340
Čelik	210.0	0.3	7850
Drvo	11.0	0.2	800
Staklo	70.0	0.25	2500



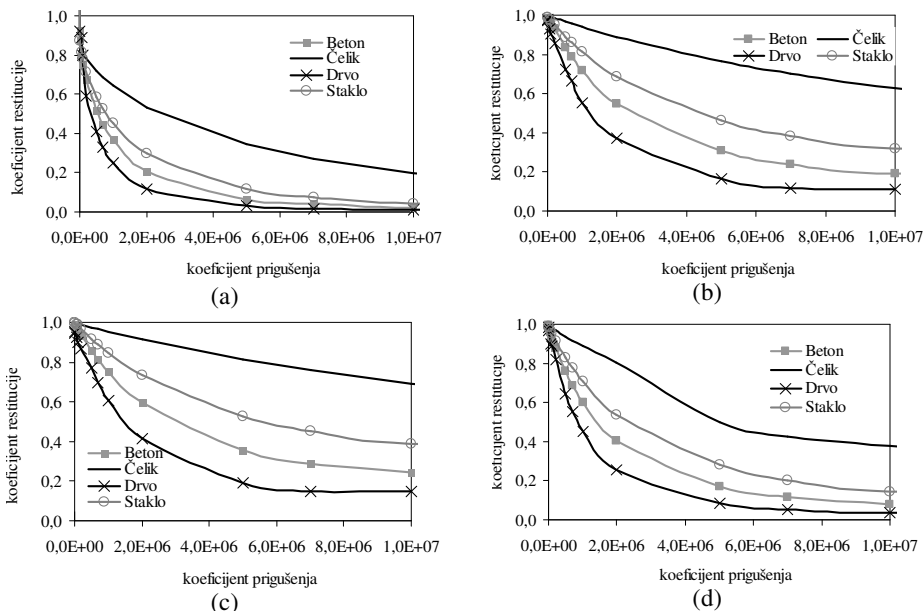
Sl. 6. Veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja za betonske blokove različitih dimenzija za sudar: (a) bridovima, (b) vrhom i bridom, (c) vrhovima, (d) valjaka

Na sl. 6 prikazana je veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja za betonske blokove različitih dimenzija i različitih vrsta sudara. Može se uočiti da se

zmanjenjem dimenzije tijela, koeficijent restitucije smanjuje i teži prema nuli, dok se povećanjem dimenzije tijela koeficijent restitucije povećava i teži prema jedinici za sve vrste sudara.



Sl. 7. Veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja za različite načine sudara blokova veličine 0.32 metra: (a) beton, (b) čelik, (c) drvo, (d) staklo



Sl. 8. Veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja za različite vrste materijala blokova veličine 0.32 metra za sudar: (a) bridovima, (b) vrhom i bridom, (c) vrhovima, (d) valjaka

Na sl. 7 prikazana je veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja ovisno o vrstama sudara za betonske, drvene, staklene i čelične blokove dimenzija 0.32 m. Može se uočiti da je za sve materijale u slučaju veće sudarne površine (sudar stranicama) koeficijent restitucije najmanji, dok je za slučaj malih sudarnih površina (sudar vrhovima) koeficijent restitucije najveći neovisno o materijalu sudarnih tijela.

Na sl. 8 prikazana je veza koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja ovisno o vrstama materijala sudarnih blokova dimenzija 0.32 m za različite načine sudara. Može se uočiti da je za sve vrste sudara koeficijent restitucije za drvo najmanji, dok je za čelik najveći.

4 ZAKLJUČAK

Numeričke analize sudara u okviru FEM/DEM modela prezentirane u ovom radu pokazale su da za vrijednosti *penalty* koeficijenta 25 puta većeg od modula elastičnosti i dovoljno gustu mrežu konačnih elemenata između koeficijenta restitucije i koeficijenta prigušenja postoji veza koja ne ovisi o brzini sudara tijela kao ni o gustoći diskretizacije, što je preduvjet korištenja FEM/DEM metode u analizi sudara.

U okviru rada također su analizirane veze koeficijenta prigušenja i koeficijenta restitucije za razne materijale te razne oblike i veličine sudarnih tijela. Pokazano je da vrijednost koeficijenta restitucije značajno ovisi o dimenzijama tijela koja se nalaze u sudaru, o obliku sudarnih ploha kao i o vrsti materijala sudarnih tijela.

Ove veze su značajne za procjenu koeficijenta prigušenja, koji je ulazni parametar u FEM/DEM modelu, na temelju poznatog koeficijenta restitucije.

Literatura:

- [1] Munjiza, A. "The combined finite-discrete element method", John Wiley & Sons, 2004.
- [2] Munjiza, A., Andrews, K.R.F., White, J.K., "NBS contact detection algorithm for bodies of similar size", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, 1998, str. 131-149.
- [3] Munjiza, A., Andrews, K.R.F., White, J.K., "Penalty function method for combined finite-discrete element system comprising large number of separate bodies", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 49, 2000, str. 1377-1396.
- [4] Gotovac, B., Mehanika II, Zapisi s predavanja, 2012.
- [5] Smoljanović H., "Seizmička analiza zidanih konstrukcija metodom konačno-diskretnih elemenata", Doktorska disertacija, Sveučilište u Splitu, Split, 2013.

Autori:

Nikolina Živaljić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-323, e-mail: nikolina.zivaljic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Željana Nikolić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-332, e-mail: zeljana.nikolic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Hrvoje Smoljanović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-378, e-mail: hrvoje.smoljanovic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Dina Topić, Ulica Don Frane Bulića 66, Solin, tel. 021/217-119, e-mail: dinazapo57@gmail.com

PROCJENA MOGUĆNOSTI MJERENJA LOKALNIH PARAMETARA VISKOELASTIČNE ARTERIJSKE STIJENKE

Korade, I., Virag, Z. i Krizmanić, S.

Sažetak: Analizirane su tri moguće metode za određivanje parametara Voigtova modela arterijske stijenke na temelju mjerenja vremenske promjene dvije veličine u poprečnom presjeku arterije. Prva metoda zahtijeva mjerenje tlaka i površine poprečnog presjeka, druga tlaka i prostorne derivacije protoka, a treća protoka i prostorne derivacije površine poprečnog presjeka. Metode su uspoređene na način da su se umjesto mjerenja koristili rezultati numeričke simulacije u koje je uvedena slučajna pogreška s ciljem oponašanja realnih mjerenja. Zaključeno je da je prva metoda najmanje osjetljiva na pogrešku mjerenja, a najlošija je treća.

Ključne riječi: Hemodinamika, Arterijsko stablo, Metoda mjerenja parametara modela stijenke

1 UVOD

Jedna od prepreka široj primjeni jednodimenzijskih modela strujanja krvi u arterijskom stablu je nepoznavanje lokalnih svojstava stijenke arterija. Poznato je da velike arterije pokazuju svojstvo viskoelastičnosti. U slučaju Voigtova modela arterijska stijenka je karakterizirana s popustljivošću (elastičnošću) arterijske stijenke, i viskoznošću (otporom) stijenke. U nedostatku mjernih metoda za neinvazivno mjerenja viskoznosti stijenke najčešće se pretpostavlja čisto elastična priroda stijenke. Ovdje će se analizirati mogućnost mjerenja parametara viskoelastične stijenke.

U radu će se koristiti rezultati simulacije strujanja krvi u arterijskom stablu dobiveni rješavanjem jednodimenzijskog matematičkog modela temeljenog na Voigtovoj konstitutivnoj relaciji. Izračunate vrijednosti protoka, tlaka i površine poprečnog presjeka cijevi, te vrijednosti njihovih prostornih derivacija, će se uzimati za mjerene vrijednosti. Analizirat će se iz koje kombinacije mjerenih vrijednosti će se moći najtočnije rekonstruirati traženi parametri Voigtova modela. Uvođenjem slučajne pogreške u „mjerene“ rezultate, ocijenit će se osjetljivost metoda za određivanje parametara arterijske stijenke.

2 SIMULACIJA STRUJANJA KRVI U VELIKIM ARTERIJAMA

2.1 Matematički model jednodimenzijskog strujanja krvi

Problem jednodimenzijskog strujanja krvi u velikim arterijama je opisan sljedećim sustavom jednačbi [1]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

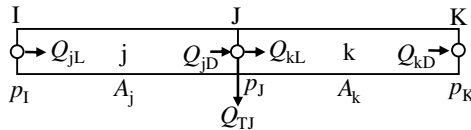
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x} = -fQ, \quad (2)$$

$$p - p_0 = \frac{1}{C}(A - A_0) + \eta \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3)$$

gdje su: x i t prostorna i vremenska koordinata, p je tlak, Q je protok, A je površina poprečnog presjeka arterije ($A=D^2\pi/4$), v je prosječna brzina po presjeku ($v=Q/A$), C je površinska popustljivost arterijske stijenke ($C=dA/dp$), η je otpor stijenke, ρ je gustoća fluida, f je faktor trenja, ovdje definiran Hagen-Poiseuilleovim zakonom $f=32\mu/(\rho D^2)$, a μ je viskoznost fluida. A_0 označuje konstantnu vrijednost površine A pri tlaku $p = p_0$.

2.2 Metoda karakteristika za rješavanje jednodimenzijskog modela

Matematički model, opisan sustavom jednažbi od (1) do (3), efikasno se rješava numeričkom metodom karakteristika. Za potrebe te metode arterijsko stablo se podijeli na određeni broj elemenata duljine Δx , na čijim se rubovima nalaze čvorovi. Slika 1. prikazuje dva susjedna elementa (označena sa **j** i **k**) koja su omeđena čvorovima **I**, **J** i **K**. Vrijednosti tlaka su definirane u čvorovima, površina A poprečnog presjeka elementa se definira u sredini elementa (i smatra se konstantnom duž elementa duljine Δx), a protoci Q se definiraju na oba ruba svakog elementa. Na taj način se uz svaki element pamte četiri varijable. Na primjer, nepoznanice koje se odnose na element **j** su: tlak p_J , protok na lijevom rubu Q_{jL} , i desnom Q_{jD} te površina A_j , kao što je prikazano na slici 1. Detaljan opis metode je dan u [2].



Sl.1: Prikaz dijela diskretiziranog arterijskog stabla s rasporedom varijabli.

