Matematika
Zbirka zadataka

Kristina Devčić
Božidar Ivanković

Veleučilište Nikola Tesla u Gospiću

Uvod

Unaprijed se zahvaljujemo na svakom komentaru o propustima i nedosljednostima, a svaka primjedba glede jednostavnosti primjera i zadataka bit će prihvaćena u sljedećem izdanju.

Vježbe su tijekom dugog niza održavanja nadopunjavane. Zbirku je osmislio Božidar Ivanković, a konačan oblik i pokretanje izdavanja zbirke zasluga je Kristine Devčić.

Rješavanje zadataka iz Zbirke zadataka zahtijeva redovito pohađanje predavanja i vježbi kolegija Matematika. Velik je broj zadataka riješen postupno, a svaki zadatak ima rješenje. Složeniji zadaci imaju i uputu. Skiciranje geometrijskih zadataka ostavljeno je studentima koji ih mogu napraviti prema uputama priloženim slikama.

Korištenje zbirke svodi se na samostalno rješavanje zadataka. Nemojte izbjegavati zadatke koji se čine laganima. Nema lakših i težih zadataka, već se dijele na zadatke koje ste riješili i na one koje još niste riješili.

Stil pisanja nastojali smo prilagoditi studentima pa smo strogost matematičkog formalizma podredili razumljivosti čitatelja i korisnika zbirke. Nepoznati pojmovi dostupni su na internetu. Teže dostupne pojmove autori su definirali.

Trudili smo se napisati zbirku bez greške. Ukoliko vam se čini da je negdje greška napravljena, bit ćemo vam zahvalni ako ćete nam to javiti. Iduće izdanje proširit ćemo s još više zadataka za samostalno rješavanje.

Autori

Sadržaj

1 Determinante

Determinanta je funkcija koja kolekciji od n^2 zadanih brojeva zapisanih u tablicu s n redaka i n stupaca pridružuje broj.

Za $n = 1$ determinanta je jednaka zadanom broju i ne izučava se. Osnovno računanje opisano je za determinante drugog reda kod kojih je $n = 2$. Računanje determinanti trećeg, četvrtog i viših redova definira se dekurzivno.

1.1 Determinante drugog reda

Determinanta drugog reda je funkcija koja kolekciji od četiri broja pridruži jedan broj. Zapis i izračun definiran je formulom

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zadatak 1.1. *Izračunajte vrijednost determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Rješenje. Po definiciji je

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 20 = -8.$$

Riješite samostalno sljedeće zadatke:

1. Izračunajte determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Izračunajte vrijednost determinante $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.

Rješenja. 1. -2; 2. -1.

Determinante se primjenjuju u rješavanju sustava linearnih jednadžbi u kojima je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

Cramerov sustav je onaj sustav u kojem je determinanta sustava $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Takvi sustavi imaju jednoznačno rješenje u obliku

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ i } y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Determinante nepoznanica dobivaju se iz determinante sustava tako da se stupac koeficijenata uz nepoznanicu zamijeni slobodnim koeficijentima:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \text{ i } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}.$$

Primjer 1.1. *Linearni sustav*

$$\begin{aligned} 5x - 6y &= 8 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

rješava se jednostavnim računanjem determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 32,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 68 \ i\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14.$$

Slijedi $x = \dfrac{68}{32} = \dfrac{17}{8}$ *i* $y = \dfrac{7}{16}$.

Riješite Cramerove sustave primjenom determinanti.

1. $\begin{cases} 3x + 8y = 9 \\ 7x + 5y = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x = 0 \\ -x + 5y = 1 \end{cases}$

3. Odredite parametar λ tako da sustav $\begin{cases} 3x + \lambda y = 9 \\ 7x + 5y = 11 \end{cases}$ nije Cramerov.

Rješenja.
1. $x = \frac{43}{41}$; $y = \frac{30}{41}$.
2. $x = 0$; $y = \frac{1}{5}$.
3. Budući nužno treba biti $\Delta = 0$, onda $\lambda = \frac{15}{7}$.

1.2 Determinante trećeg reda

Determinanta trećeg reda računa se pomoću determinanti drugog reda:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Zadaci.

1. Izračunajte vrijednost determinante $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Riješite determinantu $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Odredite x ako je $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Rješenja. 1. -38. 2. -3. 3. Dva su rješenja: $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Sarrusovo pravilo vrijedi jedino za rješavanje determinanti trećeg reda i to tako da se nadopišu prva dva stupca zadane determinante

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & k & g & k \end{array}\right. .$$

Zatim se zbroju umnožaka trojki brojeva smještenih dijagonalno u smjeru sjeverozapad-jugoistok

$$aek + bfg + cdk$$

pribroje brojevi suprotni umnošcima trojki uzetih sa suprotnih dijagonala:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdk - gec - hfa - kdb.$$

Zadatak 1.2. *Provjerite je li sustav Cramerov i napišite rješenje sustava*

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 19 \\ 7x + 3y - 8z &= 31 \\ -x - y - 2z &= 21 \end{aligned}$$

Rješenje.
Treba izračunati najprije

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -150 \neq 0$$

i uvjeriti se da je sustav Cramerov. Potom slijede determinante

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & -5 & 3 \\ 31 & 3 & -8 \\ 21 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -18, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 19 & 3 \\ 7 & 31 & -8 \\ -1 & 21 & -2 \end{vmatrix} = 1164, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 19 \\ 7 & 3 & 31 \\ -1 & -1 & 21 \end{vmatrix} = 1002.$$

Rješenje je $x = 0.12,\ y = -7.76$ i $z = -6.68$.

Zadaci.

1. Izračunajte vrijednost determinanti

$$a)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} \quad e)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Izračunajte determinante

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

3. Riješite jednadžbe

$$a)\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad b)\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad c)\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Riješite jednadžbu $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ x+1 & x & -3 \\ 2 & 1 & -x-2 \end{vmatrix} = 1.$

5. Koliko ima parova prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = 720$?

6. Izračunajte Δ_1, Δ_2 i Δ_3 ako je

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \quad i \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

7. Odredite nepoznanicu x za koju vrijedi

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

8. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= 14 \\ 4x + 5y - 6z &= 7 \\ -7x + 8y - z &= 10 \end{aligned}$$

Rješenja.
1. a) 26; b) -38; c) 23; d) $2a$; e) 3.
2. a) -10; b) 144; c) 72.
3. a) $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$; b) $x_1 = 0, \quad x_2 = -2$; c) $x = 2/3$.
4. $x_1 = 1 + i, x_2 = 1 - i$.
5. Postoje 22 uređena para.
6. $\Delta_1 = 40, \quad \Delta_2 = -68, \quad \Delta_3 = 20$, 7. $x = 5$.
8. $x = 11,\ y = 13,\ z = 17$.

1.3 Determinante četvrtog reda

Determinante četvrtog reda rješavaju se isključivo razvojem po odabranom retku ili stupcu. U [1] su detaljno dokazana svojstva determinanti

- ako se jedan redak ili stupac u determinanti pomnoži ili podijeli brojem λ, tada se vrijednost determinante poveća ili smanji λ puta
- vrijednost determinante se ne mijenja ako se jedan redak pomnožen nekim brojem doda drugom retku ili oduzme od njega
- vrijednost determinante se ne mijenja ako se jedan od stupaca pomnožen nekim brojem doda drugom stupcu ili oduzme od njega

Navedena svojstva mogu pojednostaviti ručno računanje većih determinanti.

Zadatak 1.3. *Odredite vrijednost determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Rješavanje zadatka može se pojednostaviti izlučivanjem faktora -3 iz prvog retka:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ako se prvi redak pomnoži brojem 5 i doda drugom retku, vrijednost determinante neće se promijeniti, no determinanta će dobiti prvi član jednak nuli:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Cilj je u čitavom prvom stupcu imati nule, pa se prvi redak najprije pomnoži sa -4 i doda trećem retku, a onda se opet prvi redak pomnoži sa -7 i doda četvrtom. Tako se dobiva se determinanta

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

pogodna za razvoj po prvom stupcu, jer se dobiva samo jedan pribrojnik u razvoju:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Mudro je drugi redak pomnožen s 3 dodati prvom i oduzeti od trećeg retka

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 0 & 15 \\ 7 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -9 \end{vmatrix},$$

a zatim novo dobivenu determinantu razviti po drugom retku:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 15 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-126 + 120) = 18.$$

1.4 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Izračunajte:
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Odredite:
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

3. Riješite:
$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Koliko ima prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi:
$$\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = 720$$

5. Dokažite
$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

6. Izračunajte Δ_1, Δ_2 i Δ_3:
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

7. Odredite nepoznanicu x za koju vrijedi
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

8. Riješite jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} \log_{2x}\frac{1}{2} & \log_x 2 \\ 1 & log_{\frac{x}{4}}4 \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenja:

1. -9
2. 18
3. 3
4. 18 uređenih parova
5. samostalno se uvjerite
6. $\Delta_1 = 40, \quad \Delta_2 = -68; \quad \Delta_3 = 20$
7. $x = 5$
8. $x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4}$

2 Vektori u ravnini i prostoru

2.1 Analitički pojam vektora

Skalar je svaka veličina koja se može izraziti samo jednim podatkom. Vrijednost skalara uvijek je realan broj. Primjeri skalarnih veličina su obujam, masa, temperatura, dob i slično.
Vektorske veličine nije moguće odrediti samo jednim brojem, nego je potrebno više brojeva i to u točno zadanom poretku. Vektor ima n dimenzija ako ze zapisuje uređenom n-torkom skalara $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Kaže se da je tada n-dimenzionalan vektor definiran pomoću n skalara koje nazivamo **komponentama vektora**. Vektor u čijem su zapisu svi skalari nule nazivamo **nul-vektorom**.

Primjer 2.1. *Vektor $\vec{a} = (1, 2, 3)$ nije jednak vektoru $\vec{b} = (3, 2, 1)$.*

Zbrajati i oduzimati se mogu vektori istih dimenzija. Vektori se zbrajaju i oduzimaju tako da se zbrajaju i oduzimaju komponente na odgovarajućim pozicijama.

Vektor se množi skalarom tako da se svaka komponenta vektora pomnoži tim skalarom.

Primjer 2.2. *Zbroj dva 4-dimenzionalna vektora $\vec{a} = (1, 3, 4, 5)$ i $\vec{b} = (3, 5, 1, 8)$ je vektor*

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 8, 5, 13).$$

Umnožak vektora $\vec{a}$ i skalara $\alpha = 7$ je vektor

$$\alpha\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} = (7, 21, 28, 35).$$

Neka su $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ vektori i neka su $\alpha_1, ..., \alpha_n$ realni brojevi. Vektor

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + ... + \alpha_n \vec{a}_n$$

naziva se **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ s koeficijentima $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Zadatak 2.1. *Izračunajte linearnu kombinaciju* $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g} + \gamma\vec{n}$ *ako su zadani vektori* $\vec{f} = (10, 20, -80, 30), \vec{g} = (5, 95, 105, 35)$ *i* $\vec{n} = (-20, -10, 5, -45)$, *dok su skalari redom* $\alpha = 3, \beta = 2$ *i* $\gamma = 6$.

Rješenje. $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g} + \gamma\vec{n} = (-80, -190, 0, -120)$.

Linearno nezavisni vektori su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$ ako ih poništava jedino trivijalna linearna kombinacija. To znači da iz uvjeta $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0$ slijedi da je nužno $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Primjer 2.3. *Vektori* $\vec{a} = (2, 3, -4), \vec{b} = (-1, 1, 9)$ *i* $\vec{c} = (3, -3, -8)$ *su linearno nezavisni.*

Dokaz. Kada bi se tražili skalari α, β i γ takvi da je

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0,$$

trebalo bi vrijediti

$$\alpha(2, 3, -4) + \beta(-1, 1, 9) + \gamma(3, -3, 9) = (0, 0, 0),$$

odnosno, nakon izračuna linearne kombinacije trebalo bi biti ekvivalentno

$$(2\alpha - \beta + 3\gamma, 3\alpha + \beta - 3\gamma, -4\alpha + 9\beta + 9\gamma) = (0, 0, 0).$$

Budući su vektori ekvivalentni samo ako su im odgovarajuće komponente jednake, dobiva se linearni sustav po nepoznanicama α, β i γ

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma &= 0 \\ -4\alpha + 9\beta + 9\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Zbog $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 180 \neq 0$ i zbog $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = \Delta_\gamma = 0$, sustav je Cramerov i po prethodnom poglavlju, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dakle, vektori su linearno nezavisni. □

Baza vektorskog prostora V je najveci broj linearno nezavisnih vektora tog prostora. Baza dvodimenzionalnog vektorskog prostora V_2 sastoji se od dva vektora, V_3 od tri vektora.

- Dvodimenzionalni bazični vektori su $\vec{i} = (1, 0)$ i $\vec{j} = (0, 1)$.
- Trodimenzionalni bazični vektori su $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

- Četverodimenzionalni bazični vektori su
  $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0)$ i $e_4 = (0,0,0,1)$.

Teorem 2.1. *Svaki se vektor može* ***jednoznačno prikazati*** *kao linearna kombinacija bazičnih vektora.*

Zadatak 2.2. *Prikažite vektore iz Zadatka 2.1 i Primjera 2.3 kao linearne kombinacije bazičih vektora.*

Rješenje. $\vec{f} = 10\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 - 80\vec{e}_3 + 30\vec{e}_4,\ \vec{g} = 5\vec{e}_1 + 95\vec{e}_2 + 105\vec{e}_3 + 35\vec{e}_4,\ \vec{n} = -20\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 45\vec{e}_4,\ \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$.

Teorem 2.2. *Neka je zadan n-dimenzionalan vektor. Tada se on može jednoznačno prikazati kao linearna kombinacija nekih drugih n linearno nezavisnih vektora.*

Zadatak 2.3. *Vektor* $\vec{a} = (5, 10, 15)$ *napišite kao linearnu kombinaciju vektora iz Primjera 2.3.*

Rješenje. Potrebno je odrediti skalare α, β i γ takve da vrijedi

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{a}.$$

Analogno dokazu Primjera 2.3 dobiva se sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + 3\gamma &= 5 \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma &= 10 \\ -4\alpha + 9\beta + 9\gamma &= 15. \end{aligned}$$

Sustav je Cramerov pa iz $\Delta = 180, \Delta_\alpha = 540, \Delta_\beta = 450$ i $\Delta_\gamma = 60$ slijedi
$\vec{a} = 3\vec{a} + 2.5\vec{b} + 0.33\vec{c}$.

Skalarno množenje ili skalarni produkt je računska operacija koja paru vektora istih dimenzija pridruži jedan broj - skalar.

Skalarni produkt vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i vektora $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jednak je zbroju umnožaka odgovarajućih komponenata

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Primjer 2.4. *Ako je* $\vec{a} = (3, -2, 1, 0, 6)$ *i* $\vec{b} = (-4, -9, 10, 2, -3)$, *onda je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 18 + 10 - 18 = -2.$$

Skalarni kvadrat vektora ne može biti negativan. Ako je $\vec{a} = (3, -4, -7, 4)$, onda je

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 9 + 16 + 49 + 16 = 90.$$

Drugi korijen iz skalarnog kvadrata je uvijek moguće izračunati.