2.3 Simulacija mjerenih rezultata

Rezultate simulacije dobivene opisanom metodom će se koristiti umjesto mjerenih podataka, temeljem kojih će se određivati parametri C i η arterijske stijenke. S obzirom da u stvarnim mjerenjima uvijek postoji pogreška u dobivene rezultate simulacije ćemo uvesti slučajnu pogrešku (primjenom generatora slučajnih brojeva) u obliku:

$$p^M = p + \Delta p_{\max} (2r - 1), \quad (4)$$

gdje je p^M simulirani tlak s unesenom pogreškom, p je tlak dobiven iz simulacije, Δp_{\max} maksimalna pogreška tlaka, a r slučajni broj u intervalu nula do jedan. Analogno se uvode pogreške i u rezultate za Q i A . S obzirom da su u numeričkoj metodi p i Q definirani na rubu elementa, a površina na sredini elementa, p i Q u sredini elementa će se definirati kao aritmetička sredina vrijednosti s ruba, a parcijalne derivacije na sredini elementa (npr. elemenata j , prema slici 1), definiraju se izrazima:

$$\frac{\partial p^M}{\partial x} = \frac{p_J^M - p_I^M}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q^M}{\partial x} = \frac{Q_{jD}^M - Q_{jL}^M}{\Delta x}, \quad (5)$$

3 METODE MJERENJA SVOJSTAVA ARTERIJSKE STIJENKE

3.1 Metode određivanja svojstava arterijske stijenke

Cilj je definirati postupak određivanja popustljivosti C i otpora η arterijske stijenke, koji se direktno pojavljuju u jednadžbi (3). Jasno je da se iz simultanog mjerenja vremenske promjene tlaka i vremenske promjene površine poprečnog presjeka arterije mogu odrediti ova dva parametra. Iz jednadžbe (3) je jasno da za slučaj $\eta = 0$, tlak i površina moraju biti u fazi, te bi se C mogao odrediti iz mjerenih signala tlaka i promjene površine kao nagib pravca u p - A ravnini (npr. primjenom metode najmanjih kvadrata). U slučaju kada postoji otpor stijenke, signali tlaka i vremenske promjene površine su povezani linearnom diferencijalnom jednadžbom, te je problem pogodno promatrati u frekvencijskoj domeni. U tom pristupu se vremenski signal tlaka i površine razviju u Fourierov red:

$$p(t) = \sum_{n=0}^N \left[S_n^p \sin(n\omega_0 t) + C_n^p \cos(n\omega_0 t) \right], \quad (6)$$

gdje koeficijenti Fourierova reda čine fazor tlaka u kompleksnom prostoru $\hat{p}_n = S_n^p + iC_n^p$ na kružnoj frekvenciji $\omega = n\omega_0$, gdje n označuje redni broj harmonika, a $\omega_0 = 2\pi/T$ osnovnu kružnu frekvenciju definiranu periodom T srčanog takta.

Analogno se može definirati i fazor $\hat{A}_n = S_n^A + iC_n^A$ iz mjerenog signala vremenske promjene površine A . Temeljem jednadžbe (3) se može definirati **1. metoda** za određivanje C i η , na osnovu mjerenja p i A (ovdje ne ulazimo u raspravu kako bi se to mjerilo) u jednom presjeku, koja glasi:

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = \frac{\hat{p}}{\hat{A}}, \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

Teorijski gledano vrijednosti C i η bi trebale biti jedne te iste na svim frekvencijama, što naravno u mjerenjima neće biti slučaj. Može se ili definirati neka srednja vrijednost iz vrijednosti dobivenih na različitim frekvencijama, ili vrijednost dobivenu na osnovnoj frekvenciji proglasiti za najtočniju vrijednost, budući da se na višim frekvencijama može očekivati sve veći utjecaj slučajne pogreške.

2. metoda se može izvesti iz vremenski derivirane jednadžbe (3) u koju se uvrsti jednadžba (1), te se dobije:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial Q}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x}, \quad (8)$$

ili u frekvencijskoj domeni

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = -\frac{i\omega\hat{p}}{\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x}} \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

Jasno je da u ovoj metodi treba mjeriti tlak i prostornu derivaciju protoka (protok u dvije točke ili razliku protoka u dvije bliske točke).

3. metoda se dobije iz jednadžbe (3), derivirane po prostornoj koordinati, nakon što se u nju uvrsti pojednostavljena jednadžba (2) (sa zanemarenim trenjem i konvekcijskim članom) koja glasi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{A_0}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

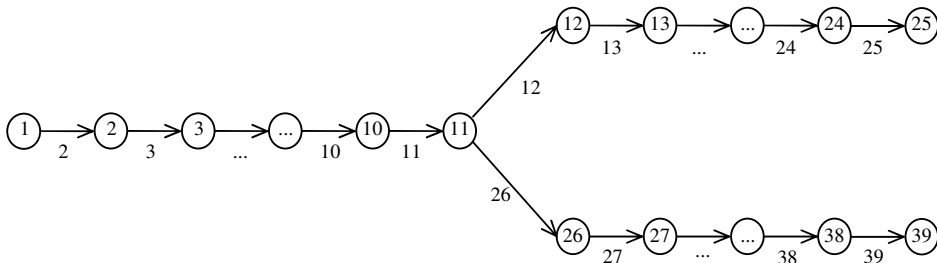
Gledano u frekvencijskoj domeni, dobije se:

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = -\frac{\rho}{A_0} \frac{i\omega\hat{Q}}{\frac{\partial \hat{A}}{\partial x}} \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

Jasno je da su se pri izvodu prve dvije metode koristile originalne jednadžbe jednodimenzijskog modela, dok se kod ove metode koristila pojednostavljena jednadžba (2).

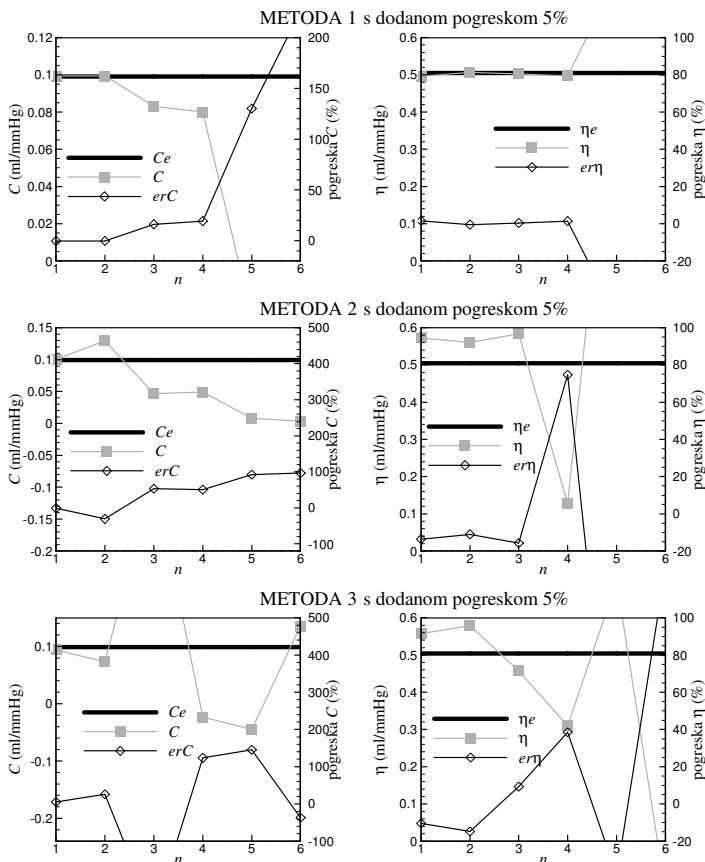
4 USPOREDBA METODA

Primjenom opisane metode simulirano je strujanje fluida u račvastoj cijevi, koja je shematski prikazana na slici 2.



Sl. 2: Shematski prikaz elemenata račvaste cijevi

Cijev je podijeljena na 38 elemenata duljine $\Delta x = 6$ cm. Prvih deset elemenata je jednolike površine $A_0 = 5$ cm² (na pretlaku $p_0 = 0$), a poprečni presjek granajućih cijevi je $A_1 = 3$ cm². Na ulazu u cijev (čvor 1), propisan je protok, oblika polusinusnog vala trajanja $T/3$ ($T = 0.3$ s) amplitude 50 ml/s. Na izlazima iz cijevi (u čvorovima 25 i 39), zadan je otpor $R_{25} = 1$ mmHg·s/ml i $R_{39} = 3$ mmHg·s/ml. U proračunu su parametri C i η stijenke cijevi zadani indirektno konstantnom brzinom širenja vala $c_w = 10$ m/s, pri čemu je $C = A / (\rho \cdot c_w^2)$ i vremenskom konstantom $\tau = C \cdot \eta = 0.05$ s. Treba primijetiti da je uz konstantni c_w parametar C vremenski promjenjiv jer se mijenja površina A , a onda je uz konstantni τ promjenjiv i parametar η . Međutim, s obzirom da su vremenske promjene površine A male, promjene parametara će se zanemariti. Period integracije ovog problema je $10T$, a za simulaciju mjerenja se uzimaju rezultati na petom elementu i to iz zadnjeg perioda integracije, kada se postiglo ustaljeno oscilirajuće strujanje u cijevi.



Sl. 3. Vrijednosti parametara C i η u funkciji rednog broja harmonika, rekonstruiranih s tri metode, pri čemu je u simuliranom signalu uvedena pogreška 5 %.

Tablica 1. prikazuje vrijednosti zadanih (točnih) parametara C i η izračunatih pri srednjoj površini poprečnog presjeka A_0 . U istoj tablici su dane rekonstruirane vrijednosti tih parametara primjenom triju metoda, te njihovo odstupanje od točnih vrijednosti i to za dva slučaja: bez uvođenja slučajne pogreške u rezultat simulacije i s pogreškom od 5 %. Slika 3. prikazuje rezultate za slučaj uvedene pogreške od 5 %. Jasno je da u slučaju da u signalu nema pogreške sve tri metode vrlo dobro rekonstruiraju vrijednosti parametara C i η (vrijednosti relativne pogreške za η su za prva tri harmonika ispod 1 %, jedino treća metoda pokazuje malo veće odstupanje parametra C na višim harmonicima). Kad se u „mjereni signal“ uvede pogreška od 5%, očito je da sve metode na višim harmonicima rekonstruiraju parametre stijenke sa znatnijim odstupanjem. Pa ipak prve dvije metode daju dobre rezultate na prvom harmoniku.

Tablica 1. Vrijednosti rekonstruiranih parametara stijenke, temeljem simulacije i pogreška u odnosu na zadane (točne) vrijednosti pri A_0 , te odstupanja u odnosu na točne vrijednosti, $erC=100(Ce- C)/Ce$, $er\eta =100(\eta e- C)/\eta e$

	n	Točno		Bez uvođenja pogreške				Uvedena pogreška od 5 %			
		100 Ce	ηe	100 C	erC	η	er η	100 C	erC	η	er η
Metoda 1	1	9.91	0.504	9.95	-0.366	0.502	0.559	10.03	-1.15	0.501	0.626
	2			9.93	-0.203	0.504	0.081	10.35	-4.38	0.500	0.779
	3			9.90	0.160	0.508	0.687	8.88	10.5	0.514	-1.87
	4			9.78	1.325	0.515	-2.00	14.1	-42.5	0.613	-21.5
	5			10.1	-1.81	0.517	-2.52	822	-8189	0.478	5.29
	6			10.1	-1.84	0.529	-4.78	7.09	28.5	0.422	16.4
Metoda 2	1	9.91	0.504	9.93	-0.199	0.503	0.383	9.97	-0.544	0.550	-9.10
	2			9.98	-0.693	0.503	0.360	8.74	11.8	0.518	-2.61
	3			10.1	-1.45	0.503	0.323	4.06	59.1	0.420	16.7
	4			10.2	-2.65	0.503	0.234	9.82	0.95	0.213	57.9
	5			10.2	-3.18	0.502	0.470	-7.08	171	-0.180	135.7
	6			10.4	-4.98	0.503	0.385	-5.06	151	0.133	73.6
Metoda 3	1	9.91	0.504	9.84	0.709	0.503	0.204	9.28	6.35	0.457	9.49
	2			9.68	2.32	0.504	0.140	6.18	37.7	0.538	-6.75
	3			9.35	5.67	0.504	0.071	24.5	-146	0.363	28.1
	4			8.43	15.0	0.505	-0.176	3.25	67.1	-0.067	113.2
	5			10.4	-4.89	0.500	0.880	-7.29	173	-0.010	119.8
	6			9.04	8.82	0.501	0.598	-6.13	162	0.037	92.7

5 ZAKLJUČAK

U radu su usporedene tri metode za određivanje parametara stijenke u Voigtovom modelu. Za mjerenja su uzeti rezultati numeričke simulacije u koje su unesene slučajne pogreške. Metoda koja se temelji na simultanom mjerenju tlaka i površine poprečnog presjeka se pokazala najmanje osjetljivom na uvedenu pogrešku, s tim da se za parametre uzimaju vrijednosti iz prvog harmonika.

Literatura

- [1] Kitawaki, T., "Numerical Simulation Model with Viscoelasticity of Arterial Wall", Chapter 9, <http://dx.doi.org/10.5772/49976>, (2012).
- [2] Korade, I., Virag, Z., Šavar, M., "Numerical Simulation Of One-Dimensional Flow In Elastic And Viscoelastic Branching Tube" prihvaćen rad za 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Barcelona, Spain, 20.-25. July 2014.

Autori:

Ivan Korade, Zdravko Virag, Severino Krizmanić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Katedra za mehaniku fluida, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-222, e-mail: ivan.korade@fsb.hr, zdravko.virag@fsb.hr, severino.krizmanic@fsb.hr.

DINAMIČKA IZDRŽLJIVOST DENTALNIH IMPLANTATA

Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D. i Baškarić, T.

Sažetak: Dinamička izdržljivost dentalnih implantata spada u područje visokocikličkog zamora zbog više milijunskih ciklusa žvačnih sila u ljudskim čeljustima. Međunarodna norma ISO 14801 za dinamičko ispitivanje zamora dentalnih implantata i FDA preporuke propisuju uvjete ispitivanja dinamičke izdržljivosti za $2 \cdot 10^6$ ili $5 \cdot 10^6$ ciklusa. Osim cikličkih sila, značajno opterećenje u implantatima se pojavljuje i kao posljedica ugradnje implantata. Navedena kombinacija statičkih i dinamičkih opterećenja s nelinearnim kontaktima između dijelova dentalnih implantata te posebice vijčanog spoja implantata s koštanim tkivom uz zamršenu kombinaciju utjecajnih faktora i cikličko ponašanje titanovih legura stvaraju vrlo kompleksan biomehanički problem.

U radu su prikazani glavni utjecajni faktori s mehaničke i kliničke strane na matematičkom modelu za proračun za dinamičke izdržljivosti implantata od titanove legure Ti-6Al-4V. Površinska hrapavost je jedan od najznačajnijih faktora jer utječe na oseointegraciju i dinamičku izdržljivost. Viša hrapavost stvara bolju oseointegraciju, dok s druge strane značajno smanjuje dinamičku izdržljivost i životni vijek te je zbog toga nužno postići optimalnu vrijednost površinske hrapavosti. Višeosna raspodjela naprezanja pri proporcionalnim i neproporcionalnim opterećenjima zahtijeva korištenje naprednih metoda s vrlo visokom pouzdanošću.

Ključne riječi: Dentalni implantati, dinamička izdržljivost, životni vijek, površinska hrapavost

1 UVOD

Dinamička izdržljivost dentalnih implantata ovisi o više utjecajnih faktora. Površinska hrapavost je nautjecajniji faktor s obzirom na zamor, dinamičku izdržljivost i oseointegraciju. Prema Albrektsonu i Wennerbergu [1-2] površinska hrapavost implantata se dijeli na četiri kategorije:

- Glatki (eng. *smooth*) implantati, $S_a < 0,5 \mu\text{m}$.
- Minimalno hrapavi implantati (eng. *minimally rough implants*), S_a od 0,5 do $1,0 \mu\text{m}$.
- Umjereno hrapavi (eng. *moderately rough*) implantati, S_a od 1,0 do $2,0 \mu\text{m}$.
- Hrapavi (eng. *rough*) implantati, $S_a = 2,0 \mu\text{m}$.

Kraći periodi cijeljenja i uspješnosti oseointegracije implantata s kosti javljaju se s korištenjem umjereno hrapavih površina [3-4]. Istraživanja na životinjama su pokazala da čvrstoća spoja raste s hrapavošću [5]. Istraživanja na zečevima su pokazala da je najveća čvrstoća spoja pri hrapavosti od $S_a = 1,5 \mu\text{m}$ [5]. Slični rezultati dobiveni su i na svinjama gdje se najveća čvrstoća pojavljuje pri hrapavošću od $R_a > 2 \mu\text{m}$ [6]. Prema Pattersonu i Johnsu [7] zamor je najčešći razlog loma dentalnih implantata. Kliničke studije također prikazuju oštećenja i lomove implantata zbog zamora [8-9].

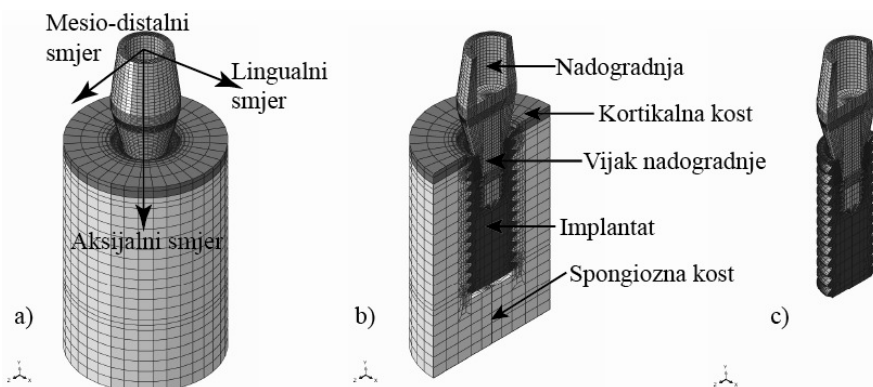
Tokom životnog vijeka dentalnih implantata zamorne pukotine najčešće se iniciraju na korijenima navoja [10-11]. Površinska hrapavost osim značajnog utjecaja na oseointegraciju utječe i na dinamičku izdržljivost i životni vijek implantata.

Cilj ovoga istraživanja i rada je prikazati utjecajne faktore dinamičke izdržljivosti s naglaskom na površinsku hrapavost. Iz pregleda znanstvene i stručne literature o dentalnim implantatima pokazalo se da se implantati istražuju numerički samo statičkim analizama, iako je problem implantata izričito dinamičke izdržljivosti.

2 NUMERIČKI MODEL DENTALNOG IMPLANTATA

2.1 Modeliranje dentalnog implantata metodom konačnih elemenata

Model se sastoji od kortikalne i spongiozne kosti, implantata, vijka i nadogradnje, prema sl. 1. Implantat je promjera 4 mm i visine 10 mm. Korišteni su heksaedarski elementi (C3D8) za diskretizacije modela pomoću metode konačnih elemenata (MKE). Model ukupno sadrži 121504 čvorova te 109044 elemenata. Sve kontaktne površine modelirane su s nelinearnim *sliding contactom*. Faktor trenja za kontaktne površine implantata iznosi $\mu = 0,5$. Statička sila pritezanja vijka nadogradnje (F_p) od 300 N je korištenja za predopterećenje koje se događa uslijed ugradnje implantata u ljudsku čeljust. Sile pritezanja vijka nadogradnje tokom *in vivo* spajanja imaju veliko rasipanje vrijednosti zbog jedino kontrole zakretnog momenta pritezanja i nesigurnosti o faktoru trenja koji značajno utječe na sile pritezanja. Koncentrirane sile od 17,1 N, 114,6 N i 23,4 N u lingualnom, aksijalnom i mesio-distalnom smjeru su primjenjene. Žvačne sile definirane su kao pulzirajuće sile s konstantnim amplitudama (omjer sila $R = 0$).



Sl. 1. Numerički model dentalnog implantata s poprečnim presjecima

Sklop dentalnog implantata modeliran je s homogenim, izotropnim i linearno elastičnim materijalom. Mehanička svojstva titanove legure za nadogradnju su $E = 114$ GPa i $\nu = 0,38$, a za implantat i vijak $E = 113,8$ GPa i $\nu = 0,34$. Mehanička svojstva kortikalne kosti su $E = 14$ GPa i $\nu = 0,3$, a spongiozne kosti $E = 1,5$ GPa i $\nu = 0,3$. Dinamička izdržljivost za vlačno/tlačno opterećenje ($R = -1$) definirana je s 600 MPa za $2 \cdot 10^6$ ciklusa pri vjerojatnosti preživljavanja $P_S = 50\%$. Vlačna čvrstoća Ti-6Al-4V je $R_m = 1020$ MPa i granica tečenja $R_{p0,2} = 950$ MPa. Ciklička petlja histereze naprezanja-deformacija definirana je s cikličkim koeficijentom očvršćenja $K' = 1,61 \cdot R_m$ i cikličkim eksponentom očvršćenja $n' = 0,11$. Za proračun zamora pri

različitim vrijednostima R , koristi se Haighov dijagram. Ciklička svojstva materijala definirana su s relativnim gradijentima naprezanja $\chi' = 0$. Svojstva materijala epruvete se lokalno modificiraju na svakom čvoru dentalnog implantata za dobivanje točne $S-N$ krivulje.

2.2 Dinamička izdržljivost dentalnog implantata

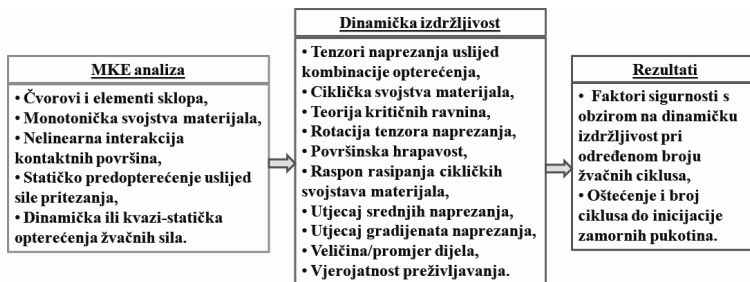
Višeosna interakcija između tenzora amplituda i srednjih naprezanja rješena je pomoću teorije kritičnih ravnina. Utjecaj srednjih naprezanja se uzima u obzir pomoću Haighovog dijagrama koji definira najkritičniju ravninu i oštećenje za svaki čvor. Ravnina je definirana na svakih 10° . Rainflow brojanje ciklusa je korišteno za brojanje ciklusa žvačnih sila. Modificirana formulacija Minerove akumulacije oštećenja je korištena (eng. *Miner Modified*) s nagibom $S-N$ krivulje $k' = 2k - 1$ za proračun oštećenja. Preuređivanje amplituda i srednjih naprezanja uslijed plastifikacije materijala rješeno je pomoću Neuberove hiperbole. Hrapavost površine implantata ukazuje da površina nije savršeno glatka i da se nalaze koncentracije naprezanja na površini zbog neravnina koje djeluje kao mikro-zarezi na površini. Utjecaj hrapavosti na zamor je vrlo značajan zbog činjenice da povišena hrapavost smanjuje dinamičku izdržljivost i smanjuje broj ciklusa do iniciranja pukotine. Osnovni model implantata analiziran je s $R_z = 2 \mu\text{m}$. Faktor utjecaja hrapavosti uzet je u obzir u skladu s normom TGL 19340 prema jednadžbi:

$$f_{SR} = 1 - 0,22 \cdot (\log R_{z,c}) \cdot (\log(R_m/20)-1) / 1 - 0,22 \cdot (\log R_{z,m}) \cdot (\log(R_m/20)-1) \quad (1)$$

gdje su $R_{z,c}$ i $R_{z,m}$ površinska hrapavost komponente i epruvete, respektivno. Navedena jednadžba vrijedi za materijale s $R_m \leq 2000$ MPa.