Modul ili duljina vektora je drugi korijen iz skalarnog kvadrata:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{90} = 9.49.$$

Skalarni produkt može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli i u slučaju kad komponente vektora nisu jednake nuli.

Primjer 2.5. *Neka je* $\vec{f} = (3, -2, 1)$ *i neka je* $\vec{g} = (4, 5, -2)$*. Tada je*

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = 12 - 10 - 2 = 0,$$

iako niti jedan vektor nije nul-vektor.

Općenito vrijedi nejednakost po kojoj modul skalarnog produkta dvaju vektora ne može biti veći od umnoška modula tih dvaju vektora:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|. \tag{1}$$

Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se definira za par vektora bilo koje dimenzije preko kosinusa toga kuta:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Zadatak 2.4. *Za vektore iz Primjera 2.4 se uvjerite u nejednakost (1).*

Rješenje. Nakon računanja $|\vec{a}| = \sqrt{50} = 7.07$, $|\vec{b}| = \sqrt{210} = 14.49$ pa je očita nejednakost. Kut slijedi iz

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-2}{\sqrt{10500}} = 0.01952 \\ \varphi &= \cos^{-1} 0.01952 = 91^o. \end{aligned}$$

Vektori s negativnim skalarnim produktom uvijek zatvaraju tupe kuteve.

Zadatak 2.5. *Izračunajte kut između vektora u Primjeru 2.1.*

Rješenje. Kut je pravi. Za vektore koji u skalarnom produktu daju nulu kaže se da su okomiti.

Vektorske forme su skalari koji se računaju za n vektora koji su svaki dimenzije n. Forme se dijele prema dimenziji vektora:

- **1-forma** je definirana samo za skalar i jednaka je tom skalaru te se ne promatra.

- **2-forma** za par dvodimenzionalnih vektora $\vec{a} = (a_1, a_2)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2)$:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

- **3-forma** za trojku trodimenzionalnih vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Primjer 2.6. *Za četiri 4-dimenzionalna vektora* $\vec{f} = (0, 7, -4, 9)$, $\vec{g} = (1, 8, -4, -7)$, $\vec{h} = (2, -3, 4, 8)$ *i* $\vec{k} = (-9, 3, -1, -9)$ *pripadna 4-forma računa se determinantom četvrtog reda:*

$$\vec{f} \wedge \vec{g} \wedge \vec{h} \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -4 & 9 \\ 1 & 8 & -4 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ -9 & 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 & -7 \\ -3 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 2 & 4 & 8 \\ -9 & -1 & -9 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 2 & -3 & 8 \\ -9 & 3 & -9 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -9 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 7 \cdot (-50) - 4 \cdot (-282) - 9 \cdot (-107) = 3251$$

Propozicija 2.1. *Vektori su linearno zavisni ako računanje pripadne forme daje nulu.*

Zadaci.

1. Izračunajte 4-formu $\vec{g} \wedge \vec{f} \wedge \vec{h} \wedge \vec{k}$ i $\vec{k} \wedge \vec{f} \wedge \vec{g} \wedge \vec{h}$ za vektore iz Primjera 2.6 pa generalizirajte.

2. Za vektore $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (7, 4, 3)$ i $\vec{c} = (0, 1, 3)$ izračunajte $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ i $\vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a}$ pa generalizirajte.

3. Izračunajte $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$, $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{d}$ i $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (\vec{c} + \vec{d})$ ako su $\vec{a} = (0, -3, -2), \vec{b} = (-3, 7, -1), \vec{c} = (4, -8, -2)$ i $\vec{d} = (4, 1, 8)$. Generalizirajte.

4. Odredite vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i vektor $3\vec{a} \times (-2\vec{b})$ ako su $\vec{a} = (4, -8, 6)$ i $\vec{b} = (-2, -2, 1)$.

5. Izračunajte $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ za $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 4)$ i ako je

   (a) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

   (b) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

   (c) $\vec{c} = 2\vec{a} \times 3\vec{b}$

6. Napišite vektor $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

7. Zapišite vektor $\vec{d} = (2, 3, 8)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (-1, 8, -4)$, $\vec{b} = (7, -3, 0)$ i $\vec{c} = (0, 8, -5)$.

8. Provjerite jesu li vektori $\vec{a} = (7, -5, 7)$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}$ linearno zavisni pa izrazite $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Koristite iskaz Propozicije 2.1.

9. Odredite kut između vektora:

   (a) $\vec{f} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{f_1} = \vec{i} - 3\vec{j}$

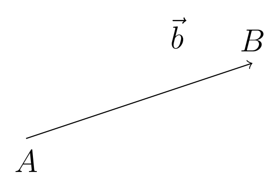
   (b) $\vec{a} = (4, -1, 6)$ i $\vec{b} = (-9, 8, 4)$

   (c) $\vec{s} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 + \vec{e}_4$ i $\vec{f} = (7, -4, 0, -1)$. Vektori $\vec{e}_i$, za $i = 1, 2, 3, 4$ su bazični 4-dimenzionalni vektori.

Rješenja.
1. -3251 i 3251. Kod zamjene dva vektora u formi, forma mijenja predznak. Cikličkom zamjenom forma ostaje ista.
2. $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = -12$, a $\vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = 12$. Radi se o zamjeni vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ koja mijenja predznak.
3. 38+2=40. Ovo je distributivnost.
4. $\vec{a} \times \vec{b} = (4, -16, -24)$, $3\vec{a} \times (-2\vec{b}) = (-24, 96, 144)$.
5. (a) 0; (b) $\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ pa je $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 75$; (c) 450.
6. $\vec{c} = -\frac{7}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.
7. $\vec{d} = -\frac{42}{41}\vec{a} - \frac{139}{41}\vec{b} - \frac{288}{41}\vec{c}$
8. Linearna zavisnost je zbog $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0$ i Propozicije 2.1. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
9. (a) 117^o, (b) 109^o, (c) 71^o.

2.2 Geometrijski pojam vektora

Primjer 2.7. *Nacrtanu orijentiranu dužinu $\vec{b}$ moguće je opisati ako znamo dva broja: duljinu i kut prema horizontalno - desnom smjeru. Vektor je moguće opisati i mjerenjem odmaka desno i odmaka prema gore.*



Slika 1: Orijentirana dužina je reprezentant vektora.

Zadatak 2.6. *Zadana su dva vektora $\vec{a} = (3, 2)$ i $\vec{b} = (1, 4)$. Odredite:*

1. zbroj vektora $\vec{a}+\vec{b}$*,*

2. razliku vektora $\vec{a}-\vec{b}$*,*

3. dvostruki vektor $2\vec{a}$*, trostruki* $3\vec{b}$*,*

4. linearnu kombinaciju $2\vec{a}-3\vec{b}$*.*

Rješenja. 1. (4,6); 2. (2,-2); 3. (6,4) i (3,12); 4. (3,-8).

Zadatak 2.7. *Zadan je vektor* $\vec{d}=(12,-10)$*. Odredite, a zatim i nacrtajte vektore*

a) $2\vec{d}$*,*

b) $-\vec{d}$*.*

Zadatak 2.8. *Neka su* $\vec{a}=(2,3)$ *i* $\vec{b}=(3,1)$*. Odredite, a zatim i nacrtajte vektor* $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=(2,3)$*.*

Rješenje. $\vec{c}=(-5,3)$.

Zadatak 2.9. *U koordinatnom sustavu* $X0Y$ *prikažite vektore* $\vec{i}=(1,0)$ *i* $\vec{j}=(0,1)$*.*

Primjer 2.8. *Izrazite uređene parove* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *i* $\vec{a}+\vec{b}$ *iz zadatka 2.6 kao linearne kombinacije vektora* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$*. Nacrtajte navedene vektore.*

Rješenje. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{a}+\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}$.

Definicija 2.1. *Vektor kojeg predstavlja orijentirana dužina s početkom u ishodištu* O*, a završetkom u točki* A *naziva se radijus-vektor točke* A *i može se poistovjetiti s točkom* A*:*

$$\vec{r}_A=\overrightarrow{OA}.$$

Zadatak 2.10. *Izrazite:*

1. Radijus - vektor $\vec{r}_A=\overrightarrow{0A}$ *gdje je točka* $A(4,5)$*.*

2. Vektor $\overrightarrow{AB}$*, gdje je točka* $A=(2,1)$*, a točka* $B=(3,6)$*.*

Rješenja.
1. Po definiciji $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_A=4\vec{i}+5\vec{j}$.
2. Zaključivanje:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{AB} &= 3\vec{i}+6\vec{j}-(2\vec{i}+\vec{j})=\vec{i}+5\vec{j}.\end{aligned}$$

Duljina vektora zapisanog u pravokutnim koordinatama kao

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$$

računa se po Pitagorinom poučku:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Zadatak 2.11. *Za zadane vektore* $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ *i* $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ *izračunajte:*

a) $|\vec{a}|$;

b) $|\vec{b}|$;

c) $|\vec{a} + \vec{b}|$;

d) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Rješenje. a) $|\vec{a}|$=5, b) $|\vec{b}|$=13, c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{17}$, d) $|\vec{a} - \vec{b}| = 8\sqrt{5}$.

Zadaci.

1. Zadan je trokut s vrhovima $A = (-2, 2)$, $B = (2, 1)$ i $C = (5, 3)$. Neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Odredite vektore:
   a) $|\vec{a}|^2\vec{c} + |\vec{c}|^2\vec{a}$, b) $|\vec{c}|^2\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{c}$.

2. Zadana je točka $A = (2, -3)$. Odredite ordinatu y točke $B = (3, y)$ tako da je $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$.

3. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \lambda\vec{j}$ i $\vec{b} = \lambda\vec{i} + 5\vec{j}$. Odredite realan broj λ tako da bude $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{97}$.

Rješenja.
1. a) $103\vec{i} + 21\vec{j}$, b) $-\vec{i} + 47\vec{j}$.
2. $B_1 = (3, -1)$, $B_2 = (3, -5)$.
3. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{7}{5}$.

Zadatak 2.12. *Nacrtajte točku* $A(4, 3)$ *u koordinatnom sustavu. Nacrtajte vektor* $\vec{r}_A$*. Zapišite* $\vec{r}_A$ *kao linearnu kombinaciju koordinatnih vektora i primjenom Pitagorina poučka izračunajte duljinu vektora* $|\vec{r}_A|$*.*

Rješenje. Linearna kombinacija $\vec{r}_A = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, a duljina $|\vec{r}_A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

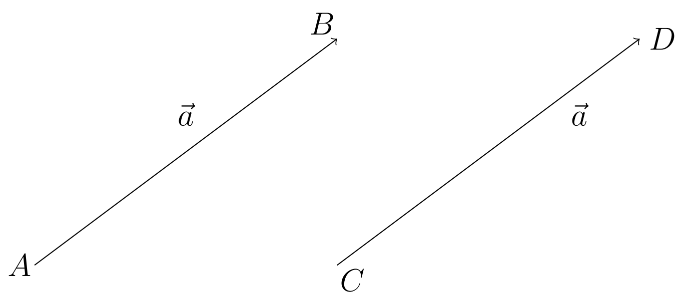
Vektor je određen duljinom ili modulom vektora, smjerom odnosno pravcem na kojem se nalazi i orijentacijom odnosno okrenutosti na tom pravcu.

Zadatak 2.13. *Nacrtajte točke* $A = (3, 2)$ *i* $B = (6, -2)$*. Nacrtajte vektor* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i prikažite ga kao linearnu kombinaciju osnovnih vektora* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$*. Nacrtajte smjer vektora i izračunajte modul* $|\vec{a}|$*. Nacrtajte vektor suprotan vektoru* $|\vec{a}|$ *i napišite ga kao linearnu kombinaciju vektora baze* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$*.*

Rješenje. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\vec{a}| = 5$, $-\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

Vektori su jednaki ako i samo ako imaju jednaku duljinu, smjer i orijentaciju.

Budući su jednaki vektori paralelni, iste duljine i iste orijentacije, karakterizira ih zajedničko polovište spojnica završetka jednog i početka drugog vektora. Na slici je to zajedničko polovište dužine $\overline{AD}$ i dužine $\overline{BC}$. Uobičajeno je reći da se vektor ne mijenja paralelnim pomakom.



Slika 2: Jednaki vektori

Zadatak 2.14. *Neka su* $A = (2, 5)$*,* $B = (4, 0)$ *i* $C = (-1, 3)$ *vrhovi paralelograma u poretku* $ABCD$*. Odredite koordinate četvrtog vrha* D*.*

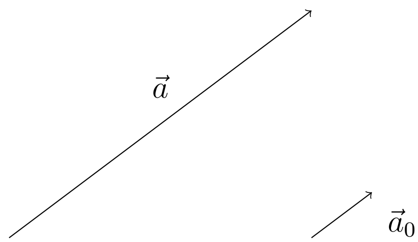
Rješenje. Vektori $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (2, -5)$. Budući je $\overrightarrow{DC} = (2, -5)$, slijedi da je $D = (-3, 8)$.

Kolinearni vektori imaju isti smjer, no ne nužno i istu orijentaciju. Kolinearni vektori rezultat su množenja vektora skalarom.

Zadatak 2.15. *Nacrtajte u koordinatnoj ravnini vektor* $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$*. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu vektore* $-\vec{a}$*,* $2\vec{a}$ *i* $-3\vec{a}$*.*

Jedinični vektor zadanog vektora $\vec{a}$ je vektor kojem je duljina jednaka 1, a smjer i orijentacija su isti vektoru $\vec{a}$. Jedinični vektor $\vec{a}_0$ u smjeru vektora $\vec{a}$ dobiva se množenjem vektora $\vec{a}$ skalarom $\frac{1}{|\vec{a}|}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$



Slika 3: Jedinični vektor

Primjer 2.9. *Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$ iz zadatka 2.15 je vektor*

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}(2\vec{i} - 4\vec{j}) = 0.447\vec{i} - 0.894\vec{j}.$$

Nul-vektor je vektor kojem je modul jednak nuli. Reprezentanti nul-vektora su točke

$$\overrightarrow{AA}, \quad \overrightarrow{TT} \ldots$$

Zadatak 2.16. *Vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ rastavite u smjerovima vektora $\vec{a} = 2\vec{i}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.*

Rješenje. Traže se skalari $\lambda, \nu \in R$ koji zadovoljavaju jednakost:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda \cdot \vec{a} + \nu \cdot \vec{b} \\ 2\vec{i} + 6\vec{j} &= 2\lambda\vec{i} + \nu(3\vec{i} + 3\vec{j}) \\ 2\vec{i} + 6\vec{j} &= (2\lambda + 3\nu)\vec{i} + 3\nu\vec{j}. \end{aligned}$$

Radi linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ dobiva se izjednačavanjem koeficijanata iz komponenti sustav

$$\begin{aligned} 2\lambda + 3\nu &= 2 \\ 3\nu &= 6 \\ \nu &= 2 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

čija rješenja daju traženu linearnu kombinaciju $\vec{c} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$.