Rasipanje cikličkih svojstava materijala (omjer dinamičke izdržljivosti pri vjerojatnosti preživljavanja 10 i 90%) definirano je s $T_S = 1,45$. Normalna Gaussova distribucija je pretpostavljena za proračun utjecajnih statističkih varijabli. Analize dinamičke izdržljivosti provedene su s vjerojatnošću preživljavanja $P_S = 99,99\%$.

Gradijenti naprezanja opisuju koncentraciju naprezanja. Siebelova metoda kombinira utjecaje faktora koncentracije naprezanja, stanja naprezanja, veličine i geometrije zarez a s faktorom zarez a pomoću hipoteze o efektu mikro-podrške (eng. *micro support effect*). Dijagram toka od diskretizacije modela pomoću MKE za analizu dinamičke izdržljivosti prikazan je na slici 2.



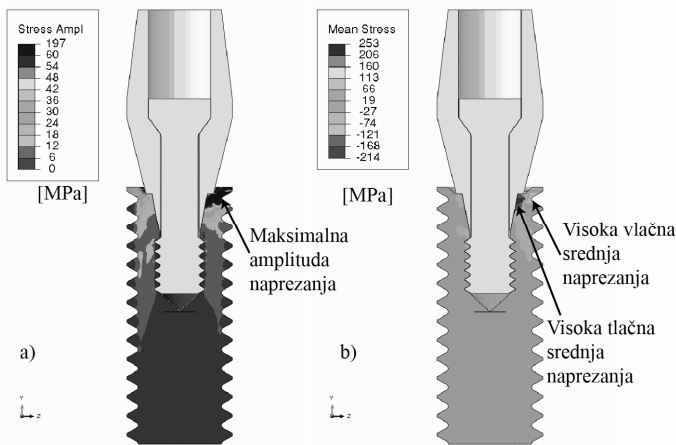
Sl. 2. Dijagram toka numeričke analize za određivanje dinamičke izdržljivosti implantata

Analiza statičke sile pritezanja i pulzirajućih žvačnih sila s konstantnim amplitudama provedena je u programskom paketu Abaqus 6,10 (Simulia, Providence,

RI, USA). Tenzori napreznja s utjecajnim faktorima analizirani su pomoću teorije kritičnih ravnina u programskom paketu FemFat 4,8 (ECS, Steyr, Austria). Ekvivalentno napreznje s obzirom na spektar opterećenja i višeosno stanje napreznja rješeno je pomoću algoritma *Scaled Normal Stress in Critical Plane* koji uzima u obzir oštećenje uslijed smičnog napreznja.

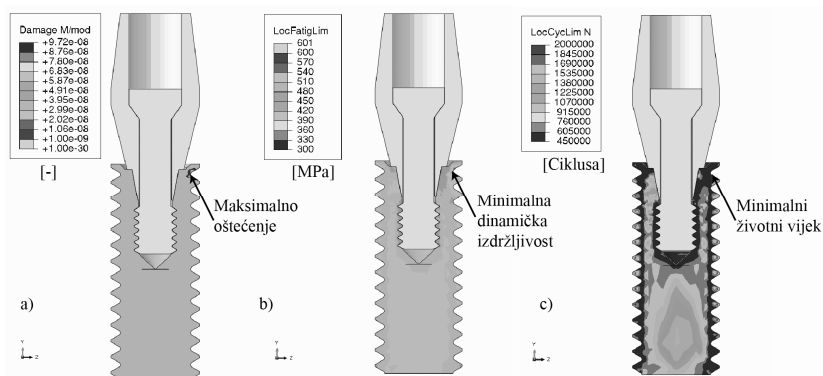
3 REZULTATI

Rezultati dobiveni s vjerojatnošću preživljavanja $P_S = 99,99\%$, površinskom hrapavošću implantata od $R_z = 2 \mu\text{m}$ i ostalim utjecajnim faktorima pokazuju da se maksimalna amplituda napreznja pojavljuje na korijenima navoja u spoju s kosti i vijkom nadogradnje. Visoka vlačna srednja napreznja su prisutna u prvom korijenu navoja implantata s kosti. Amplituda napreznja u navedenom korijenu iznosi $\sigma_A = 191 \text{ MPa}$, dok srednje napreznje iznosi $\sigma_M = 185 \text{ MPa}$. Raspodjela amplituda napreznja i srednjih napreznja prikazana je na slici 3.



Sl. 3. Rezultati, a) amplitude napreznja, b) srednja napreznja

Izvršena su istraživanja za površinsku hrapavost od $R_z = 2 \mu\text{m}$ i povišenu hrapavost na $R_z = 7 \mu\text{m}$. Hrapavost od $R_z = 2 \mu\text{m}$ rezultira s životnim vijekom od $N_f = 8,8 \cdot 10^6$ ciklusa do inicijacije zamorne pukotine, dinamičkom izdržljivošću $\sigma_D = 321 \text{ MPa}$ i utjecajnom faktoru hrapavosti na dinamičku izdržljivost od $f_{FLRough} = 0,9531$. Povišena hrapavost na $R_z = 7 \mu\text{m}$ rezultira s životnim vijekom od $N_f = 6,6 \cdot 10^6$ ciklusa do inicijacije zamorne pukotine, dinamičkom izdržljivošću $\sigma_D = 301 \text{ MPa}$ i utjecajnom faktoru hrapavosti na dinamičku izdržljivost od $f_{FLRough} = 0,8684$. S obzirom na životni vijek, pristup se temelji na životnom vijeku do stadija inicijacije pukotine dok propagacija pukotine nije uključena u životni vijek. Raspodjela zamornog oštećenja (D), dinamičke izdržljivosti (σ_D) i broja ciklusa pri kojemu se nalazi točka koljena $S-N$ krivulje prikazana je na slici 4. Točka koljena $S-N$ krivulje ukazuje pri kojem broju ciklusa dolazi do promjene nagiba krivulje s k na k' . Budući da je korištena modificirana Minerova hipoteza, amplitude ispod dinamičke izdržljivosti su uzete u obzir.

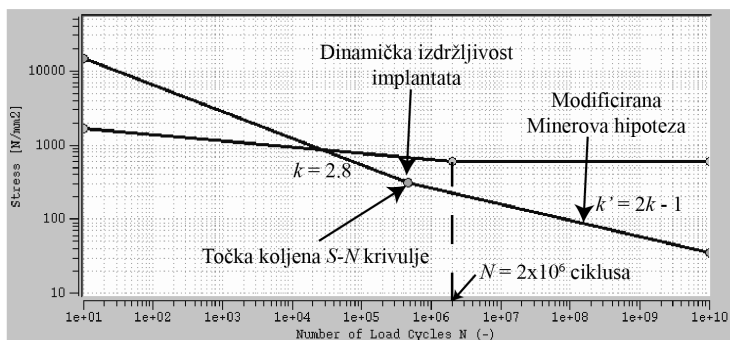


Sl. 4. Rezultati, a) oštećenje, b) dinamička izdržljivost, c) granica ciklusa koljena $S-N$ krivulje

4 DISKUSIJA

Eksperimentalnim i kliničkim istraživanjima potvrđeno je da hrapavost površine utječe na dinamičku izdržljivost implantata [9-11]. Za razumijevanje inicijacije zamornih pukotina, nužno je razmatrati prostornu raspodjelu naprezanja unutar kontinuuma implantata. Visoki gradijenti naprezanja prisutni su u korijenima navoja. Gradijenti naprezanja, srednja naprezanja i površinska hrapavost utječu na nagib (k) $S-N$ krivulje i granicu ciklusa dinamičke izdržljivosti (N_D), kao i vrijednost dinamičke izdržljivosti (σ_D). $S-N$ krivulja implantata postaje strmija zbog zareznog djelovanja navoja. Stoga je nužno uzeti u obzir gradijente naprezanja.

Lokalna $S-N$ krivulja prvog korijena navoja s $R_z = 2 \mu\text{m}$ prikazana je na slici 5.



Sl. 5. $S-N$ krivulja čvora na korijenu navoja implantata s $R_z = 2 \mu\text{m}$

Metode za određivanje dinamičke izdržljivosti zahtjevaju veliki broj testiranja zamora i statističkih analiza za pouzdanost vrijednosti. Ispitivanje dentalnih implantata provodi se prema normi ISO 14801. Dinamička izdržljivost prema normi definirana je kao maksimalno opterećenje pod kojim minimalno 3 ispitna uzorka postizu $2 \cdot 10^6$ ili $5 \cdot 10^6$ ciklusa (ovisno o frekvenciji ispitivanja) bez zamornog loma. FDA preporuke govore da 2 ili 3 ispitna uzorka se testiraju na 4 razine opterećenja (80, 70, 60 i 50% statičke čvrstoće), što ukupno daje 12 ispitnih uzoraka implantata.

5 ZAKLJUČAK

S korištenjem navedenih numeričkih metoda i utjecajnih faktora istraživanja, slijedeći zaključci se mogu navesti: površinska hrapavost uz oseointegraciju utječe i na dinamičku izdržljivost i životni vijek implantata, hrapavost je nužno držati u optimalnom području s obzirom na oseointegraciju i zamor, gradijenti naprezanja uz srednja naprezanja i hrapavost dovode do strmog nagiba lokalne *S-N* krivulje.