Zadaci.

1. Za zadane točke $A = (-3, 3)$, $B = (4, -1)$, $C = (-1, 0)$ odredite koordinate vektora:
   (a) $\overrightarrow{AB}$;
   (b) $\overrightarrow{BA}$;
   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$;
   (d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

(e) $\frac{\overrightarrow{BC}}{2} - \overrightarrow{AC}$;

(f) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$;

(g) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$.

2. Zadan je četverokut s vrhovima $A = (-3, -1)$, $B = (3, -3)$, $C = (5, 1)$ i $D = (-1, 3)$. Dokažite da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, dakle da je taj četverokut paralelogram.

3. Točke $A = (-1, -4)$, $B = (6, 1)$ i $C = (4, 1)$ tri su uzastopna vrha paralelograma. Koristeći koordinatizaciju vektora u ravnini odredite koordinate četvrtog vrha D tog parelelograma.

4. Točke $A = (2, 1)$ i $B = (5, 7)$ dva su susjedna vrha paralelograma $ABCD$. Točka $S = (3, 4)$ sjecište je njegovih dijagonala. Odredite koordinate vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ pa pomoću njih koordinate vrhova C i D tog paralelograma.

5. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Izračunajte sljedeće linearne kombinacije:

   (a) $\vec{a} + \vec{b}$;

   (b) $\vec{a} - \vec{b}$;

   (c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

   (d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

   (e) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$;

   (f) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{c}$.

6. Zadani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$. Prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u obliku $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in R$.

7. Zadane su točke $A = (-1, -1)$, $B = (0, 2)$, $C = (1, 6)$ i $D = (5, 3)$. Prikažite vektor $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Rješenja.
1. a) $7\vec{i} - 4\vec{j}$; b) $-7\vec{i} + 4\vec{j}$; c) $\vec{0}$; d) $2\vec{i} - 3\vec{j}$; e) $-\frac{9}{2}\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j}$; f) $19\vec{i} - 9\vec{j}$; g) $21\vec{i} + \vec{j}$.
2. Vektori su jednaki ako su im jednaki koordinatni zapisi.
3. $D = (-3, -4)$.
4. $\overrightarrow{AS} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Ako je $C = (x, y)$, onda je $\overrightarrow{AC} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$, pa je $C = (4, 7)$. Analogno se dobije $D = (1, 1)$.
5. a) $-2\vec{i} + \vec{j}$; b) $4\vec{i} + 3\vec{j}$; c) $\vec{i} + 6\vec{j}$; d) $-5\vec{i} - 4\vec{j}$; e) $-4\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$; f) $-\frac{21}{10}\vec{i} - \frac{7}{3}\vec{j}$.
6. Iz $7\vec{i} - 5\vec{j} = \alpha(-2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} - \vec{j}) = (-2\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha - \beta)\vec{j}$ izlazi sustav: $-2\alpha + \beta = 7$, $\alpha - \beta = -5$, dakle $\alpha = -2$, $\beta = 3$, pa je $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.
7. $\overrightarrow{AD} = 34\overrightarrow{AB} - 14\overrightarrow{AC}$.

2.3 Trodimenzionalni vektori

Trodimenzionalni vektori su vektori koji imaju tri komponente. Primjerice, vektor $\vec{a} = (3, 2, 2)$ je trodimenzionalni vektor.

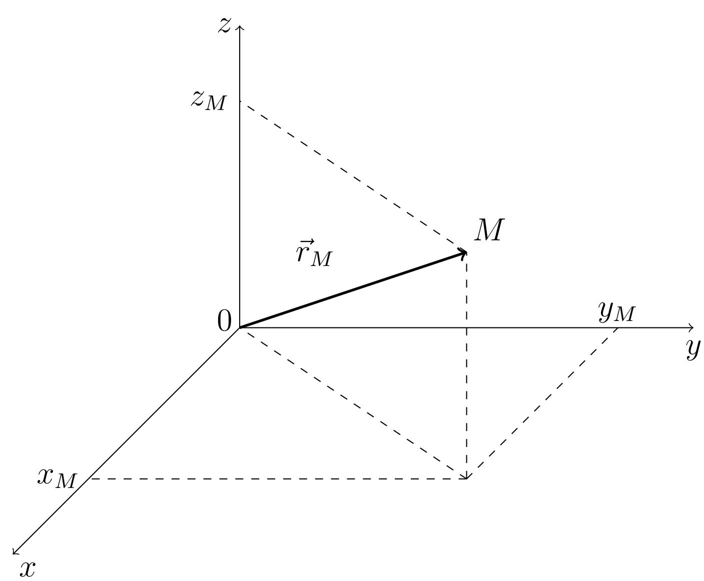
Zadatak 2.17. *Zadani su vektori* $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 12, 2)$, $\vec{c} = (-1, 2, -4)$ *i* $\vec{d} = (0, 2, 1)$. *Odredite* $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{d}$, $2\vec{c}$, $-\vec{d}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$. *Odredite brojeve* α, γ *i* δ *tako da vrijedi* $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$.

Napomena 2.1. *Svaki se trodimenzionalni vektor može napisati kao linearna kombinacija vektora*

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ *i* $\vec{k}$ *nazivaju se osnovnim ili baričnim vektorima, ortovima ili ortonormiranom bazom.*

Zadatak 2.18. *Vektore iz zadatka 2.12. napišite kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{i}, \vec{j}$ *i* $\vec{k}$.



Slika 4: Točka u trodimenzionalnom prostoru

Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav u prostoru $Oxyz$ zadan je s istaknutom točkom nazvanom ishodištem O i s tri okomita brojevna pravca: x-osi ili osi apscisa, y-osi ili osi ordinata i z-osi ili osi aplikata.

Svakoj točki M jednoznačno je pridružena uređena trojka

$$M = (x_M, y_M, z_M).$$

Radijus - vektor točke $M = (x_M, y_M, z_M)$ u oznaci $\vec{r}_M$ ima komponente

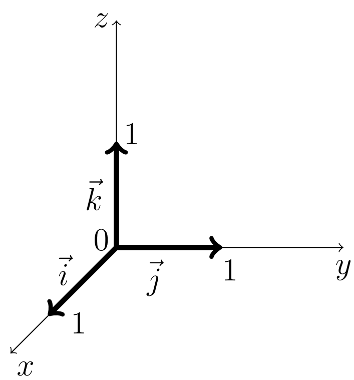
$$\vec{r}_M = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}.$$

Zadatak 2.19. *Odredite komponente radijus - vektora ako je točka* $M = (2, -3, 5)$.

Koordinatni vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ geometrijski su jedinični vektori usmjereni prema pozitivnim smjerovima koordinatnih osi.

Duljina ili modul vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ računa se po formuli

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Slika 5: Koordinatni vektori

Zadatak 2.20. *Odredite udaljenost točke M iz zadatka 2.19 do ishodišta računajući duljinu njenog radijus - vektora.*

Jedinični vektor vektora $\vec{a}$ u oznaci $\vec{a}_0$ dobiva se množenjem vektora $\vec{a}$ skalarom $\frac{1}{|\vec{a}|}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Zadatak 2.21. *Odredite jedinični vektor iz ishodišta u smjeru točke M iz zadatka 2.19*

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom ili **hvatištem** u točki $A = (x_A, y_A, z_A)$ i završetkom ili ciljem u točki $B = (x_B, y_B, z_B)$ po komponentama ima zapis:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

Nadalje vrijedi:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

Zadatak 2.22. *Vrhovi trokuta su točke $A(3,-2,0)$, $B(-3,-2,1)$ i $C(2,-1,9)$. Odredite vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Izračunajte redom module tih vektora i opseg trokuta.*

Zadatak 2.23. *Odredite komponente vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ako je $A(1,3,2)$ i $B(5,8,-1)$.*

Zadatak 2.24. *Izračunajte duljinu vektora $\vec{a}=20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$.*

Zadatak 2.25. *Točke $A(2,2,0)$ i $B(0,-2,5)$ zadane su svojim pravokutnim koordinatama. Raspišite vektor $\overrightarrow{AB}$ po komponentama u smjeru vektora baze i odredite duljinu vektora.*

Zadatak 2.26. *Zadana su tri uzastopna vrha paralelograma $ABCD$:*
$A=(1,-2,3), B=(3,2,1)$ i $C=(6,4,4)$. Odredite četvrti vrh i opseg paralelograma.

Rješenje.
Zadatak 2.13: $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}+14\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}-\vec{d}=-\vec{i}-5\vec{k}$, $2\vec{c}=-2\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}$, $-\vec{d}=-2\vec{j}-\vec{k}$, $2\vec{a}-3\vec{b}=-\vec{i}-32\vec{j}$. Traženi brojevi dobivaju se iz sustava koji nastaje izjednačavanjem komponenti

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha-\gamma \\ 12 &= 2\alpha+2\gamma+2\delta \\ 2 &= 3\alpha-4\gamma+\delta. \end{aligned}$$

i redom iznose $\alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=1$
Zadatak 2.14: $\vec{r}_M=\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}=(2,-3,5)$.
Zadatak 2.15: Udaljenost M do ishodišta jednaka je duljini radijus - vektora

$$|\vec{r}_M|=|(2,-3,5)|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}=6.1644\sim 6.2.$$

Zadatak 2.16: $\vec{r}_{M_0}=\dfrac{1}{6.2}(2,-3,5)=(0.32,-0.48,0.81)=0.32\vec{i}-0.48\vec{j}+0.81\vec{k}$.
Zadatak 2.17:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B-A=-6\vec{i}+\vec{k} \\ \overrightarrow{BC} &= C-B=5\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k} \\ \overrightarrow{AC} &= C-A=-\vec{i}+\vec{j}+9\vec{k}. \end{aligned}$$

Moduli su redom $|\overrightarrow{AB}|=6.1$, $|\overrightarrow{BC}|=9.5$ i $|\overrightarrow{AC}|=9.1$. Opseg trokuta jednak je 24.7.
Zadatak 2.18: Iz definicije radijus - vektora i definicije zbrajanja vektora:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_B-\vec{r}_A \\ &= 4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k} \end{aligned}$$

Zadatak 2.19: Neposrednim uvrštavanjem u formulu dobije se

$$|\vec{a}|=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=70.$$

Zadatak 2.20: Neposrednim uvrštavanjem dobije se vektor

$$\overrightarrow{AB} = (0-2)\vec{i} + (-2-2)\vec{j} + (5-0)\vec{k} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k},$$

a duljina vektora je

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{4+16+25} = 6.71.$$

Zadatak 2.21: Iz definicije paralelograma

$$\overrightarrow{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = \overrightarrow{BC}.$$

slijedi

$$\begin{aligned} D = \vec{r}_D &= \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ D = \vec{r}_D &= 4\vec{i} + 6\vec{k} \\ D &= (4, 0, 6). \end{aligned}$$

Opseg je zbroj duljina svih stranica odnosno

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| + 2 \cdot |\overrightarrow{BC} \\ O &= 2|2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}| + 2|3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| \\ O &= 2\sqrt{4+16+4} + 2\sqrt{9+4+9} \\ O &= 4\sqrt{6} + 2\sqrt{22} = 19.18 \end{aligned}$$

jediničnih duljina.

Zadaci.

1. Izrazite u bazi V^3 vektor $\overrightarrow{AB}$, gdje je $A = (2,1,0)$ i $B = (-2,3,3)$. Izračunajte duljinu vektora.

2. Zadan je vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ svojim komponentama $a_x = 2, a_y = 4, a_z = -1$ i hvatištem u $A = (0,4,2)$. Odredite kraj B vektora $\overrightarrow{AB}$.

3. Zadani su radijus - vektori vrhova trokuta ABC: $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r}_B = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{r}_C = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Dokažite da je trokut jednakostraničan.

4. Odredite projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne osi, ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, a zadane su točke $A(0,0,1), B(3,2,11), C(4,6,5)$ i $D(1,6,3)$.

5. Izračunajte modul vektora

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{5}(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}).$$

6. Zadane su točke $M_1(1,2,3)$ i $M_2(3,-4,6)$. Odredite duljinu vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ i jedinični vektor u smjeru $\overrightarrow{M_1M_2}$.

7. Zadan je vektor $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Odredite vektor $\vec{b}$, ako je $|\vec{b}|$=$|\vec{a}|$, $b_y = a_y$ i $b_x = 0$.

Rješenja.
1. $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$.
2. $B = (2, 8, 1)$.
3. $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 2\vec{i} - 2\vec{k}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$.
4. $a_x = 0, a_y = 2, a_z = 8$.
5. $|\vec{a}| = 3/5$.
6. $|\overrightarrow{M_1M_2}| = 7; (\overrightarrow{M_1, M_2})_0 = 2/7\vec{i} - 6/7\vec{j} + 3/7\vec{k}$.
7. Dva su rješenja: $\vec{b} = -2\vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{b} = -2\vec{j} - 5\vec{k}$.

2.4 Skalarni produkt

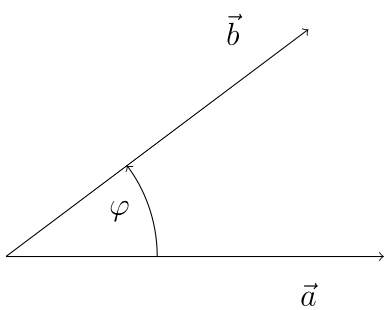
Neka je $|\vec{a}|$ duljina vektora $\vec{a}$. Skalarni produkt definira se formulom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{2}$$

gdje je φ kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Svojstva skalarnog produkta su:

- komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- distributivnost: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- kvaziasocijativnost: $\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \alpha\beta\vec{a} \cdot \vec{b}$
- (skalarno) kvadriranje vektora: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- poništavanje: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ako su vektori okomiti ili ako je jedan od njih $\vec{0}$ nul-vektor.

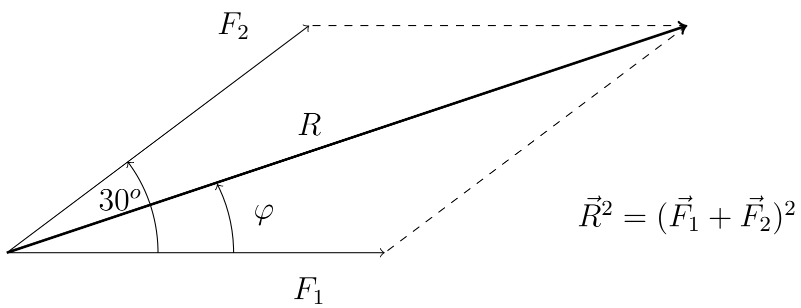
Geometrijska definicija skalarnog produkta:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Slika 6: Skalarni produkt

Primjer 2.10. *Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ od $300N$ i $500N$ djeluju na neko tijelo pod kutom od 30^o. Izračunajte intenzitet rezultantne sile i kut pod kojim djeluje rezultantna sila prema sili $\vec{F}_1$.*



Slika 7: Superpozicija ili zbrajanje sila

Rješenje. Rezultantna sila je dobivena pravilom paralelograma i jednaka je vektorskom zbroju zadanih sila: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Budući su vektori na slici nacrtani, izostavljene su strelice. Iznos rezultantne sile $|\vec{R}|$ računa se korištenjem distributivnosti:

$$|\vec{R}|^2 = \vec{R}^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \vec{F}_2^2. \tag{3}$$

Skalarni produkt je $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ potrebno računati po (2):

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 300 \cdot 500 \cdot \cos 30^o = 129903.81$$

Skalarno kvadriranje izvodi se po definiciji:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^2 &= |\vec{F}_1|^2 = 90000 \\ \vec{F}_2^2 &= |\vec{F}_2|^2 = 250000 \end{aligned}$$

Sada iz (3) slijedi

$$|\vec{R}|^2 = 90000 + 250000 + 2 \cdot 129903.81 = 599807.62$$

dok je traženi iznos rezultante

$$|\vec{R}| = \sqrt{599807.62} = 774.47N = 774N.$$

Zaokruživanje se vrši na cjelobrojni iznos zbog prirode ulaznih podataka.
Kut φ između rezultante i vektora računa se po formuli

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\vec{F}_1}{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|} = \frac{\vec{F}_1^2 + \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1}{774 \cdot 300} = \frac{90000 + 129903.81}{232200} = 0.94704$$

Traženi kut $\varphi = 18.7^o = 19^o$.

Skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$ je broj

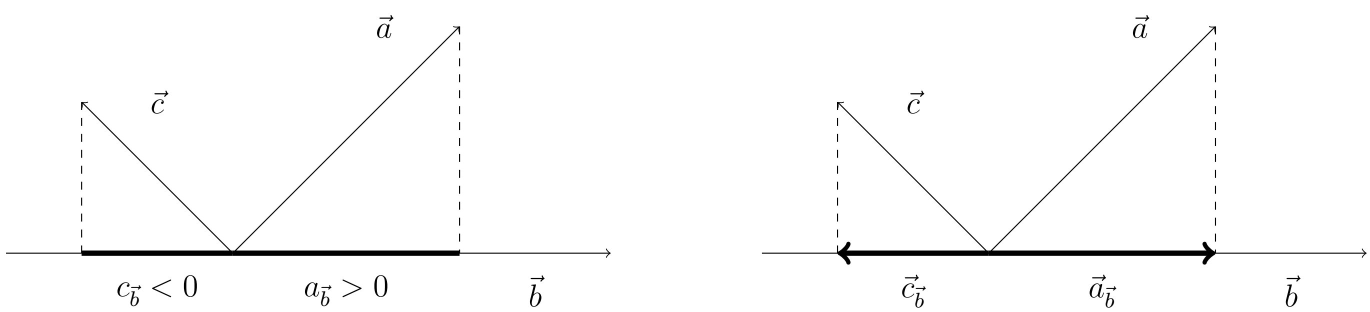
$$a_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Predznak projekcije je negativan ako vektori zatvaraju tupi kut.

Vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \cdot \vec{b}$$

kolinearan vektoru $\vec{b}$.



Slika 8: Skalarna i vektorska projekcija

Zadatak 2.27. *Vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od 60^o. Vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{c} = 7\vec{m} - 4\vec{n}$ dobiveni su kao linearne kombinacije vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.*

a) Izračunajte zbroj duljina vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$,

b) Odredite kutove koje zatvaraju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rješenje. Rješenje se dobiva korištenjem definicije skalarnog produkta.

a) duljina vektora $\vec{a}$ dobiva se iz svojstva

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (3\vec{m} - 2\vec{n})^2$$

koristeći se svojstvima kvaziasocijativnosti i komutativnosti

$$\begin{aligned}
(3\vec{m} - 2\vec{n})^2 &= 9\vec{m}^2 - 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 4\vec{n}^2 \\
\vec{a}^2 &= 9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^o + 4 \cdot 1 \\
|\vec{a}|^2 &= 7 \\
|\vec{a}| &= \sqrt{7} = 2.65
\end{aligned}$$

Duljine vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dobivaju se analogno:

$$\begin{aligned}
|\vec{b}|^2 &= \vec{b}^2 = (-2\vec{m}+\vec{n})^2 \\
&= 4\vec{m}^2 - 4\vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}^2 \\
&= 4 - 4\cdot 0.5 + 1 \\
|\vec{b}| &= \sqrt{3} = 1.73 \\
|\vec{c}| &= \sqrt{37} = 6.08,
\end{aligned}$$

pa je zbroj dobivenih duljina vektora u iznosu 10.46 jedinične duljine.

b) kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobiva se kao jedina nepoznanica u jednadžbi iz definicije skalarnog produkta:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$$
$$(3\vec{m}-2\vec{n})\cdot(-2\vec{m}+\vec{n}) = \sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\gamma$$
$$-6\vec{m}^2 + 4\vec{n}\vec{m} + 3\vec{m}\vec{n} - 2\vec{n}^2 = \sqrt{21}\cdot\cos\gamma$$

$$\begin{aligned}
-6+2+\frac{3}{2}-2 &= \sqrt{21}\cdot\cos\gamma | : \sqrt{21} \\
-\frac{4.5}{\sqrt{21}} &= \cos\gamma \\
-0.98198 &= \cos\gamma \\
\gamma &= 169^o,
\end{aligned}$$

gdje je γ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kut se može dobiti uvrštavanjem u formulu

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{b},\vec{c}) &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} \\
&= \frac{(-2\vec{m}+\vec{n})(7\vec{m}-4\vec{n})}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{37}} \\
&= \frac{-14\vec{m}^2 + 8\vec{m}\vec{n} + 7\vec{n}\vec{m} - 4\vec{n}^2}{\sqrt{111}} \\
&= \frac{-14+4+\frac{7}{2}-4}{\sqrt{111}} = -0.9966 \\
\alpha &= 175^o.
\end{aligned}$$

Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ iznosi 6^o.

Zadatak 2.28. *Odredite skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ na smjer vektora $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ i $\angle(\vec{p},\vec{q}) = 60^o$.*

Rješenje. Skalarnu projekciju

$$a_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

je moguće dobiti tek nakon računanja:

$$\begin{aligned}
\vec{p}\cdot\vec{q} &= |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 60^o\\
&= 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\\
&= 3\\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (2\vec{p}-3\vec{q})\cdot(\vec{p}+\vec{q})\\
&= 2\vec{p}^2-3\vec{p}\vec{q}+2\vec{p}\vec{q}-3\vec{q}^2\\
&= 8-9+6-27=-22\\
|\vec{b}|^2=\vec{b}^2=(\vec{p}+\vec{q})^2 &= \vec{p}^2+2\vec{p}\vec{q}+\vec{q}^2\\
&= 4+6+9=19\\
|\vec{b}| &= \sqrt{19}\\
a_{\vec{b}}=\frac{-22}{\sqrt{19}}=-5.05.
\end{aligned}$$

Vektorska projekcija dobiva se uvažavajući prethodno dobivene rezultate:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\vec{b}} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\\
&= \frac{-22}{19}(\vec{p}+\vec{q}).
\end{aligned}$$

Zadatak 2.29. *Odredite parametar* λ *tako da moduli vektora* $\vec{a}=(2a^\lambda,\lambda,\lambda-1)$ *i* $\vec{b}=(\lambda+1,\lambda-2,0)$ *budu jednaki i odredite kut između njih.*

Rješenje.
Rješenje zadatka moguće je tek nakon pravilne interpretacije načina na koji su zadani vektori. U različitim knjigama i zbirkama moguće je naići na različite načine zapisivanja vektora u pravokutnoj bazi:

$$\begin{aligned}
\vec{a}=(2a^\lambda,\lambda,\lambda-1) &= 2a^\lambda\vec{i}+\lambda\vec{j}+(\lambda-1)\vec{k}\\
\vec{b}=(\lambda+1,\lambda-2,0) &= (\lambda+1)\vec{i}+(\lambda-2)\vec{j}
\end{aligned}$$

Nakon toga, jednakost modula svodi se na:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= |\vec{b}|\\
\sqrt{4a^{2\lambda}+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1} &= \sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+\lambda^2-4\lambda+4} \quad |^2\\
4a^{2\lambda} &= 4\\
\lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Nakon nalaženja komponenti vektora i zapisa u obliku $\vec{a}=(2,0,-1)$ i $\vec{b}=(1,-2,0)$, neposrednim uvrštavanjem dobiva se

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=0.4,$$

iz čega slijedi $\varphi=66^o25'19''$.

Zadatak 2.30. *Zadani su vrhovi paralelograma:* $A(-3,-2,0), B(3,-3,1), C(5,0,2)$ *i* $D(-1,1,1)$*. Izračunajte kut među dijagonalama.*

Rješenje. Rješavanje treba početi provjerom vektora koji razapinju paralelogram:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (6,-1,1) \\ \overrightarrow{CD} &= (-6,1,-1) \end{aligned}$$

i daju poredak točaka u paralelogramu: $ABCD$. Tada su dijagonale:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (8,2,2) \\ \overrightarrow{BD} &= (-4,4,0). \end{aligned}$$

Konačno je traženi kut:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-32+8+0}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}} = -\frac{24}{48} \\ \varphi &= \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

no kako se za kut između pravaca općenito uzima manji od dva vršna kuta, to je u ovom slučaju kut među dijagonalama $\frac{\pi}{3} = 60^o$.

Zadatak 2.31. *Zadane su točke* $A(3,3,-2), B(0,-3,4), C(0,-3,0)$ *i* $D(0,2,-4)$*. Izračunajte vektorsku projekciju*

$$\overrightarrow{CD}_{\overrightarrow{AB}}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-3,-6,6) \\ \overrightarrow{CD} &= (0,5,-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}_{\overrightarrow{CD}} &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}) \\ &= \frac{-30-24}{9+36+36}\cdot(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}) \\ &= \frac{-2}{3}(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}) \\ &= 2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}. \end{aligned}$$

Zadaci.

1. Napišite tablicu skalarnog množenja za bazične vektore.

2. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$.

3. Odredite kut između vektora $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

4. Odredite λ tako da vektori $2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\lambda\vec{i} + 4\vec{j}$ budu okomiti.

5. Odredite duljine stranica i kuteve trokuta s vrhovima $A(-1,2,3), B(2,1,2)$ i $C(0,3,0)$.

6. Odredite skalarnu projekciju vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ na smjer vektora $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

7. Odredite duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut 60.

Rješenja.

1. $\begin{array}{c|ccc} \cdot & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \end{array}$.
2. Duljine dijagonala iznose 2.4 i 4.2 jediničnih duljina.
3. Kut ima $3\pi/4$ radijana.
4. $\lambda = 6$.
5. Dvije stranice po 3.3, a jedna 3.5 jedinične duljine, dva kuta po 58.5^o, jedan od 63^o.
6. $a_{\vec{b}} = 1.89$.
7. Duljine dijagonala su 2.6 i 3.6 jediničnih duljina.

2.5 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je funkcija koja paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ pridružuje vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Za vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vrijedi:

1) Vektor $\vec{c}$ je okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, onda su vektori kolinearni ili je barem jedan od njih nul-vektor.

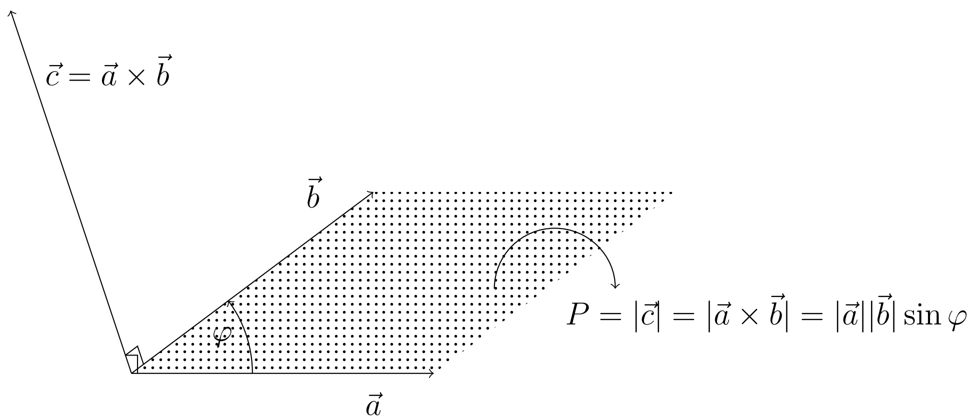
2) Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u navedenom poretku čine desnu bazu, tj. gledano iz vrha vektora $\vec{c}$ rotacija iz vektora $\vec{a}$ u vektor $\vec{b}$ suprotna je gibanju kazaljke na satu.

3) Duljina vektora $\vec{c}$, $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, odgovara površini paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Svojstva vektorskog produkta su:

a) antikomutativnost: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b) distributivnost: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$



c) kvaziasocijativnost: $\lambda\vec{a} \times \nu\vec{b} = \lambda\nu\vec{a} \times \vec{b}$

d) množenje jednakih vektora: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Vektorski produkt je operacija koja paru trodimenzionalnih vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pridružuje **trodimenzionalni** vektor u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$.

Kvazideterminanta kojom se dobiva rezultat vektorskog produkta glasi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

i razvija se po prvom retku

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Primjer 2.11. *Ako su zadani vektori* $\vec{a} = (-2, 8, -1)$ *i* $\vec{b} = (-9, 7, 4)$*, onda je*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 8 & -1 \\ -9 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 81\vec{i} - (-17\vec{j}) + 58\vec{k} = (81, 17, 58).$$

Zadatak 2.32. *Odredite duljinu kraće visine i površinu paralelograma razapetog vektorima* $2\vec{b} - \vec{a}$ *i* $3\vec{a} + 2\vec{b}$*, ako je* $|\vec{a}| = 5$*,* $|\vec{b}| = 4$ *i kut* $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$*.*

Rješenje. Površina paralelograma jednaka je

$$P = a \cdot v_a,$$

gdje je a duljina jedne od stranica, a v_a visina paralelograma okomita na tu stranicu. Vektorski račun površinu paralelograma računa kao duljinu vektora dobivenog vektorskim produktom vektora određenih stranicama paralelograma:

$$P = |(2\vec{b} - \vec{a}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|.$$

Distributivnost omogućava množenje zagrada "svaki sa svakim", no budući da komutativnost ne vrijedi, važno je pisati produkt u pravilnom poretku. Vrijedi kvaziasocijativnost.

$$P = |6\vec{b} \times \vec{a} + 4\vec{b} \times \vec{b} - 3\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Množenje jednake vektore poništava, a antikomutativnost daje:

$$\begin{aligned} P &= |6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{a}| \\ &= |8\vec{b} \times \vec{a}| \\ &= |8| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ &= 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 80\sqrt{2} \end{aligned}$$

Za izračunavanje duljine visine nedostaje duljina stranice. Budući se iz podataka ne otkriva koja je dulja stranica, treba izračunati duljine obje stranice. Skalarno množenje jednakih vektora daje duljine stranica paralelograma

$$\begin{aligned} (2\vec{b} - \vec{a})^2 &= |2\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ 4\vec{b}^2 - 4\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a}^2 &= |2\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ 4 \cdot 16 - 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 &= |2\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ \sqrt{89 - 40\sqrt{2}} &= |2\vec{b} - \vec{a}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (3\vec{a} + 2\vec{b})^2 \\ &= 9\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 \\ &= 225 + 120\sqrt{2} + 64 \\ |3\vec{a} + 2\vec{b}| &= \sqrt{289 + 120\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Po formuli koja povezuje površinu i visinu paralelograma sa duljinom stranice dobivaju se dvije visine:

$$v_1 = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{89 - 40\sqrt{2}}} = 19.87$$

$$v_2 = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{289 + 120\sqrt{2}}} = 5.28$$

Tražena je duljina kraće i ona iznosi 5.28 jediničnih duljina.