Literatura:

- [1] Albrektsson, T., Wennerberg, A., "Oral Implant Surfaces: Part 1 - Review Focusing on Topographic and Chemical Properties of Different Surfaces and in vivo Responses to Them", *The International Journal of Prosthodontics*, Vol. 17, 2004, str. 536-543.
- [2] Albrektsson, T., Wennerberg, A., "Oral Implant Surfaces: Part 2 - Review Focusing on Clinical Knowledge of Different Surfaces", *Int J Prosthodont*, Vol.17, 2004, str. 544-564.
- [3] Wennerberg, A., Albrektsson, T., "Implant Surface Beyond Micron Roughness. Experimental and Clinical Knowledge of Surface Topography and Surface Chemistry", *International Dentistry SA*, Vol.8, 2006, str. 14-18.
- [4] Ellingsen, J., Thomsen, P., Lyngstadaas, P., "Advances in Dental Implant Materials and Tissue Regeneration", *Journal of Periodontology*, Vol.41, 2000, str. 136-156.
- [5] Wennerberg, A., Albrektsson, T., Andersson, B., "Bone Tissue Response to Commercially Pure Titanium Implants Blasted with Fine and Coarse Particles of Aluminum Oxide", *The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants*, Vol.1, 1996, str. 38-45.
- [6] Buser, D., Nydegger, T., Oxland, T., Cochran, D.L., Schenk, R.K., Hirt, H.P., Snétivy, D., Nolte, L.P., "Interface Shear Strength of Titanium Implants with a Sandblasted and Acid-Etched Surface: a Biomechanical Study in the Maxilla of Miniature Pigs. *Journal of Biomedical Materials Research*, Vol.45, No.2, 1999, str. 75-83.
- [7] Patterson, E.A., Johns, R.B., "Theoretical Analysis of the Fatigue Life of Fixture Screws in Osseointegrated Dental Implants", *Int J Oral Maxillofac Implants* Vol.7, 1992, str. 26-33.
- [8] Balshi, T.J., "An Analysis and Management of Fractured Implants: a Clinical Report. *The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants*, Vol.11, 1996, str. 660-666.
- [9] Conrad, H.J., Schulte, J.K., Vallee, M.C., "Fractures Related to Occlusal Overload with Single Posterior Implants: a Clinical Report", *J Prosthet Dent*, Vol.99, 2008, str. 251-256.
- [10] Khraisat, A., Stegaroiu, R., Nomura, S., Miyakawa, O., "Fatigue Resistance of Two Implant/Abutment Joint Designs", *J Prosthet Dent*, Vol.88, 2002, str. 604-610.
- [11] Yokoyama, K., Ichikawa, T., Murakami, H., Miyamoto, Y., Asaoka, K., "Fracture Mechanisms of Retrieved Titanium Screw Thread in Dental Implant. *Biomaterials*, Vol.23, 2002, str. 2459-2465.

Autori:

Stipica Novoselac, student poslijediplomskog doktorskog studija, tel. 091/5056300, e-mail: stipica.novoselac@gmail.com

Todor Ergić, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet Slavonski Brod, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, tel. 035/493-429, e-mail: tergic@sfsb.hr

Dražan Kozak, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, tel. 035/493-452, e-mail: Drazan.Kozak@sfsb.hr

Tomislav Baškarić, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet Slavonski Brod, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, tel. 035/493-427, e-mail: Tomislav.Baskaric@sfsb.hr

IMPLEMENTACIJA NUMERIČKOG MODELA RASTA ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE U PAKET ZA KONAČNE ELEMENTE

Vindiš V., Virag L. i Karšaj I.

Sažetak: Numerički model rasta i restrukturiranja AAA u obzir uzima i mehanički i biokemijski utjecaj (razgradnja strukturalno bitnih dijelova aorte) intraluminalnog sloja (ILT-a) na stijenku aorte. Model je ograničen na osnosimetričnu geometriju. Implementacijom numeričkog modela rasta AAA unutar paketa za analizu konačnim elementima cilj je proširenje problema na opću 3-D geometriju. Analiza konačnim elementima izvršena je pomoću programskog paketa FEAP. FEAP (Finite Element Analysis Program) je računalni softver za modeliranje i analizu konačnim elementima. Izvorni kod programa nadopunjen je materijalnim modelom koji obuhvaća ponašanje svih utjecajnih konstituenata za realan opis rasta i restrukturiranja AAA.

Cilj istraživanja je proširiti dosadašnje rezultate numeričkog modela rasta i restrukturiranja AAA kroz upotrebu konačnih elemenata. Cilj je implementirati 3-D ponašanje i adaptaciju abdominalne aorte, nastanak i ponašanje ILT-a te međudjelovanje ILT-a i stijenke.

Ključne riječi: Aneurizma abdominalne aorte, intraluminalni tromb, rast i restrukturiranje

1 UVOD

Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je lokalno povećanje promjera aorte. Oko 80% AAA sadrži intraluminalni tromb (ILT) koji smanjuje naprezanja unutar stijenke aorte, ali ju i oslabljuje. ILT nastaje uslijed poremećene hemodinamike, odnosno stvaranja vrtloga, koji stvaraju područja s visokim posmičnim naprezanjima u lumenu pogodnim za aktivaciju trombocita, te područja s niskim posmičnim naprezanjima na stijenci aorte gdje je omogućeno skupljanje aktiviranih trombocita na oštećenim endotelnim stanicama [2]. Početna faza nastanka ILT-a može se opisati aktiviranjem trombocita, pretvaranjem fibrinogena u fibrin pomoću trombina i stvaranjem fibrinske mreže u kojoj crvene i bijele krvne stanice ostaju zarobljene [5]. Ovakva struktura je tipična za dio intraluminalnog tromba uz tok krvi, odnosno njegov luminalni sloj. S obzirom da je u kontaktu s krvi, luminalni sloj je prepoznatljive crvene boje i proteolitički najaktivniji. Širenjem aneurizme raste i ILT, pa nastaju dijelovi tromba koji su dovoljno daleko od krvi, odnosno nastaje intramedijalni sloj koji može biti deo i nekoliko centimetara. U velikim aneurizmama može nastati abluminalni sloj kod kojeg je fibrinska mreža znatno više razgrađena i neorganizirana u odnosu na luminalni i intramedijalni sloj. Očito svaki od tri sloja tromba karakteriziraju drugačija biokemijska i mehanička svojstva [7, 10]. Primjerice, luminalni sloj ima najveću vlačnu krutost, dok abluminalni ima najveću tlačnu krutost.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

U [8] je napravljen matematički model koji opisuje rast AAA. Za razliku od ostalih modela rasta i restrukturiranja (G&R, engl. *growth and remodeling*), u tom modelu je uzet u obzir mehanički i biokemijski utjecaj ILT-a na stijenku aorte. U njemu je opisan nastanak i rast tromba (prvo luminalnog, a zatim i ostala dva sloja), promjena njegove strukture i mehaničkih svojstava. Intraluminalni tromb smanjuje maksimalna naprezanja unutar stijenke, a time utječe na brzinu stvaranja mase kolagena i mišićnih stanica (strukturalno bitnih dijelova stijenke aorte).

Numerički model rasta i restrukturiranja AAA u obzir uzima i mehanički i biokemijski utjecaj (razgradnja strukturalno bitnih dijelova aorte) ILT-a na stijenku aorte. Model je ograničen na osnosimetričnu geometriju. Implementacijom numeričkog modela rasta AAA unutar paketa za analizu konačnim elementima cilj je proširenje problema na opću 3-D geometriju. Pri modeliranju se koristi teorija smjesa i pri tome se opisuje ponašanje samo mehanički bitnih dijelova tromba. Maseni udjeli strukturalnog bitnih dijelova tromba mijenjaju se s obzirom na položaj i tijekom vremena.

Cilj istraživanja je proširiti dosadašnje rezultate numeričkog modela rasta i restrukturiranja AAA kroz upotrebu konačnih elemenata. Cilj je implementirati 3-D ponašanje i adaptaciju abdominalne aorte, nastanak i ponašanje ILT-a te međudjelovanje ILT-a i stijenke.

3 METODOLOGIJA

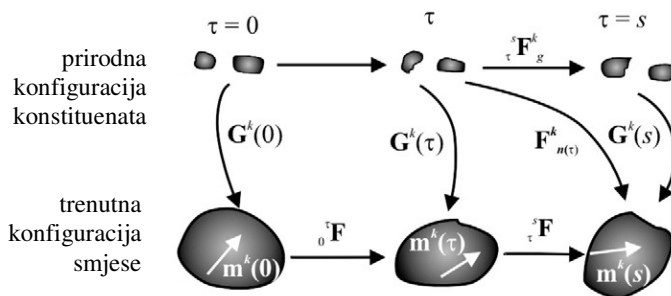
Realna zdrava aorta aproksimirana je opisom triju njenih konstituenata : elastin, četiri familije vlakana kolagena i glatke mišićne stanice. Dostupni podaci pokazuju kako se elastin ne proizvodi tijekom odrasle dobi. S druge strane vlakna kolagena i glatke mišićne stanice kontinuirano se proizvode i odumiru. Uz pretpostavku da je gustoća aorte konstantna tijekom vremena prema [4] slijedi :

$$J = \frac{M(t)}{M(0)}, \quad (1)$$

gdje je J determinanta gradijenta deformiranja a $M(t)$ i $M(0)$ mase u trenutnom i početnom trenutku. Sl. 3.1. opisuje model rasta i restrukturiranja aorte. Trenutak $t=0$ označava početak simulacije te opisuje homeostatsko stanje. \mathbf{G}^k opisuje predistezanja konstituenata dok gradijent deformiranja $\mathbf{F}_{n(\tau)}$ opisuje preslikavanje iz prirodne konfiguracije konstituenta u trenutnu konfiguraciju smjese.

Iz sheme modela rasta i restrukturiranja (Sl. 3.1.) vidljivo je da je za prirodnu konfiguraciju konstituenata uzeta različita konfiguracija od konfiguracije smjese. Prema tome, $\mathbf{G}^k(\tau)$ opisuje predistezanja konstituenata u trenutku nastanka. Masa svakog konstituenta mijenja se kao posljedica promjena u naprezanjima, a te promjene opisane su funkcijama proizvodnje i odumiranja. Prema [4] trenutna masa konstituenta opisana je s

$$M^k(s) = M^k(0)Q^k(s) + \int_0^s m^k(\tau)q^k(s-\tau) d\tau, \quad (2)$$



Sl. 3.1. Model rasta i restrukturiranja aorte

gdje je $M^k(s)$ i $M^k(0)$ masa konstituenta u trenutnom i početnom trenutku, $Q^k(s)$ funkcija odumiranja koja opisuje udio mase konstituenta koji je preživio od trenutka $t=0$ do $t=s$, q^k funkcija odumiranja koja opisuje udio mase konstituenta koji je preživio od trenutka t do trenutka s , m^k funkcija proizvodnje konstituenta.

Funkcija proizvodnje konstituenta opisana je prema [4] u ovisnosti o promjenama naspram homeostaskog stanja :

$$m^k(\tau) = m_B^k [1 + K_\sigma^k \Delta\sigma + K_c^k \Delta C], \quad (3)$$

gdje je m_B^k vrijednost funkcije proizvodnje konstituenta za homeostasko stanje, $\Delta\sigma = \|\mathbf{t}^k\| - \|\mathbf{t}_h^k\|$ je razlika naprezanja konstituenta naspram homeostatskog stanja a K_σ pripadajuću faktor skaliranja, ΔC razlika u koncentraciji vazokonstriktora i vazodilatatora te ovisi o promjenama u protoku $\Delta C = f(r_i)$.