Zadatak 2.33. *Odredite skalarnu i vektorsku projekciju vektora* $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ *na vektor* $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$*, ako je* $A = (2, -2, -1), B = (0, -1, -3), \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje. Potrebno je odrediti zapise vektora $\vec{a}$ i $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Skalarna projekcija:

$$a_{\overrightarrow{AB}} = \frac{8+8+0}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{16}{3},$$

a vektorska projekcija:

$$\vec{a}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{16}{9}(-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

Zadatak 2.34. *Zadani su vektori* $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$ *i* $\vec{c} = (1,-1,0)$. *Odredite nepoznati vektor* $\vec{x}$ *koji zadovoljava uvjete:*

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a} &= 3 \\ \vec{x} \times \vec{b} &= \vec{c} \end{aligned}$$

Rješenje. Nepoznati vektor $\vec{x}$ treba tražiti po komponentama pretpostavkom da je

$$\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

i zadatak se svodi na nalaženje nepoznanica α, β i γ . Jednadžbe izlaze iz uvjeta:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \vec{x} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \vec{i} - \vec{j} \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ -\gamma\vec{i} + \gamma\vec{j} + (\alpha - \beta)\vec{k} &= \vec{i} - \vec{j}. \end{aligned}$$

Koristeći se nezavisnošću vektora baze trodimenzionalnog prostora, dobiva se

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 \\ \alpha &= \beta, \end{aligned}$$

što uvrštavanjem u prvi uvjet daje

$$\begin{aligned} 2\alpha - 1 &= 3 \\ \alpha &= 2 \\ \beta &= 2 \end{aligned}$$

i traženi vektor je $\vec{x} = (2, 2, -1)$.

Zadaci.

1. Izračunajte površinu paralelograma čije dijagonale određuju vektori $3\vec{m}+3\vec{n}$ i $\vec{m}-\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut $\frac{\pi}{6}$.
2. Napišite tablicu vektorskog produkta za bazične vektore.
3. Pokažite da se vektorsko množenje koordinatno zapisanih vektora može računati formalno kvazideterminantom:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

4. Neka su $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Izračunajte $\vec{a}\times\vec{b}$.
5. Odredite površinu i visinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.
6. Odredite površinu trokuta čiji su vrhovi $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ i $C(4,3,2)$.
7. Odredite jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Rješenja.
1. Za dijagonale paralelograma vrijedi $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori koji određuju stranice paralelograma. Riješiti sustav po $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i površina je 0.5 kvadratnih jedinica.

2. Tražena tablica u kojoj je nul-vektor $\vec{0}=0$:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

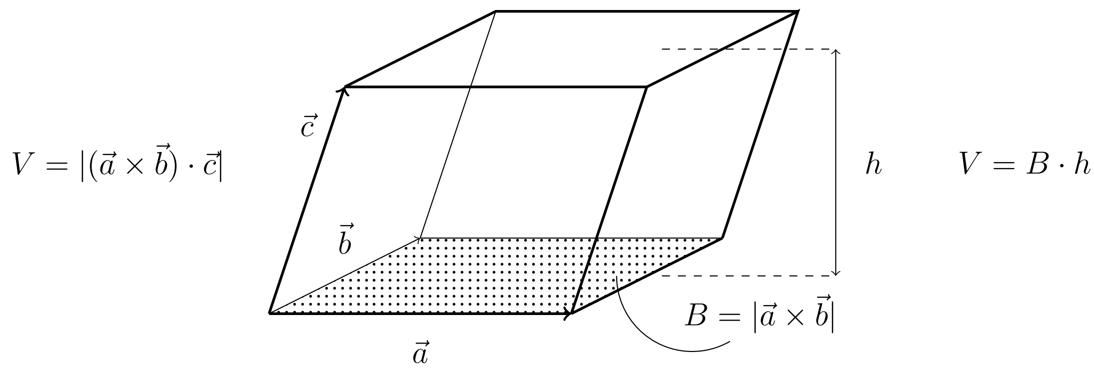
4. $3\vec{k}$.
5. $P=4.6$, $v=2.05$, a radi se o rombu.
6. $P=4.9$ kvadratnih jedinica.
7. $\vec{n}_0=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$.

2.6 Mješoviti produkt

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je funkcija koja trojki vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ pridružuje broj $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\in R$. Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ može se izračunati relacijom:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Geometrijski, apsolutna vrijednost mješovitog produkta je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 9: Paralelepiped i njegov volumen

Komplanarni vektori su vektori koji leže u jednoj ravnini.

Svojstva mješovitog produkta:

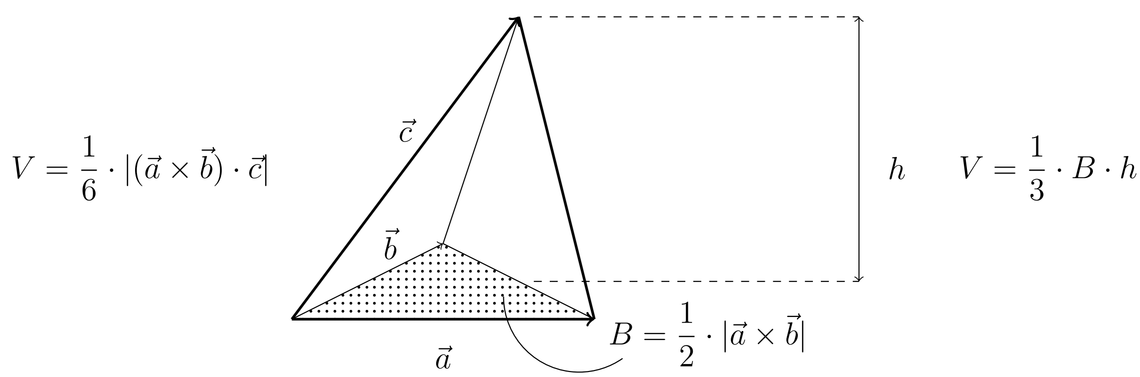
a) Cikličkom zamjenom poretka vektora mješoviti se produkt ne mijenja. Zamjena bilo koja dva vektora u mješovitom produktu povlači promjenu predznaka.

b) Zamjenom vektorskog i skalarnog produkta mješoviti produkt se ne mijenja.

c) Mješoviti produkt komplanarnih vektora $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Volumen tetraedra odrađenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se po formuli:

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



Slika 10: Tetraedar i njegov volumen

Zadatak 2.35. *Dokažite da točke* $A(2,-1,-2)$*,* $B(1,2,1)$*,* $C(2,3,0)$ *i* $D(5,0,-6)$ *pripadaju jednoj ravnini.*

Rješenje. Volumen tetraedra s vrhovima $ABCD$ jednak je nuli samo u slučaju ako sve četiri točke leže u jednoj ravnini. Dokaz tvrdnje slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0.\end{aligned}$$

Vektorski produkt računa se pomoću determinante tek kad se vektori raspišu po komponentama ortonormirane baze:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\ \overrightarrow{AB} &= -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{AC} &= \qquad 4\vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Računanjem determinante

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 3(6-12) - (-2) - 4(-4) \\ &= 3(-6) + 2 + 16 \\ &= -18 + 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

dokazuje se tvrdnja zadatka.

Zadatak 2.36. *Odredite onaj od jediničnih vektora okomitih na vektore $\vec{a} = (-2, -6, -1)$ i $\vec{b} = (1, 2, 0)$ koji s vektorom $\vec{c} = (2, -1, 0)$ zatvara šiljasti kut. U smjeru tog vektora odredite vektor $\vec{d}$ tako da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{d}$ razapinju paralelepiped volumena 18 kubičnih jedinica.*

Rješenje. Prvi je korak nalaženje jednog od vektora koji su okomiti na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Postoji beskonačno mnogo vektora koji su okomiti na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$ jer vektor $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ pomnožen bilo kojim skalarom ponovo će biti vektor okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Sljedeći je uvjet šiljatost kuta koji dobiveni vektor zatvara sa zadanim vektorom $\vec{c} = (2, -1, 0)$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|} = \frac{4+1}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{5}{3\sqrt{5}},$$

odakle je

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} = 42^o$$

pa slijedi da dobiveni vektor $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{c}$.

Budući je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3,$$

jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a} = (-2, -6, -1)$ i $\vec{b} = (1, 2, 0)$ koji s vektorom $\vec{c} = (2, -1, 0)$ zatvara šiljasti kut je vektor

$$(\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Vektor $\vec{d}$ koji se u zadatku traži ima isti smjer pa je

$$\vec{d} = \lambda \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Zahtjev da $\vec{d}$ s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razapinje paralelepiped volumena 18 kubičnih jedinica daje jednadžbu za λ:

$$\begin{aligned}
|\begin{vmatrix} \frac{2\lambda}{3} & \frac{-\lambda}{3} & \frac{2\lambda}{3} \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| &= 18 \\
|\frac{\lambda}{3}| \cdot |\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| &= 18 \\
\frac{|\lambda|}{3}(2 \cdot 2 + 1 + 4) &= 18 \\
|\lambda| &= \frac{18 \cdot 3}{9} \\
\lambda_1 = 6 \qquad & \lambda_2 = -6.
\end{aligned}$$

Zadatak ima dva vektora kao konačno rješenje:

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1 &= 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \\
\vec{d}_2 &= -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.
\end{aligned}$$

Za jedinstveno rješenje potreban je još jedan uvjet.

Zadatak 2.37. *Izračunajte volumen paralelepipeda čiji su bridovi određeni vektorima* $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ *i* $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ *ako je poznato samo to da vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *razapinju paralelepiped volumena* $3/4$ *kubične jedinice.*

Rješenje. Budući vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu ortonormirani, ne može se koristiti determinanta u nalaženju mješovitog produkta. Ostaje samo definicija:

$$\begin{aligned}
V &= |(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}| \\
&= |((\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})|.
\end{aligned}$$

Budući je vektorsko množenje distributivno obzirom na zbrajanje smije se vektorski množiti zagrade po načelu "svaki sa svakim" uz obavezno poštivanje poretka u vektorskom umnošku:

$$\begin{aligned} V &= |(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})| \\ &= |(2\vec{c}\times\vec{a}+2\vec{c}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})|, \end{aligned}$$

jer je množenje antikomutativno pa svaka zamjena mjesta vektora u vektorskom produktu povlači promjenu predznaka.
Skalarno množenje je distributivno pa se zagrade ponovno množe po načelu "svaki sa svakim". Izostavljeni su monomi u kojima se dvaput javlja isti vektor jer imaju vrijednost nula.

$$\begin{aligned} V &= |-2(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}+2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}| \\ &= |2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}|, \end{aligned}$$

jer svaka zamjena vektora u mješovitom produktu povlači promjenu predznaka produkta.
Konačno $V=|4(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a})|=4\cdot\dfrac{3}{4}=3$.

Zadaci.

1. Odredite volumen i visinu paralelepipeda razapetog vektorima
$$\begin{array}{l} \vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k} \\ \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k} \\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k} \end{array}.$$

2. Koliki je volumen tetraedra razapetog vektorima iz prvog zadatka?

3. Pokažite da su vektori $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ i $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ komplanarni i rastavite vektor $\vec{c}$ na komponente u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

4. Zadani su vektori $\vec{a}=(1,1,1)$ i $\vec{b}=(1,-2,0)$. Odredite takav vektor $\vec{c}$ koji je komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, okomit na $\vec{a}$ i $\vec{c}\cdot\vec{b}=14$.

5. Dokažite da su za svaka tri po volji odabrana vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{c}-\vec{a}$ komplanarni.

6. Dokažite da za vektore $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ i $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vrijedi $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

7. Dokažite da za trodimenzionalne vektore vrijedi $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}$.

Rješenja.
1. $V = 33$, $v = 4.4$.
2. $V = 5.5$.
3. $V = 0$, $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.
4. $\vec{c} = (4, -5, 1)$.

U zadacima 5. i 6. treba dokazati tvrdnje koje proizlaze iz definicija i teorema prethodnog gradiva, tako da zadaci nemaju rješenja.
7. Svaki se trodimenzionalni vektor može raspisati po komponentama ortogonalne baze. Algebarska razrada lijeve i desne strane vodi na podudarnost.

2.7 Ispitni zadaci s vektorima

Zadatak 2.38. *Vektor $\vec{n}$ komplanaran je s vektorima $\bar{p}$ i $\bar{q}$, pri čemu je $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 4$ i $\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \pi/3$. Ako je $\bar{n} \cdot \bar{p} = 8$ i $\bar{n} \cdot \bar{q} = 16$ odredite*

a) jedinični vektor vektora $\vec{n}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$,

b) $|\vec{n} + \vec{q}|$

c) $\angle(\vec{n}, \vec{p})$.