Funkcija odumiranja konstituenta opisana je prema [4]

$$q^k(s-\tau) = \exp\left(-\int_\tau^s K_h^k \zeta^k(t) dt\right), \quad (4)$$

gdje je K_h vrijeme života konstituenta dok ζ^k opisuje omjer naprezanja vlakna u odnosu na homeostaske vrijednosti :

$$\zeta^k(t) = \frac{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_{n(\tau)}}(\mathbf{C}_{n(\tau)}(t))}{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_{n(\tau)}}(\mathbf{C}_{n(0)}(0))}. \quad (5)$$

Cauchyjevo naprezanje smjese računa se kao :

$$\mathbf{t} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial W^{uk}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + \mathbf{t}^{act} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta, \quad (6)$$

gdje je \mathbf{t}^{act} aktivni dio naprezanja mišćnih stanica, a W funkcija gustoće energije deformiranja smjese te se za smjesu računa pomoću masenih udjela $W = \phi^k W^k$. Lagrangeov faktor $p\mathbf{I}$ obuhvaćen je sfernim dijelom funkcije gustiće energije

deformiranja. Prema [4] funkcija gustoće energije deformiranja za konstituent koji se kontinuirano proizvodi i razgrađuje kroz vrijeme opisana je pomoću

$$W^k(s) = \frac{M^k(s)}{\sum_k M^k(s)} Q^k(s) W^k(\mathbf{C}_{n(0)}^k(s)) + \int_0^s \frac{m^k(\tau)}{\sum_k M^k(s)} q^k(s-\tau) W^k(\mathbf{C}_{n(\tau)}^k(s)) d\tau. \quad (7)$$

4 IMPLEMENTACIJA UNUTAR FEAP-a

Implementacijom numeričkog modela rasta AAA unutar paketa za analizu konačnim elementima cilj je proširenje problema na opću 3-D geometriju. Analiza konačnim elementima izvršena je pomoću FEAP-a. Implementacija materijalnog modela aorte izvršena je unutar *user material* (umat) potprograma u kojoj je potrebno zadati izraze za Cauchyjevo naprezanje i tangenti modul. U svrhu što boljeg opisa nestlačivosti materijala korištena je *augmented* Lagrangeova metoda dostupna unutar FEAP-a.

Naprezanja konstituenta podijeljena su na devijatorski dio i sferni dio a samim time i funkcije gustoće energije deformiranja $W_{uk} = W_{sph} + \bar{W}$. Devijatorski dio gradijenta naprezanja opisan je kao $\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}$. Za glatke mišićne stanice i kolagenska vlakna funkcija energije deformiranja glasi

$$W_{dev}^k = \frac{k_2}{4k_3} e^{k_3 (\mathbf{m} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{m}^T - 1)^2} = \frac{k_2}{4k_3} e^{k_3 (J^{-2/3} \mathbf{m} \mathbf{C} \mathbf{m}^T - 1)^2}, \quad (8)$$

gdje su c_2, c_3 parametri materijala, \mathbf{C} desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti i $\mathbf{m} = [0 \cos(\alpha) \sin(\alpha)]$ je vektor orijentacije vlakana, gdje je α kut između orijentacije vlakna i koordinatnih osi. Glatke mišićne stanice u modelu uzete su s cirkularnom orijentacijom, pa vektor orijentacije glatkih mišićnih stanica iznosi $\mathbf{m} = [010]$. Četiri familije kolagenskih vlakana opisane su s četiri orijentacije $\alpha = [0^\circ 90^\circ 45^\circ 135^\circ]$. Ponašanje elastina opisano je NeoHookeovim modelom :

$$\bar{W}^e = c_1 (\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) - \mathbf{I}) = c_1 J^{-2/3} (\text{tr}(\mathbf{C}) - \mathbf{I}), \quad (9)$$

gdje je c_1 parametar materijala. Sferni dio naprezanja opisan je kao

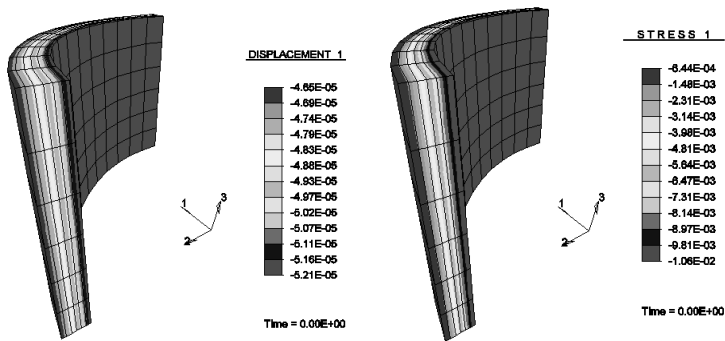
$$W_{sph} = \frac{1}{d_1} (J - 1)^2 \quad (10)$$

gdje je d_1 parametar stlačivosti materijala, za male vrijednosti parametra d_1 funkcija gustoće energije deformiranja raste pa se materijal ponaša približno nestlačivo. Kako se radi o modelu s izrazito nelinearnim ponašanjem, nije moguće dobiti rješenje za parameter d_1 u jednom koraku. Primjenom *augmented* Lagrangeove metode u više koraka računaju se naprezanja za počevši od veći vrijednosti d_1 prema manjim. Iz jednadžbe (1) vidljivo je da za opis rasta sferni dio naprezanja ovisi o trenutnoj i početnoj masi pa funkcija gustoće energije deformiranja prelazi u oblik

$$W_{sph} = \frac{1}{d_1} \left(J - \frac{M(s)}{M(0)} \right)^2. \quad (11)$$

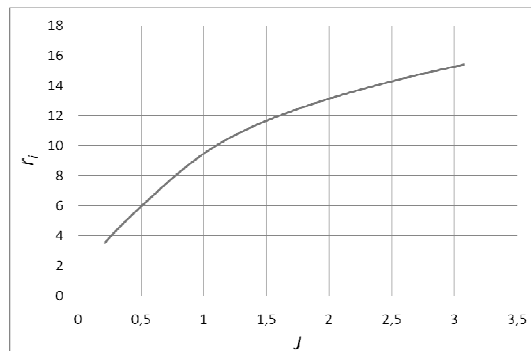
5 REZULTATI

Iako cjeloviti model rasta i restrukturiranja aorte nije do kraja implementiran u paket za konačne elemente neki rezultati ipak postoje. Prilikom modeliranja, a u svrhu validacije modela, uspoređeni su rezultati rezidualnih napreznja prema [3]. Invivo konfiguracija opterećena unutarnjim tlakom p i zadanom geometrijom izračunatom semi-analitičkim postupkom učitana u FEAP, očekivano dala je rezultate $\mathbf{F} \cong \mathbf{I}$ (Sl. 5.1.). Također, i neopterećena konfiguracija unutar FEAP-a dala je pomake i napreznja približno jednaka semi-analitičkim.



Sl. 5.1. Invivo konfiguracija aorte

U [6] prikazana je ovisnost determinante gradijenta deformiranja i unutarnjeg radijusa aorte prilikom homogene proizvodnje i odumiranja konstituenata aorte. Slični rezultati dobiveni su ovim modelom. Rezultati pokazuju da raspadom konstituenata unutarnji radijus aorte opada.



Sl. 5.2. Ovisnost unutarnjeg radijusa r_i i determinante gradijenta deformiranja J

6 ZAKLJUČAK

Numerički model rasta i restrukturiranja AAA iz [8] u obzir uzima i mehanički i biokemijski utjecaj (razgradnja strukturalno bitnih dijelova aorte) ILT-a na stijenku aorte. Cilj istraživanja je proširiti dosadašnje rezultate numeričkog modela rasta i restrukturiranja AAA kroz upotrebu metode konačnih elemenata. Cilj je implementirati 3-D ponašanje i adaptaciju abdominalne aorte, nastanak i ponašanje ILT-a te međudjelovanje ILT-a i stijenke. Implementacijom numeričkog modela rasta AAA unutar paketa za analizu konačnim elementima cilj je proširenje problema na opću 3-D geometriju. Iako potpuna implementacija nije završena, početni rezultati pokazuju poklapanja s dosadašnjim. Cilj je u prvom koraku dovršiti adaptaciju zdrave aorte na promjene homeostaskog stanja, te u sljedećem koraku povezati 3-D model s modelom iz [9] u svrhu dobivanja 3-D geometrije ILT-a.

Literatura :

- [1] Adolph, R., Vorp, D.A., Steed, D.L., Webster, M.W., Kameneva, M. V, Watkins, S.C., "Cellular content and permeability of intraluminal thrombus in abdominal aortic aneurysm", *Journal of Vascular Surgery*, Vol.25, 1997, str. 916–26.
- [2] Arzani, A., Shadden, S.C., "Characterization of the transport topology in patient-specific abdominal aortic aneurysm models", *Physics of Fluids*, Vol.24, 2012, str. 81901-1-16.
- [3] Cardamone, L., Valentin, A., Eberth, J.F., Humphrey, J.D., "Origin of Axial Prestretch and Residual Stress in Arteries", *Biomech Model Mechanobiol*, Vol. 8, 2009, str. 431–446.
- [4] Karšaj, I., Sorić, J., Humphrey, J.D., "A 3-D framework for arterial growth and remodeling in response to altered hemodynamics", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, 2010, str. 1357–1372.
- [5] Tong, J., Cohnert, T., Regitnig, P., Holzapfel, G.A., "Effects of age on the elastic properties of the intraluminal thrombus and the thrombus-cove red wall in abdominal aortic aneurysms: biaxial extension behaviour and material modelling", *European Journal of Vascular and Endovascular Surgery*, Vol.42, 2011, str. 207–19.
- [6] Valentin, A., Humphrey, J.D., Holzapfel, G.A., "A finite element-based constrained mixture implementation for arterial growth, remodeling, and adaptation: Theory and numerical verification", *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 29, 2013, str. 822–849.
- [7] Vande Geest, J.P., Sacks, M.S., Vorp, D.A., "The effects of aneurysm on the biaxial mechanical behavior of human abdominal aorta", *Journal of Biomechanics*, Vol.39, 2006, str. 1324–34.
- [8] Virag, L., Karšaj, I., Humphrey J.D., "Interaction of Intraluminal Thrombus and Aortic Wall - 3-D Numerical Model" *Proceedings of 8th European Solid Mechanics Conference 2012*, Graz AT, 2012, CD-ROM edition

Autori:

Vedran Vindiš, Sveučilište, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5 , tel. 01/6168 490, e-mail: vedran.vindis@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/vindis/>
Igor Karšaj, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5 , tel. 01/6168 490, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/karsaj/>
Lana Virag, Sveučilište, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5 , tel. 01/6168 125, e-mail: lane.virag@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/virag/>

MODEL RASTA I RESTRUKTURIRANJA ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE

Virag, L., Vindiš, V., Wilson, J. S., Karšaj, I. i Humphrey, J. D.

Sažetak: Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je nepovratno lokalizirano proširenje aorte uslijed razgradnje izvanstanične matrice. Oko 80% AAA sadrži intraluminalni tromb (ILT). Biokemijska i mehanička svojstva tromba utječu na rast i restrukturiranje (G&R) AAA. Ovdje su prikazani rezultati rasta pojednostavljene aneurizme koja ne sadrži tromb (raspad elastina ne ovisi o količini enzima koji ga razgrađuju—elastaza, nego isključivo o vremenu poluraspada), kao i prvi model rasta i restrukturiranja aneurizme abdominalne aorte koji uzima u obzir sveobuhvatni utjecaj intraluminalnog tromba na stijenku aorte: kako s mehaničkog gledišta (utjecaj tromba na raspodjelu naprezanja unutar stijenke aorte, a time i na proizvodnju i uklanjanje strukturalno bitnih dijelova stijenke aorte), tako i sa biokemijskog (utjecaj proteolitički aktivnog intraluminalnog tromba na povećanje razgradnje komponenti stijenke krvne žile). Model će biti ograničen na osnosimetričnu cilindričnu geometriju.