Rješenje. Komplanarnost vektora $\vec{n}, \vec{p}$ i $\vec{q}$ podrazumijeva da se vektor $\vec{n}$ može napisati kao linearna kombinacija vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$:

$$\vec{n} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}.$$

Nepoznati skalari α i β dobivaju se iz uvjeta koji prelaze u jednadžbe. Prvi uvjet daje prvu jednadžbu za α i β

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{p} &= 8 \\ (\alpha\vec{p} + \beta\vec{q}) \cdot \vec{p} &= 8 \\ \alpha\vec{p}^2 + \beta\vec{q} \cdot \vec{p} &= 8 \\ 4\alpha + \beta \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} &= 8 \\ 4\alpha + 4\beta &= 8, \end{aligned}$$

a drugi uvjet drugu jednadžbu

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{q} &= 16 \\ (\alpha\vec{p} + \beta\vec{q}) \cdot \vec{q} &= 16 \\ \alpha\vec{p} \cdot \vec{q} + \beta\vec{q}^2 &= 16 \\ 4\alpha + 16\beta &= 16. \end{aligned}$$

Sustav

$$\begin{cases} 4\alpha + 4\beta = 8 \\ 4\alpha + 16\beta = 16 \end{cases}$$

ima rješenje $\alpha = 4/3$, $\beta = 2/3$ pa je vektor $\vec{n}$ linearna kombinacija

$$\vec{n} = 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q}.$$

Sada se mogu rješavati zahtjevi zadatka.

a) Vektor $\vec{n} = 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q}$ nije jedinični:

$$\begin{aligned} |\vec{n}| = \sqrt{(4/3\vec{p} + 2/3\vec{q})^2} \\ &= \sqrt{16/9\vec{p}^2 + 16/9 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} + 4/9\vec{q}^2} \\ &= 2/3\sqrt{4\vec{p}^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2} \\ &= 2/3\sqrt{16 + 16 + 16} = 8\sqrt{3}/3. \end{aligned}$$

Jedinični vektor u smjeru $\vec{n}$ dobiva se nakon množenja

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{3}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(2\vec{p} + \vec{q})$$

i daje rješenje pod a):

$$\vec{n}_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{p} + \frac{\sqrt{3}}{12}\vec{q}.$$

b) Računanjem

$$\begin{aligned} \vec{n} + \vec{q} &= 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q} + \vec{q} \\ &= 4/3\vec{p} + 5/3\vec{q}. \\ |\vec{n} + \vec{q}| &= 1/3\sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2} \\ &= 1/3\sqrt{64 + 160 + 400} = 1/3\sqrt{624} = 4\sqrt{39}/3 \end{aligned}$$

dolazi se do rješenja.

c) Analogno, koristeći rezultat b) dijela zadatka i uvjet zadatka,

$$\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \angle(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.39. *Odredite vektor $\vec{c}$ kolinearan vektoru $\vec{a} + \vec{b}$ ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$ i $|\vec{b}| = 2$. Napišite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Rješenje. Kolinearnost vektora $\vec{c}$ i vektora $\vec{a} + \vec{b}$ algebarski se zapisuje:

$$\vec{c} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

gdje je $\lambda \in R$. Jednadžba po varijabli λ izlazi iz uvjeta:

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 18$$

koji zbog $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ prelazi u

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) &= 18 \\ \alpha(5+4) &= 18 \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

pa je vektor

$$c = 2\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Zadatak 2.40. *Odredite vektor $\vec{x}$ okomit na vektore*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (3, 2, 1) \\ \vec{b} &= (2, -1, 3) \\ \vec{c} &= (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Rješenje. Nepoznati vektor tražimo u općenitom zapisu

$$\vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

uz uvjete da skalarni produkt poništava okomite vektore:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a} = 3\alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{b} = 2\alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{c} = \alpha + \beta - \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Sustav jednadžbi ima samo jedno rješenje

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

pa je jedini vektor okomit na tri očito nekomplanarna vektora nužno jedino nul-vektor:

$$\vec{x} = \vec{0}.$$

Zadatak 2.41. *Zadani su vektori $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 4, 4)$, $\overrightarrow{OC} = (3, 5, 5)$, $\overrightarrow{OD} = (2, 2m, 3m+1)$ i $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.*

a) Odredite m tako da $\overrightarrow{AD}$ bude okomit na vektor $\vec{a}$.

b) Izračunajte volumen tetraedra $ABCD$.

Rješenje.

a) Vektor:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{i} + (2m-1)\vec{j} + 3m\vec{k}$$

i uz uvjet okomitosti koji poništava skalarni produkt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \perp \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \vec{a} &= 0 \\
3 - 5(2m-1) + 6m &= 0 \\
3 - 10m + 5 + 6m &= 0 \\
8 &= 4m \\
m &= 2
\end{aligned}$$

b) Za nađenu vrijednost $m = 2$ vektori koji razapinju tetraedar su:

$$\overrightarrow{AB} = (3,3,3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (2,4,4)$$
$$\overrightarrow{AD} = (1,3,6)$$

i volumen tetraedra

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \right| \\
V &= \frac{1}{6}|(3 \cdot 12 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2)| \\
V &= \frac{1}{6}|(36 - 24 + 6)|
\end{aligned}$$

iznosi 3 kubične jedinice.

Zadatak 2.42. *Izračunajte veličinu kuta što ga zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{s} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{t} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ okomiti.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\vec{s} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{t} &= 0 \\
(\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) &= 0 \\
5\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} - 4\vec{m}\vec{n} - 8\vec{n}^2 &= 0 \\
6\vec{m}\vec{n} &= 3 \\
|\vec{m}||\vec{n}|\cos\varphi &= \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Zadatak 2.43. *Tri jedinična vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ zatvaraju kuteve $\angle(\vec{i},\vec{j}) = \pi/4$, $\angle(\vec{j},\vec{k}) = \pi/2$ i $\angle(\vec{k},\vec{i}) = 2\pi/3$. Ako je $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, a $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, odredite $|\vec{a} \times \vec{b}|$.*

Rješenje. Poznata svojstva distributivnosti i antikomutativnosti redom daju

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}) \\
&= -\vec{j}\times\vec{i}+\vec{k}\times\vec{i}+\vec{i}\times\vec{j}+\vec{k}\times\vec{j} \\
&= 2\vec{i}\times\vec{j}+\vec{k}\times\vec{i}+\vec{k}\times\vec{j} \\
|\vec{a}\times\vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a}\times\vec{b})^2} \\
&= \sqrt{4(\vec{i}\times\vec{j})^2+(\vec{k}\times\vec{i})^2+(\vec{k}\times\vec{j})^2+4(\vec{i}\times\vec{j})(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})(\vec{k}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})(\vec{k}\times\vec{j})} \\
&= \frac{\sqrt{7-\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

jer je, primjerice

$$(\vec{i}\times\vec{j})^2 = |\vec{i}\times\vec{j}|^2 = |\vec{i}|^2|\vec{j}|^2\sin^2(\pi/4) = 1/2,$$

dok je po 3. problemskom zadatku

$$(\vec{k}\times\vec{j})(\vec{k}\times\vec{i}) = \begin{vmatrix} \vec{k}\vec{k} & \vec{k}\vec{i} \\ \vec{j}\vec{k} & \vec{j}\vec{i} \end{vmatrix},$$

a skalarne produkte valja računati po definiciji

$$\vec{k}\vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}|\cos(2\pi/3) = -1/2.$$

Zadatak 2.44. *Točke $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$ i $D(2,3,8)$ vrhovi su piramide. Izračunajte*

a) volumen piramide

b) visinu na stranicu ABC.

Rješenje.

a) Vektori koji određuju trostranu piramidu su:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= -2\vec{i}+3\vec{j} \\
\overrightarrow{AC} &= -2\vec{i}+6\vec{k} \\
\overrightarrow{AD} &= 3\vec{j}+8\vec{k}
\end{aligned}$$

a volumen piramide dobiva se računom:

$$\begin{aligned}
V &= |\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{6}|(-2\cdot(-18)-3\cdot(-16))|
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}|84| = 14$$

b) Visina na stranicu ABC kao na osnovicu dobiva se iz formule

$$V = \frac{B \cdot v}{3},$$

gdje je V volumen piramide, B površina osnovice i v visina piramide mjerena od osnovice površine B. Površina osnovice dobiva se kao polovica apsolutne vrijednosti vektorskog produkta:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2}|18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}| \\ &= 3|3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}| \\ &= 3\sqrt{9+4+1} = 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

Duljina visine v je

$$v = \frac{3V}{B} = \frac{42}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14} = 3.7.$$

Zadatak 2.45. *Zadani su vektori $\vec{a} = (2\lambda, 1, 1-\lambda)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ i $\vec{c} = (5, -1, 8)$. Odredite parametar λ tako da vektor $\vec{a}$ zatvara jednake kutove s vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Za takav λ odredite nagib vektora $\vec{a}$ prema ravnini određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Za isti λ odredite volumen i jednu od visina paralelepipeda konstruiranog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.*

Rješenje. Budući se kut između vektora nalazi u intervalu $[0, \pi]$, to će jednakost kosinusa povlačiti jednakost kutova:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}.$$

Množenje modulom vektora $\vec{a}$ i uvrštavanje koordinata vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ daje

$$\begin{aligned} \frac{-2\lambda + 3}{\sqrt{10}} &= \frac{2\lambda + 7}{\sqrt{90}} \Big| \cdot 3\sqrt{10} \\ -6\lambda + 9 &= 2\lambda + 7 \\ -8\lambda &= -2 \\ \lambda &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nagib vektora $\vec{a}$ prema ravnini određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kut je pravca koji ima smjer vektora $\vec{a}$ i jedne od ravnina paralelnih vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Taj kut definira se kao šiljasti kut pravca i njegove vertikalne projekcije (sjene) u ravnini. Vektorski račun omogućava nalaženje kuta koji zatvaraju vektor $\vec{a}$ i vektor okomit na vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 8\vec{j} - 14\vec{k}.$$

Kut se računa po standardnoj formuli:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|}\\ &= \frac{12+8-\frac{21}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{9}{16}}\cdot\sqrt{836}}\\ &= \frac{9.5}{\sqrt{1.8125}\sqrt{836}}\\ &= 0.24405\\ \varphi &= 76^o\end{aligned}$$

i daje komplement kuta kojeg zatvara smjer vektora $\vec{a}$ i ravnina određena vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Traženi je kut

$$\psi = 14^o.$$

Volumen paralelepipeda kojeg zatvaraju vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se pomoću determinante

$$V = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 24 + 8 + \frac{3}{4}\cdot(-14) = 9.5$$

što je bilo i za očekivati iz prethodnog računanja kuta.
Ako se za visinu odabere upravo visina na bazu - paralelogram razapet vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, koristeći rezultat

$$B = |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{836}$$

i formulu

$$V = B\cdot v$$

dobiva se

$$v = \frac{V}{B} = \frac{9.5}{\sqrt{836}} = 0.33.$$

2.8 Zadaci za samostalno rješavanje.

1. Pokažite da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k}$ komplanarni pa rastavite vektor $\vec{c}$ na linearnu kombinaciju druga dva vektora.

2. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani su tako da je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, a kut među njima je 120^o. Kolika je duljina vektora $\vec{c} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b}$?

3. Odredite volumen i oplošje trostrane piramide čiji su vrhovi točke $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ i $D(3,7,2)$.

4. Točke $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ i $C(5,0,2)$ tri su uzastopna vrha paralelograma $ABCD$. Odredite opseg i površinu tog paralelograma. Odredite koordinate četvrtog vrha D.

5. Zadani su vrhovi trokuta $A(2,1,1)$, $B(3,1,4)$ i $C(0,2,1)$. Izračunajte površinu zadanog trokuta i duljinu visine spuštene iz vrha C.

6. Odredite parametar t tako da točke $A(t+2,7,-2)$, $B(3,2,-1)$, $C(9,4,4)$ i $D(1,5,0)$ leže u istoj ravnini.

7. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}$ i $\vec{c}=5\vec{j}-2\vec{k}$. Prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

8. Na osi OZ odredite točku A tako da točka A zajedno s točkama $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ i $D(3,7,2)$ određuje trostranu piramidu volumena 20 kubičnih jedinica. Odredite duljinu visine zadane piramide koja je spuštena iz vrha A.

9. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ i $\vec{c}=-\vec{j}+2\vec{k}$. Odredite vektor $\vec{d}$ iz uvjeta $\vec{c}\cdot\vec{d}=1$ i $\vec{d}\times\vec{a}=\vec{b}$, a zatim odredite vektorsku projekciju vektora $\vec{d}$ na smjer vektora $\vec{c}$.

10. Odredite skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$ na vektor $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$ ako je $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $A(2,-2,-1)$, $B(0,-1,-3)$.

11. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$ i $\vec{c}=3\vec{i}+m\vec{j}+4\vec{k}$. Odredite m tako da vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni i izrazi $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

12. Zadane su točke $A(1,1,1), B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$ i $D(2,2m,3m+1)$ te vektor $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$. Odredite:
    (a) m tako da vektor $\overrightarrow{AD}$ bude okomit na $\vec{a}$,
    (b) volumen tetraedra $ABCD$.

13. Izračunajte veličinu kuta što ga zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{s}=\vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{t}=5\vec{m}-4\vec{n}$ međusobno okomiti.

14. Odredite m tako da vektor $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}+m\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ zatvara jednake kutove s vektorima $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}$ i $\vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}$.

15. Zadani su vektori $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{n}=-3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jedinični vektori koji zatvaraju kuteve $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$ i $\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{6}$. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma kojeg razapinju vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

16. Tri uzastopna vrha paralelograma su $A(-1,-1,2)$, $B(0,1,-3)$, $C(-4,0,-2)$. Odredite četvrti vrh i odredite duljinu kraće visine paralelograma.

17. Pokažite da točke $A(2,3,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(-1,0,2)$ i $D(3,-3,4)$ ne leže u jednoj ravnini. Koliko bi visok bio tetraedar određen tim točkama kad bi ga postavili na plohu određenu točkama ABC?

18. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped volumena $V = 8$ kubičnih jedinica. Koliki volumen će imati paralelepiped koji će razapinjati vektori $2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ i $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$?

19. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori za koje vrijedi $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, a kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi 60^o. Odredite veći kut u paralelogramu kojeg razapinju vektori $3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

20. Pokažite da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ komplanarni pa rastavite vektor $\vec{c}$ na komponente u smjerovima druga dva vektora.

21. Zadane su točke $A(2, -3, 3)$, $B(0, 2, 1)$ i $C(-3, -2, t)$. Odredite parametar t tako da trokut ΔABC ima površinu 16 kvadratnih jedinica.

22. Zadane su točke $A(t, -2, 1)$, $B(0, 2, 0)$ i $C(-1, 2, -3)$. Odredite parametar t tako da trokut ΔABC ima površinu 18 kvadratnih jedinica.

23. Odredite prvu koordinatu točke D ako točke $A(2, 3, 1)$, $B(4, 0, 3)$, $C(5, 5, -2)$ i $D(x, 1, 2)$ određuju tetraedar u kojem visina spuštena iz vrha D ima duljinu $v = 18$ jediničnih duljina.

24. Odredite drugu koordinatu točke C ako točke $A(5, 1, 4)$, $B(-1, -1, -1)$, $C(2, y, 3)$ i $D(3, 2, 1)$ određuju tetraedar u kojem visina spuštena iz vrha C ima duljinu $v = 15$ jediničnih duljina.

25. Leže li točke $A(-2, 1, -3)$, $B(1, 1, 0)$, $C(3, 6, 9)$ i $D(1, 8, 2)$ u istoj ravnini? Ako leže, izrazite vektor $\overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Ako ne leže, izračunajte volumen tetraedra čiji su to vrhovi.

26. Izračunajte skalarnu projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ ako je $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ i $\vec{b} = (1, 3, -4)$.

27. Tetraedar $ABCD$ ima $V = 12.5$ kubičnih jedinica. Ako su poznata tri vrha tetredra $A(2, 0, -1)$, $B(3, -1, 5)$ i $C(4, 4, 4)$, odredite koordinate četvrtog vrha D, ako je vektor $\overrightarrow{AD}$ u smjeru vektora $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

28. Izračunajte duljine stranica i površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, dok je kut $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/3$.

29. Vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su takvi da je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, a kut $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/4$. Kakav kut zatvaraju vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 4\vec{m} + 5\vec{n}$ koji predstavljaju linearne kombinacije vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$?

30. Napišite komponente vektora $\vec{x}$ za koji je $\vec{x} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -2$ i $\vec{x} \cdot \vec{c} = -7$, ako su zadani vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

31. Odredite vektor duljine 7 koji je okomit na vektore $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

32. Točke $A(1, 0, 2)$, $B(-3, -2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ i $D(-1, -1, 1)$ vrhovi su tetraedra. Odredite volumen tetraedra i duljinu visine spuštene iz vrha D.

33. Točke $A(3,2,0)$, $B(-3,3,-1)$ i $D(1,-1,-1)$ vrhovi su paralelograma $ABCD$. Odredite opseg, površinu i koordinate vrha C u zadanom poretku vrhova paralelograma.

Rješenja.

1. $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.
2. $|\vec{c}| = 10.4$ jedinične duljine.
3. $V = 20$ kubičnih, a $O = 56.2$ kvadratne jedinice (Oplošje tijela je ukupna površina ploha koje omeđuju tijelo).
4. $O = 19.8$ jediničnih duljina, $P = 20.8$ kvadratna jedinica, $D = (-1,1,1)$.
5. $P = 3.4$ kvadratne jedinice, $h = 2.1$ jedinične dužine.
6. $t = -\dfrac{89}{13}$.
7. Komponente vektora $\vec{c}$ su redom $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{4}, -\dfrac{1}{4})$.
8. Komponenta $z_A = 257/17$, a visina $h = 5.3$ jedinične duljine.
9. $\vec{d} = (-3,-3,-1)$, $\vec{d}_{\vec{c}} = (0,-1/5,2/5)$.
10. Skalarna projekcija $\dfrac{16}{3}$, vektorska projekcija $\vec{a}_{\vec{d}} = -\dfrac{16}{9}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$.
11. $m = -3$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
12. $m = 2$, $V = 3$.
13. Kut ima 60^o.
14. $m = 1$.
15. Kraća dijagonala ima 0.78 i dulja 5 jediničnih duljina.
16. Četvrti vrh $D = (-5,-2,3)$, a kraća visina je ona na stranicu $\overline{AB}$ i iznosi 3.74 jedinične duljine.
17. $V = 114 \neq 0$, a visina na ABC iznosi 4.7 jediničnih duljina.
18. $V = 16$ kubičnih jedinica.
19. Veći kut je 115^o.
20. $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.
21. Dva su rješenja: $t_1 = 5.78$, $t_2 = -1.85$.

22. Analogno: $t_1 = 11.57$, $t_2 = -10.90$.

23. $x = 70.4$.

24. $y = 10.43$.

25. Ne leže, $V = 19.5$ kubičnih jedinica.

26. Skalarna projekcija: -1.77.

27. $D = (11, 6, 2)$.

28. Duljine stranica: $|\vec{a}| = 4\sqrt{3} \sim 7$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{13} \sim 7.2$ jediničnih duljina.
$P = 20\sqrt{3} \sim 34.6$ jediničnih duljina.

29. 97^o.

30. $\vec{x} = (-1, -2, 4)$.

31. Traženi je vektor $\dfrac{7}{\sqrt{318}}(\vec{i} - 14\vec{j} - 11\vec{k})$.

32. $V = 1/6$ kubične jedinice, a visina iznosi 0.16 jedinične duljine.

33. $O = 2\sqrt{38} + 2\sqrt{14} = 19.8$ jediničnih duljina, $P = \sqrt{432} = 20.8$ kvadratnih jedinica,
$C = (-5, 0, -2)$.

3 Matrice

3.1 Definicija i primjeri

Primjer 3.1. *Tvornica čokolade proizvodi četiri vrste čokolade koje prodaje u pet gradova. Prodaja je tijekom mjeseca imala sljedeće rezultate:*

- *prvi grad je prodao po tipovima:* 40, 60, 20 *i* 30 *tisuća komada*

- *drugi grad:* 50, 50, 15 *i* 35 *tisuća*

- *treći:* 40, 45, 25, 40

- *četvrti:* 30, 20, 10, 20,

- *peti:* 35, 40, 15 *i* 25 *tisuća.*

Prikažite prikladno rezultate prodaje.

Rješenje. Prikladan zapis procesa prodaje je zapis u pet slogova, pri čemu svaki slog predstavlja prodaju jednog grada:

$$\begin{bmatrix} 40 & 60 & 20 & 30 \\ 50 & 50 & 15 & 35 \\ 40 & 45 & 25 & 40 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \\ 35 & 40 & 15 & 25 \end{bmatrix}.$$

Matrica A reda $m \times n$, pri čemu su m i n prirodni brojevi, je svaka pravokutna tablica elemenata poredanih u m redaka i n stupaca.

Definicija 3.1. *Neka je*

$$D = \{(i, j); \quad i = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n\}.$$

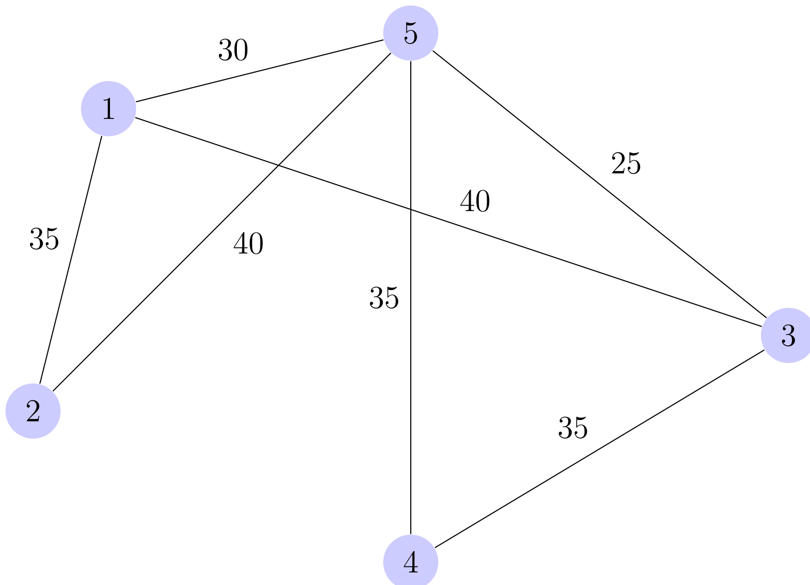
Realna matrica tipa $m \times n$ *je funkcija*

$$A : D \to R$$

čije su vrijednosti $A((i, j)) = a_{ij}$, *a koja se simbolično zapisuje u obliku*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Zadatak 3.1. *Matrično zapišite komunikacije nacrtanog grafa tako da element matrice bude jednak nuli u slučaju da između i-tog i j-tog čvora nema neposredne komunikacije.*



Slika 11: Graf

Rješenje. Traženi matrični zapis glasi: $M = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & 0 & 30 \\ 35 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 35 & 25 \\ 0 & 0 & 35 & 0 & 35 \\ 30 & 40 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 3.2. *Udaljenost čvorova u grafu je duljina najkraćeg puta između dva zadana čvora. Put u grafu je niz čvorova kod kojih su svaka dva susjedna povezana komunikacijom. Napišite matricu najkraćih udaljenosti čvorova iz Zadatka 3.1.*

Rješenje.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & 65 & 30 \\ 35 & 0 & 65 & 75 & 40 \\ 40 & 65 & 0 & 35 & 25 \\ 65 & 75 & 35 & 0 & 35 \\ 30 & 40 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

Primijetite da je matrica **simetrična** u odnosu na elemente glavne dijagonale koji su svi odreda jednaki nuli.

Posebne matrice su:

- kvadratna matrica: $m = n$
- nul-matrica tipa $m \times n$:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

- dijagonalna matrica je kvadratna matrica: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$:

$$d_{ij} = \delta_{ij} \cdot a_{ij}$$

- jedinična matrica I ili E je kvadratna matrica za koju vrijedi $e_{ij} = \delta_{ij}$
- transponirana matrica matrice A tipa $m \times n$ je matrica A^T tipa $n \times m$ u kojoj je

$$(a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

- simetrična matrica je kvadratna matrica $A = A^T$
- antisimetrična matrica je $A^T = -A$
- gornja trokutasta matrica: $i > j \quad \Rightarrow a_{ij} = 0$
- donja trokutasta matrica: $i < j \quad \Rightarrow a_{ij} = 0$

Zadatak 3.3. *Navedite po jedan primjer za svaku od matrica. Koristite se matricama najviše do* 4×4.

Zadatak 3.4. *Napišite simetričnu donjetrokutastu matricu i antisimetričnu gornjetrokutastu matricu reda 3.*

Rješenja. Primjeri matrica:

- kvadratna ima isti broj redaka i stupaca tako da je kvadratna matrica trećeg reda primjerice $\begin{bmatrix} 2 & x & -1 \\ x & 0 & a \\ 4 & \pi & b \end{bmatrix}$;
- nul-matrica ima sve elemente jednake nuli $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
- dijagonalna može imati nule samo na dijagonali, ali ne mora ni tamo: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\pi \end{bmatrix}$;
- jedinične mogu biti drugog reda $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, trećeg reda $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$...
- transponirana matrica matrice $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ je matrica $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$.

- simetrične matrice su dijagonalne, jedinične, ali i matrica iz zadatka 3.1, dok bi antisimetrična bila slična: $\begin{bmatrix} 0 & 35 & -40 & 65 & -30 \\ -35 & 0 & -65 & 75 & 40 \\ 40 & 65 & 0 & 35 & 25 \\ -65 & -75 & 35 & 0 & -35 \\ 30 & -40 & -25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$ i obavezno na dijagonali ima nule.

- gornja ili gornje trokutasta matrica ima obavezno nule ispod dijagonale, a donje trokutasta ima obavezno nule iznad dijagonale: $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

Jedino su nul-matrice simetrične ili antisimetrične, a istovremeno gornje, odnosno donje trokutaste.

3.2 Zbrajanje matrica. Množenje matrice skalarom.

Matrice istog tipa zbrajaju se po elementima na odgovarajućim pozicijama. Matrice različitog tipa ne mogu se zbrajati. Matrica se množi skalarom tako da se svaki element matrice pomnoži tim skalarom.

Zbrajanje matrica istog tipa daje ponovno matricu tog tipa čije elemente dobivamo zbrajanjem po elementima matrica pribrojnika tako da je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Množenje matrice skalarom izvodi se tako da se skalarom pomnoži svaki član matrice posebno. Pritom se tip matrice ne mijenja.

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}).$$

Svojstva zbrajanja su:

1. asocijativnost
2. postoji neutralan element, nul-matrica
3. svaka matrica ima suprotnu
4. komutativnost.

Množenje skalarom ima sljedeća svojstva:

1. kvaziasocijativnost
2. distributivnost prema zbrajanju matrica
3. distributivnost prema zbrajanju skalara
4. $1 \cdot A = A$.

Zadatak 3.5. *Ako pretpostavimo da će svaki mjesec prodaja čokolade biti povećana za* 10%*, izračunajte predviđenu prodaju za iduća dva mjeseca i ukupnu predviđenu prodaju u tromjesečju.*

Rješenje. Matrice prodaje u sljedeća dva mjeseca su redom

$$\begin{bmatrix} 44 & 66 & 22 & 33 \\ 55 & 55 & 16.5 & 38.5 \\ 44 & 49.5 & 27.5 & 44 \\ 33 & 22 & 11 & 22 \\ 38.5 & 44 & 16.5 & 27.5 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 48.4 & 72.6 & 24.2 & 36.3 \\ 60.5 & 60.5 & 18.15 & 42.35 \\ 48.4 & 54.45 & 30.25 & 48.4 \\ 36.3 & 24.2 & 12.1 & 24.2 \\ 42.35 & 48.4 & 18.15 & 30.25 \end{bmatrix}.$$ Ukupna prodaja po tipovima i gradovima iznosi: $$\begin{bmatrix} 132.4 & 198.6 & 66.2 & 99.3 \\ 165.5 & 165.5 & 49.65 & 115.85 \\ 132.4 & 148.95 & 82.75 & 132.4 \\ 99.3 & 66.2 & 33.1 & 66.2 \\ 115.85 & 132.4 & 49.65 & 82.75 \end{bmatrix}.$$

3.3 Množenje matrica

Umnožak matrice A tipa $m \times n$ i matrice B tipa $n \times p$ je matrica C tipa $m \times p$ čiji se elementi dobivaju

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Matrice A i B su ulančane i matrica B se nadovezuje na matricu A.

Asocijativnost je jedino svojstvo množenja matrica:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C.$$

Komutativnost ne vrijedi. Matrice u množenju ne mogu zamijeniti mjesta.

Primjer 3.2. *Neka su* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$. *Matrica* $B \cdot A$ *je tipa* 4×4*:*

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 36 & 45 & 81 \\ 36 & 48 & 60 & 84 \\ 90 & 120 & 150 & 270 \\ 30 & 40 & 50 & 90 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica pretpostavlja njihovu ulančanost. Tako u sljedećem primjeru množenje obrnutim redoslijedom nije moguće.

Primjer 3.3. *Pomnožiti se mogu matrice u redoslijedu:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 & 7 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & -19 & -4 & 21 \\ -24 & -12 & 48 & -42 \\ -2 & 23 & -42 & 28 \end{bmatrix}.$$

U obrnutom redoslijedu matrice se ne mogu množiti.

Zadatak 3.6. *Primjenom definicije pomnožite zadane matrice:*

1.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenje. 1. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, 2. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$.

Kvadratne matrice reda n zatvorene su za množenje matrica. Množenje kvadratnih matrica nije komutativno.

Jedinična matrica reda n neutralan je element za množenje.

Determinante koje se mogu računati samo za kvadratne matrice imaju svojstvo da je

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$$

Navedena jednakost poznata je kao Binet-Cauchyjev teorem.

Zadatak 3.7. *Provjerite Binet-Cauchyjevo svojstvo za sljedeće matrice:*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Rješenje.
Potrebno je izračunati $detA$, $detB$, $A \cdot B$ i $det(A \cdot B)$ za svaki navedeni dio zadatka:

a) nakon računanja $detA = -2$, $detB = 7$, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ i $det(A \cdot B) = -14$.
Jednostavno se provjeri da je $-2 \cdot 7 = -14$

b) analogno $-18 \cdot 112 = -2016 = \begin{vmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{vmatrix}$

c) 0.

Potenciranje matrica definira se samo za kvadratne matrice induktivno:

- $A^1 = A$
- $A^2 = A \cdot A$
- $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdots A$...
- posebno je $A^0 = E$, gdje je E pripadna jedinična matrica.

Matrični polinom je moguće definirati samo za kvadratne matrice zbog dobre definiranosti potenciranja matrice: $A^n = A \cdot A \cdots A$.

Zadatak 3.8. *Ako je* $\varphi(x) = -2 - 5x + 3x^2$ *i ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, *koliko je* $\varphi(A)$*?*

Rješenje. $\varphi(A) = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

Zadatak 3.9. *Izračunajte* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ *i* $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$.