Ključne riječi: Aneurizma abdominalne aorte, intraluminalni tromb, rast i restrukturiranje

1 UVOD

Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je fokalno proširenje krvne žile uslijed razgradnje elastina u stijenci aorte, a definira se ili kao infrarenalna aorta s promjerom većim od 30 mm, ili kao 50%-tno proširenje u odnosu na neki bliski presjek. Aneurizma se povećava tijekom nekoliko desetaka godina, ali do rupture dolazi naglo i bez upozorenja kada naprezanje u stijenci aorte nadvisi njezinu čvrstoću. U 80% AAA dolazi do stvaranja intraluminalnog tromba (ILT). Tromb može služiti kao mehanička zaštita od prevelikih naprezanja, ali upalne stanice u dijelu tromba uz lumen (luminalni sloj) izlučuju proteolitičke enzime koji oslabljuju stijenku aorte i čini ju podložnom razvoju aneurizme. Liječenje AAA se svodi na operativni zahvat kod pacijenata čiji je maksimalni promjer aneurizme veći od 5-5,5 cm (ili po iskustvu liječnika). Istraživanja su pokazala da, iako je rizik od rupture zasigurno povezan s maksimalnim promjerom, korištenje samo tog pokazatelja za odlučivanje o odlasku na operaciju ne samo da može dovesti do nepotrebnih operativnih zahvata u slučaju stabilnih velikih aneurizmi, nego može isključiti neke potrebne (aneurizme promjera manjeg od 5 cm kod kojih je došlo do rupture). Studije su pokazale da u 10-24% slučajeva aneurizme manje od 5 cm dožive rupturu, ali i da 25-54% aneurizmi većih od 7,1 cm ne rupturira, [1]. Također, prema kliničkom iskustvu, do rupture najčešće dolazi upravo na mjestu najvećeg tromba. Prema tome, ILT ima značajan utjecaj na rast i razvoj AAA i ne smije ga se zanemariti tijekom modeliranja rasta AAA.

2 MODELI

Stijenka aorte se sastoji od tri sloja, a svaki od slojeva ima različit udio strukturalno bitnih dijelova koji daju krutost stijenci: kolagena, elastina i glatkih mišićnih stanica. Ovisno o veličini i starosti, tromb također može imati do tri biomehanički različita sloja, s različitim udjelima fibrina, crvenih krvnih stanica, produkata raspada fibrina i praznina (kanalića). Modeli rasta i restrukturiranja (*growth and remodeling*, G&R) arterija, te razvijeni model nastanka i rasta intraluminalnog tromba, kao i promjene njihovih mehaničkih svojstava, opisani su u [8]. Ukratko, koristimo pristup prema [2], odnosno matematički model iz [4] i [5]. Model G&R aorte se temelji na osnovnoj pretpostavci da se elastin, kolagena vlakna i mišićne stanice unutar smjese zajedno deformiraju (*continuum-based constrained mixture theory*); a za model ponašanja tromba unutarnji promjer, odnosno površina kroz koju teče krv, ostaje nepromijenjen pod konstantnim vanjskim opterećenjem. Masa svakog konstituenta se mijenja u vremenu, ovisno i brzini stvaranja/uklanjanja mase strukturalno bitnog dijela \dot{m}^k i funkciji uklanjanja (*survival function*) q^k , prema [2]. Anizotropno, Cauchyjevo naprezanje aorte opisuje se kao:

$$\mathbf{t} = \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + t^{\text{active}} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (1)$$

gdje je \mathbf{F} gradijent deformiranja koji povezuje trenutnu konfiguraciju i konfiguraciju neopterećene smjese, \mathbf{C} je desni Cauchy-Greenov tenzor, t^{active} je kontraktilnost mišićnih stanica u cirkularnom smjeru, a W funkcija energije deformiranja izračunata preko pravila smjesa kao $W = \sum_k W^k$. U taj izraz su maseni udjeli pojedinog strukturalnog dijela k uračunati u W^k , kao u [4]:

$$W^k(s) = \frac{M^k(0)}{\sum_k M^k(s)} \hat{W}^k(\mathbf{C}_{n(0)}^k(s)) Q^k(s) + \int_0^s \frac{\dot{m}^k(\tau)}{\sum_k M^k(s)} \hat{W}^k(\mathbf{C}_{n(\tau)}^k(s)) q^k(s-\tau) d\tau. \quad (2)$$

U jednadžbi (2) M^k označava masu konstituenta k , \hat{W}^k funkciju specifične energije deformiranja za svaki strukturalno bitni dio, dok je $Q^k(s) = q^k(s-0)$.

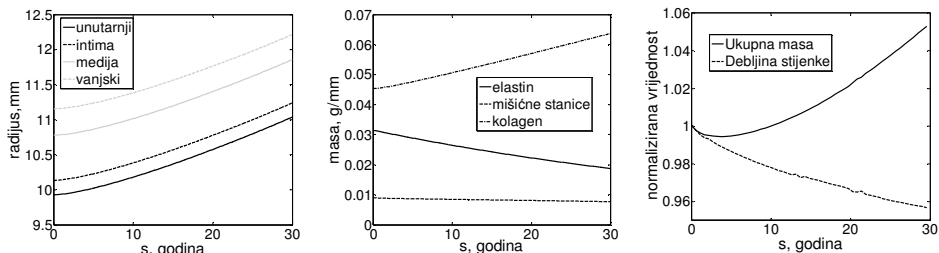
Do sada razvijeni modeli razvijeni za opisivanje nastanka i razvijanja tromba se odnose samo na privremene krvne ugruške drugačijih svojstava i svrhe od ILT-a. Iz tog razloga smo razvili novi matematički model temeljen na eksperimentalnim rezultatima, čiji se pregled može naći u [9]. Model opisuje nastanak i rast intraluminalnog tromba, kao i razvoj njegovih mehaničkih svojstava. Tromb na stijenku ima mehanički i biokemijski utjecaj. Inzoli et al. su u [3] prvi predložili mogućnost da ILT može služiti kao mehanička zaštita stijenke AAA od prevelikih naprezanja. Model računa koliki dio naprezanja tromba može preuzeti sa stijenke. Također, model opisuje difuziju plazmina zaslužnog za razgradnju fibrina, količinu upalnih stanica u trombu i stijenci, te količinu enzima koji razgrađuju elastin i kolagen, kao što je opisano u [8].

Uz utjecaj tromba na stijenku je modelirana i apoptoza (odumiranje glatkih mišićnih stanica sa elastinom) i smanjenje maksimalne kontraktilnosti mišićnih stanica.

3 REZULTATI

3.1 Starenje zdrave stijenke aorte

Elastin se stvara isključivo prije rođenja i ima znatno duži poluživot (40) godina u usporedbi s kolagenom i mišićnim stanicama koje se obnavljaju s poluživotom od otprilike 70 dana. Starenjem se gubi elastin koji se ne može nadoknaditi, te se zbog toga i zdrava krvna žila širi. Kao testni primjer ponašanja modela pri razgradnji elastina, što je tipično za AAA, simulirali smo starenje zdrave stijenke aorte. Prema literaturi ([6]) očekujemo da će se unutarnji promjer povećavati približno 0,07 mm godišnje.



Sl. 1. Vremenska promjena radijusa (lijevo), masa strukturalno bitnih dijelova (sredina) i ukupne mase i normalizirane debljine stijenke u slučaju starenja (desno)

Kod simulacije ta vrijednost ovisi o parametrima koji opisuju brzinu stvaranja/uklanjanja kolagena i mišićnih stanica uslijed promjene napreznja i koncentracije vazodilatatora (K_σ i K_C). Ti parametri se ne mogu eksperimentalno odrediti, ali su u [7] ograničeni na raspon [10].

Na Sl. 1. su prikazani rezultati za vrijednosti $K_\sigma = 3$ i $K_C = 0,5$. Za takve zadane vrijednosti unutarnji promjer aorte raste prosječnom brzinom 0,11 mm godišnje tijekom 30 godina. Na Sl. 1 (sredina) je prikazana vremenska promjena masa konstituenta. Elastin se razgrađuje s poluživotom od 40 godina, zbog čega se krvna žila širi. Širenje uzrokuje promjenu stanja napreznja, te se kolagen počinje više proizvoditi. Masa glatkih mišićnih stanica ostaje približno konstantna, jer iako je i njegova proizvodnja povećana, isto vrijedi i za razgradnju (apoptoza). Na Sl. 1 (desno) se vidi da iako sveukupna masa stijenke po jedinici dužine raste, debljina stijenke blago pada, zbog dilatacije stijenke.

3.2 Rast aneurizme bez tromba

U slučaju aneurizme, elastin ima kraći životni vijek nego u zdravoj aorti, te je i dilatacija aorte mnogo brža: širenje aneurizme od 2 mm/godina se smatra stabilnim rastom, dok se rast od 1 cm godišnje smatra visoko rizičnim za rupturu.

S obzirom da su kolagena vlakna i mišićne stanice kod zdrave aorte orijentirane u cirkularnom i aksijalnom smjeru, lamele elastina jedine mogu imati radijalnu komponentu napreznja, odnosno jedine drže tlak. U AAA je produkcija kolagena povećana (stvara brže nego u zdravoj aorti), što za posljedicu ima promjenu mehaničkih svojstava, ali i dolazi do zakretanja vlakana u sva tri smjera, čime sprječava rupturu aorte nakon što se elastin (gotovo) potpuno razgradi.

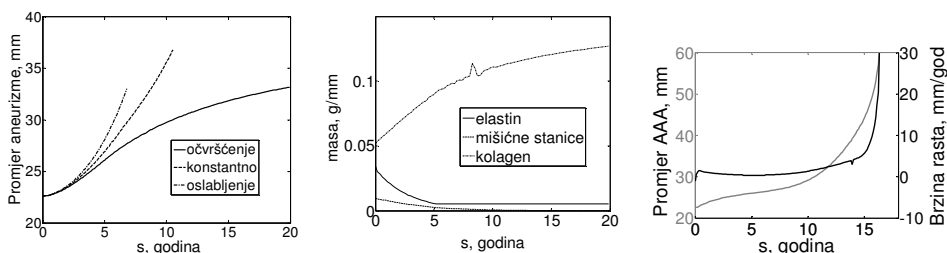
Promjena orijentacije kolagenih vlakana još nije istražena, te nije mogla biti ni modelirana. Da bi spriječili da u simulaciji dođe do rupture do koje ne bi došlo u

stvarnosti, spriječen je potpuni raspad elastina ako je funkcija specifične energije deformiranja definirana prema [2] kao:

$$\hat{W} = \frac{c_2}{4c_3} \left[\exp(c_3(I_4 - 1)^2) - 1 \right], \quad (3)$$

gdje su c_2 i c_3 parametri materijala, a I_4 četvrta invarijanta desnog Cauchy-Greenova tenzora; ili, u drugom slučaju, ako je dopušten potpuni raspad elastina, funkcija specifične energije kolagena je modificirana da sadrži i Neo-Hookeov dio:

$$\hat{W} = c_1^* \left(\text{tr}(\mathbf{C}_{n(\tau)}) - 3 \right) + \frac{c_2^*}{4c_3^*} \left[\exp(c_3^*(I_4 - 1)^2) - 1 \right]. \quad (4)$$



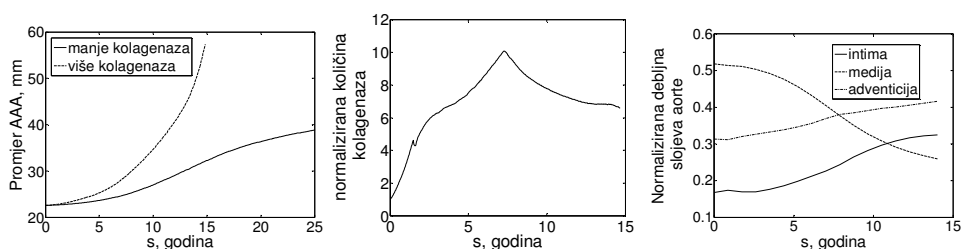
Sl. 2. Vremenska promjena promjera aneurizme za različita mehanička svojstva kolagena (lijevo) i mase konstituenata kada je potpuni raspad elastina spriječen (sredina), te način i brzina rasta vanjskog promjera aneurizme kod drugog modela funkcija energija deformiranja kolagena

Sl. 2. prikazuje rezultate za dva načina modeliranja kolagena. Također, s obzirom da kolagen nema jednako vremena da bude postavljen u izvanstaničnu matricu kao u zdravoj aorti, mehanička svojstva mu se mijenjaju. Na Sl. 2. (lijevo) je prikazan rast aneurizme s prvom formulacijom funkcije specifične energije deformiranja pri promjeni mehaničkih svojstava kolagena. Vidljivo je da očvršćenje kolagena, opisano pomoću povećanja bezdimenzijskog parametra c_3 povezanog s istezanjem vlakna, pomaže stabilizaciji aneurizme, dok kod oslabljenja ili nepromijenjenih mehaničkih svojstava dolazi do bržeg rasta i rupture. Ovi rezultati se slažu s rezultatima prikazanim u [10], gdje je pokazano da smanjenje parametra c_3 može uzrokovati rupturu, dok uslijed njegovog povećanja aneurizma može naći ravnotežan položaj i prestati rasti. Na Sl. 2 (sredina) vidimo promjenu masa konstituenata, za slučaj očvršćenja kolagena. Elastin se prestao razgrađivati nakon što ga je preostalo samo 15%, dok smo dopustili mišićnim stanicama da se raspadnu potpuno. Posljedično, masa kolagena zbog promjene stanja napreznaja raste.

Ako primijenimo funkciju specifične energije deformiranja prema (4), očvršćenje kolagena neće dovesti do ravnoteže (Sl. 2 (desno)). Siva krivulja pokazuje promjer aneurizme, koji od početnih 2 cm naraste do 6 cm prije nego dođe do rupture. Crna krivulja prikazuje brzinu rasta AAA, koja je prvih 15 godina iznosi nekoliko milimetara, a nakon toga naraste na opasnih (nekoliko) centimetara na godinu, što se poklapa s kliničkim iskustvom.

3.2 Rast aneurizme s trombom

Dio tromba uz lumen (luminalni sloj) je izuzetno proteolitički aktivan, tj. sadrži veliku količinu enzima iz krvi koji razgrađuju proteine (elastin i kolagen). Udaljavanjem od toka krvi se proteolitička aktivnost brzo smanjuje. Kod malih aneurizama je aktivni dio tromba blizu stijenci i enzimi mogu lako difuzijom doći do nje i oslabiti ju. S rastom AAA, a time i tromba, biokemijski utjecaj tromba slabi, ali veći tromb može preuzeti veći dio naprezanja i služiti kao mehanička potpora stijenci. Na Sl. 3. prikazana su dva slučaja s potpuno istim parametrima, osim što u jednom količina kolagenaza (enzima koji razgrađuju kolagen) povećana za 25%. Na Sl. 3 (lijevo) se vidi da povećanje količine kolagenaza može promijeniti način rasta od stabilnog do rupture. Na sl. 3 (sredina) je prikazana vremenska promjena kolagenaza u stijenci aorte (za slučaj rupture). Vidljivo je da količina u početku raste, no kad se luminalni sloj tromba potpuno formira, ostatak tromba djeluje kao barijera za difuziju enzima prema stijenci i količina se počinje smanjivati.



Sl. 3. Vremenska promjena vanjskog promjera aorte za različite količine enzima (lijevo), količine kolagenaza u stijenci aorte (sredina), te debljine tri sloja stijenke (desno)

Na Sl. 3 (desno) su prikazane vremenske promjene tri sloja stijenke aorte. Prema očekivanjima i u skladu s literaturom, srednji sloj (medija) se znatno smanjio, dok su ostala dva sloja (posebno intima uz tromb) zadebljali.

4 ZAKLJUČAK

Model zdrave aorte i starenja pokazuju dobra poklapanja s literaturom. Kod simuliranja rasta aneurizme, i sa i bez tromba, dobivena je realna brzina rasta i veličina aneurizme (vanjskog promjera 6 cm), kao i sva tri moguća ishoda: ruptura, stabilan rast ili prestanak rasta. Tromb ima i značajno mehaničko djelovanje, kao što smo pokazali u [8], ali iz trećeg primjera je očito da ima i biokemijski značaj na razgradnju proteina u stijenci (elastina i kolagena) i slabljenje stijenke koje može potpuno promijeniti način rasta AAA, od pronalaska ravnoteže do rupture.

Model je ograničen na osnosimetričnu geometriju, mogao bi se poboljšati nizom dodatnih promjena (npr. promjenom orijentacije kolagenih vlakana i u radijalni smjer) i trebala bi se provesti nekolicina eksperimenata za točnije određivanje parametara modela, ali i trenutni modeli daju realna rješenja i mogu opisati klinička iskustva.

Literatura:

- [1] Darling, R.C., Messina, C.R., Brewster, D.C., Ottinger, L.W., "Autopsy study of unoperated abdominal aortic aneurysms. The case for early resection" *Circulation*, Vol.45, 1977, str. II161–4.
- [2] Humphrey, J.D., Rajagopal, K.R., "A constrained mixture model for growth and remodeling of soft tissues", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol.12, 2002, str. 407–430.
- [3] Inzoli, F., Boschetti, F., Zappa, M., Longo, T., Fumero, R., "Biomechanical factors in abdominal aortic aneurysm rupture", *European Journal of Vascular Surgery*, Vol.7, 1993, str. 667–74.
- [4] Karšaj, I., Humphrey, J.D., "A multilayered wall model of arterial growth and remodeling", *Mechanics of materials*, Vol.44, 2012, str. 110–119.
- [5] Karšaj, I., Soric, J., Humphrey, J.D. "A 3-D framework for arterial growth and remodeling in response to altered hemodynamics", *International Journal of Engineering Science*, Vol.48, 2011, str. 1357–1372.
- [6] Länne, T., Sonesson, B., Bergqvist, D., Bengtsson, H., Gustafsson, D., "Diameter and compliance in the male human abdominal aorta: influence of age and aortic aneurysm", *European journal of vascular surgery*, Vol.6, 1992, str. 178–84.
- [7] Valentín, A., & Humphrey, J. D., "Parameter sensitivity study of a constrained mixture model of arterial growth and remodeling", *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 131(10), 2009, str. 101006-1-11.
- [8] Virag, L., Wilson, J. S., Karšaj, I., Humphrey, J. D.. "Međudjelovanje intraluminalnog tromba i aneurizmatične stijenske aorte", *Zbornik radova Petog susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, I. Karšaj, T. Jarak (ur.), Donja Stubica, Hrvatska, 2013, str 213–218.
- [9] Wilson, J. S., Virag, L., Di Achille, P., Karšaj, I., Humphrey, J. D., . "Biochemomechanics of Intraluminal Thrombus in Abdominal Aortic Aneurysms", *Journal of biomechanical engineering*, Vol 135(2), str. 021011-1-14.
- [10] Wilson, J. S., Baek, S., Humphrey, J. D., "Importance of initial aortic properties on the evolving regional anisotropy, stiffness and wall thickness of human abdominal aortic aneurysms.", *Journal of the Royal Society Interface*, 2012, Vol 9(74), str. 2047–58.

Autori:

Lana Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8490, fax: 616 8187, e-mail: lane.virag@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/virag/

Vedran Vindiš, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8490, fax: 616 8187, e-mail: vedran.vindis@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/vindis/

John S. Wilson, Yale University, School of Engineering and Applied Mechanics, 55 Prospect street, New Haven, CT 06511, tel. +1 (203) 432 6428, e-mail: john.wilson@yale.edu

Igor Karšaj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8125, fax: 616 8187, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/karsaj/

Jay D. Humphrey, Yale University, School of Engineering and Applied Mechanics, 55 Prospect street, New Haven, CT 06511, tel. +1 (203) 432 6428, e-mail: jay.humphrey@yale.edu, web stranica: seas.yale.edu/faculty-research/faculty-directory/jay-humphrey

Kazalo autora

Alfirević, I.	21	Kozulić, V.	105
Balić, I.	35	Kožar, I.	165, 215, 221
Baškarić, T.	251	Kranjčević, L.	85
Bede, N.	43	Krizmanić, S.	245
Bićanić, N.	1, 55, 129	Krstulović-Opara, L.	61
Brajčić Kurbaša, N.	105	Krvavica, N.	111
Brčić, M.	49	Lanc, D.	117
Brnić, J.	49, 147	Lesičar, T.	123
Čanadija, M.	49, 147	Lustig, N.	129
Čanžar, P.	215	Marenić, E.	135
Čeh, N.	55	Marović, P.	141
Česić, J.	35	Munjas, N.	147
Čiković, K.	79	Nikolić, Ž.	239
Damjanović, D.	153	Novoselac, S.	153, 251
Domazet, Ž.	61	Ožanić, N.	111
Družeta, S.	79	Ožbolt, J.	43, 191
Ergić, T.	153, 251	Papa Dukić, E.	159
Frančeski, J.	61	Penava, D.	165
Gaćeša, M.	67	Pešić, I.	117
Galić, M.	141	Pustaić, D.	171
Gatin, I.	73	Pustaić, M.	171
Gelo, I.	153	Ribarić, D.	179
Gotovac, B.	105	Rukavina, T.	185
Humphrey, J. D.	263	Sigmund, V.	165
Ibrahimbegović, A.	135	Skozrit, I.	61
Ivić, S.	79, 85	Smolčić, Ž.	191
Jagodnik, V.	91	Smoljanović, H.	239
Jalušić, B.	97	Sorić, J.	97, 123, 135
Jarak, T.	97	Staver, I.	85
Jasak, H.	73, 233	Surjak, M.	61
Jelenić, G.	67, 91, 159, 185, 197, 203	Ščulac, P.	197
Jurki, B.	117	Škec, L.	203
Karačić, M.	105	Terze, Z.	209
Karšaj, I.	257, 263	Tonković, Z.	61, 123, 215
Kodvanj, J.	61	Topić, D.	239
Korade, I.	245	Torić Malić, N.	221
Kozak, D.	153, 251	Travaš, V.	111, 227
		Trogrlić, B.	35

Turkalj, G.	117
Vašak, M.	215
Vesenjak, M.	61
Vindiš, V.	257, 263
Virag, L.	263, 257
Virag, Z.	245
Vučetić, M.	7
Vukčević, V.	73, 233
Wilson, J. S.	263
Wolf, H.	171
Zlatar, D.	209
Živaljić, N.	239

Bilješke