Rješenje. $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$.

Zadatak 3.10. *Dokažite da svaka kvadratna matrica* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *zadovoljava uvjet:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O,$$

gdje je E *jedinična, a* O *nul-matrica. Na osnovu toga odredite matricu* $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right)^4$.

Rješenje. $A^4 = (a^2 + bc)^2 E$

Zadaci.

1. Neka je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$
i neka je zadan polinom $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Izračunajte matricu $f(A)$.

2. Uvjerite se da matrica
$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
poništava polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$.

Rješenja. 1. $f(A) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$. 2. $f(A) = 0$.

3.4 Inverzna matrica. Matrična jednadžba

Regularna matrica M je kvadratna matrica za koju je $detM \neq 0$. Matrice koje nisu regularne nazivaju se **singularnima**.

Inverzna matrica zadane matrice M je matrica u oznaci M^{-1} koja ima svojstvo da je
$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} = E,$$
gdje je E pripadna jedinična matrica.

Svaka regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.

Svojstva inverznih matrica:
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

Elementarne transformacija nad retcima bilo koje matrice jesu:

- dijeljenje ili množenje retka brojem različitim od nule
- dodavanje jednog retka pomnoženog odabranim brojem nekom drugom retku
- zamjena redaka.

Primjer 3.4. *Za matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *odredite* A^{-1}.

Rješenje. Konstruira se matrica 2×4 tako da se zadanoj matrici s desne strane dopiše jedinična matrica istog reda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Cilj je elementarnim transformacijama nad retcima u lijevom dijelu matrice dobiti jediničnu matricu.
Ako se simultano svaki element prvog retka matrice (4) pomnoži brojem 3 i doda svakom članu drugog reda, dobiva se matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Uočite da je prvi redak u (5) prepisan i da je prvi stupac poput prvog stupca jedinične matrice reda 2. Sada treba drugi redak matrice (5) podijeliti s -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Ako se drugi redak matrice (6), pomnožen brojem 2 doda prvom retku, dobit će se ciljana matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Sada se iz matrice (7) iščitava inverz matrice A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posljednje je izlučivanje radi jednostavnosti zapisa.

Zadatak 3.11. *Odredite inverz matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Provjerite rješenje množenjem matrice i njenog inverza.

Inverznu matricu moguće je dobiti koristeći formulu

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \widetilde{A}^T,$$

gdje je $\widetilde{A}$ matrica algebarskih komplemenata.

Algebarski komplement je broj

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

gdje je M_{ij} **minora** elementa a_{ij} odnosno determinanta matrice koja se iz matrice A dobiva uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Matrica $\widetilde{A}^T$ naziva se **adjungirana matrica** matrice A.

Zadaci.

1. Odredite inverznu matricu matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Odredite inverznu matricu matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

3. Odredite inverznu matricu matrice $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

4. Izračunajte $K \cdot L^{-1} \cdot M^{-1}$ ako je
$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Odredite inverz matrice $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Invertirajte matricu $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Matrici $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ odredite inverz.

Rješenja. 1. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$. 4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
6. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$. 7. $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Matrična jednadžba je jednadžba u kojoj se traži nepoznata matrica. Kod traženja nepoznanice koriste se svojstva množenja matrica i mora se voditi računa o nekomutativnosti množenja matrica.

Zadatak 3.12. *Primjenom prethodnog primjera riješite matričnu jednadžbu:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Matričnu jednadžbu treba zapisati u obliku

$$A \cdot X = B,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix},$$

a X je nepoznata matrica. Koristeći svojstvo inverznih matrica i pazeći na redoslijed, strategija dobivanja nepoznate matrice glasi:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Zadatak se svodi na nalaženje inverzne matrice A^{-1}.

Zadaci.

1. Riješite matričnu jednadžbu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Riješite matričnu jednadžbu $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Riješite matričnu jednadžbu $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

4. Riješite matričnu jednadžbu $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Odredite nepoznatu matricu X iz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

6. Odredite nepoznatu matricu ako je $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Riješite $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$.

Rješenja.

1. Analogno rješenju Zadatka 3.12, $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Budući je sada $XA = B$, slijedi da je $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Iz zapisa $AXB = C$ slijedi $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4. $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

6. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

7. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

3.5 Rang matrice

Linearno nezavisan skup vektora je onaj skup vektora $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ za koji se **linearna kombinacija vektora** $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n$ poništava jedino u slučaju trivijalnog izbora skalara $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Bazični vektori čine linearno nezavisan skup vektora:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linearno nezavisnih vektora može biti najviše onoliko koliko vektori imaju komponenti.

Rang matrice je najveći broj linearno nezavisnih stupaca koji se u tom slučaju smatraju vektorima.

Elementarnim transformacijama nad retcima matrice ne mijenja se rang matrice.

Tehnika određivanja ranga matrice su elementarne transformacije nad retcima matrice. Cilj je dobiti što veći broj stupaca oblika bazičnih vektora.

Primjer 3.5. *Odredite rang matrice* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Elementarnim transformacijama nastoji se dobiti što veći broj bazičnih stupaca. Odluku o bazičnom stupcu donosimo odabirom jedinice. Tako prvi bazični stupac konstruiramo po jedinici na mjestu (2,1) zadane matrice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{rr} \leftarrow + & \\ /\cdot(-2) \nwarrow + & /\cdot(-3) \downarrow + \\ & \swarrow + \\ & \leftarrow + \end{array} .$$

U novoj matrici ponovo biramo stupac koji će postati bazičan nakon elementarnih transformacija. Vodeći element više ne smijemo tražiti u drugom retku! Budući nema više niti jedne jedinice, zgodno je odabrati (-1) na mjestu (4,4).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Množenje posljednjeg retka brojem (-1) daje matricu u kojoj radimo elementarne transformacije.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{rrr} & & \leftarrow + \\ & \leftarrow + & \nwarrow + \\ \leftarrow + & \nwarrow + & \uparrow + \\ /\cdot(-3) \nwarrow + & /\cdot(-1) \uparrow + & /\cdot(-2) \uparrow + \end{array} .$$

Posupak treba ponavljati dok je moguće dobivati nove bazične stupce. Sada je mudro podijeliti treći redak brojem (-6). Uočite da se broj redaka za odabir ključnog elementa suzio na prvi i treći redak.

$$\begin{bmatrix} 0 & -11 & -12 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \\ \\ :(-6) \\ \\ \end{array} .$$

Nova matrica i potrebne elementarne transvormacije dane su u sljedećoj matrici.

$$\begin{bmatrix} 0 & -11 & -12 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{6} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{rr} & \leftarrow + \\ & \nwarrow + \\ /\cdot(-2) \swarrow + & /\cdot 6 \uparrow \\ \leftarrow + & \end{array} .$$

U matrici koja slijedi nemoguće je polučiti novi bazični stupac bez gubitka već postojećeg bazičnog stupca.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Rang matrice jednak je tri ili se kaže da je matrica trećeg ranga.

Zadaci.

1. Odredite rang matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Odredite rang matrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenja. Rang prve matrice je dva, a druge je tri.

3.6 Sustavi linearnih jednadžbi

Pod pojmom sustava linearnih jednadžbi podrazumijevamo dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, tri jednadžbe s tri nepoznanice i tako dalje. U ovom poglavlju su prikazana rješavanja sustava u kojima se broj jednadžbi i nepoznanica ne moraju podudarati.

Linearna jednadžba s nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je izraz

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta,$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ i β poznati brojevi.

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom glasi $a \cdot x = b$ i vrijedi:

- ako je $a \neq 0$, postoji jedinstveno rješenje

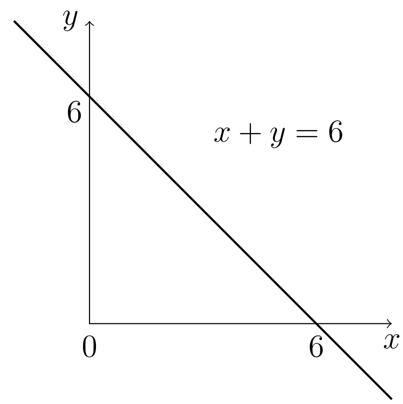
$$\begin{aligned} 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- ako je $a = 0$, a $b \neq 0$, jednadžbu je nemoguće riješiti. Primjerice, ne postoji broj x takav da je $0 \cdot x = 4$.
- ako su $a, b = 0$, tada svaki broj x zadovoljava jednadžbu jer ona glasi $0 \cdot x = 0$.

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice glasi $ax + by = c$ i za $a, b \neq 0$ ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak 3.13. *Nacrtajte u kordinatnoj ravnini x, y sva rješenja jednadžbe $x + y = 6$.*

Rješenje. Neki od parova su $(x, y) = (0, 6), (1, 5)$... Svi se parovi mogu zapisati parametarski: $(x, y) = (t, 6 - t) = (0, 6) + t(1, -1)$ i naglasiti da t može biti bilo koji realan broj. Svi parovi rješenja su nacrtani na slici koja slijedi.



Slika 12: Rješenja jednadžbe $x + y = 6$.

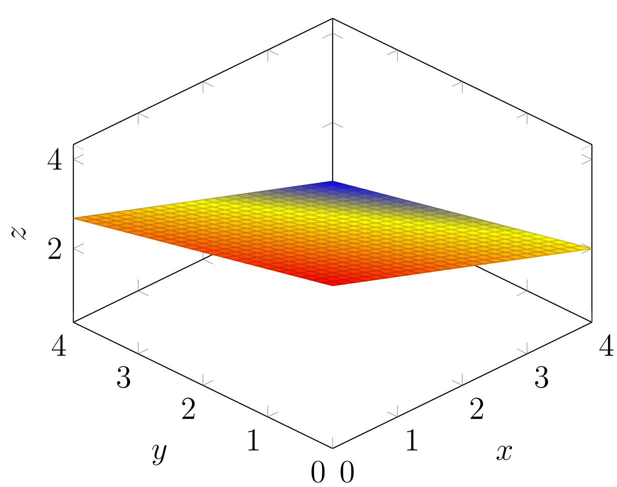
Linearna jednadžba s tri nepoznanice glasi $ax + by + cz = d$ i za $a, b, c \neq 0$ ima beskonačno mnogo rješenja, no ona se generiraju sa dva parametra.

Zadatak 3.14. *Riješite jednadžbu* $3x + 4y + 6z = 24$*.*

Rješenje. Dijeljenjem cijele jednadžbe sva tri rješenja ostaju ista, ali je tada moguće izraziti $x = 8 - \frac{4}{3}y - 2z$. Sada su rješenja uređene trojke

$$(x, y, z) = (8 - \frac{4}{3}t - 2s, t, s) = (8, 0, 0) + t(-\frac{4}{3}, 1, 0) + s(-2, 0, 1),$$

u kojima su s i t bilo koji realni brojevi. Crtanje u tri dimenzije je zahtjevno, a teško odgonetljivo, pa se geometrijski problemi rješavaju analitički.



Slika 13: Rješenja jednadžbe $3x + 4y + 6z = 24$.

Sustav linearnih jednadžbi je konačan skup linearnih jednadžbi. Rješenje sustava koji ima n nepoznanica je uređena n-torka brojeva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

čije uvrštavanje zadovoljava svaku jednadžbu sustava.

Primjer 3.6. *Riješite linearni sustav:*

$$\begin{array}{rcl} x + 3z & = & 15 \\ y + 2z & = & 12 \end{array}.$$

Rješenje. Potrebno je naći sve uređene trojke brojeva koji zadovoljavaju obje jednadžbe. Najjednostavnije je odabrati $z = 0$, iz čega proizlazi $x = 15$ i $y = 12$. Ako je $z = 1$, onda je $x = 12$ i $y = 10$. Tako slijedi da rješenja ima beskonačno mnogo.
Sva rješenja je moguće zapisati u vektorskom, parametarskom obliku nakon što se u svakoj jednadžbi **samostalna nepoznanica** iskaže preko nepoznanice s koeficijentom:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 15 - 3z \\ y & = & 12 - 2z \end{array}$$

Tada je moguć zapis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 3t \\ 12 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdje je t parametar odnosno broj kojeg se izabere po volji.

Napomena 3.1. *Rješenja se mogu ispisati samo ako je sustav u* ***baričnom obliku****:*

- *Svaka jednadžba ima vlastitu* ***baričnu nepoznanicu****:*

Bazična nepoznanica *je nepoznanica koja dolazi samostalno u samo jednoj od jednadžbi sustava.*

Primjer 3.7. *Riješite sustav i napišite dva partikularna rješenja:*

$$\begin{array}{rcl} 4x + 3y - 5z & = & 15 \\ y - 6z & = & 3. \end{array} \tag{8}$$

Rješenje. Niti jedna jednadžba nema **baznu nepoznanicu** odnosno nepoznanicu koja bi se javila samostalno samo u toj jednadžbi i ni u jednoj više. Da bi se rješenja mogla zapisati, potrebno je da **svaka jednadžba obavezno ima svoju baznu nepoznanicu**. Stoga najprije prvu jednadžbu treba podijeliti sa 4:

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}z &= \frac{15}{4} \\ y - 6z &= 3. \end{aligned}$$

Nakon ovog zahvata, prva jednadžba ima baznu nepoznanicu, a druga nema, jer se y javlja i u prvoj jednadžbi. Da bi se y poništio u prvoj jednadžbi, treba drugu jednadžbu pomnoženu s $\left(-\frac{3}{4}\right)$ dodati prvoj jednadžbi. Sustav je sada u baznom obliku:

$$\begin{aligned} x + \qquad \frac{13}{4}z &= \frac{6}{4} \\ y - 6z &= 3. \end{aligned}$$

Analogno prethodnom nakon iskazivanja baznih varijabli, opći oblik rješenja je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} - \frac{13}{4}t \\ 3 + 6t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Partikularna rješenja se dobivaju za bilo koji izbor parametra t. Tako za $t = 0$ rješenje je trojka $x = \frac{6}{4}, y = 3$ i $z = 0$. Za $t = 2$ rješenje je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Rješenja se lagano provjere uvrštavanjem u sustav (8).

Propozicija 3.1. *Sustav rješenja se ne mijenja u smislu promjene rješenja ako se:*

- *bilo koja jednadžba pomnoži ili podijeli brojem koji je različit od nule.*
- *jedna jednadžba pomnožena brojem pribroji bilo kojoj od ostalih jednadžbi.*
- *zamijeni poredak jednadžbi*

Postupak dobivanja baznih varijabli se bitno pojednostavljuje primjenom matrica.

Matrica sustava je matrica koeficijenata koji se nalaze uz nepoznanice u sustavu linearnih jednadžbi.

Proširena matrica sustava je matrica sustava kojoj je dodan stupac slobodnih koeficijenata desnih strana jednadžbi.

Efektivno rješavanje sustava provodi se izvođenjem elementarnih transformacija na retcima proširene matrice sustava.

Primjer 3.8. *Primjenom matrica riješite linearni sustav:* $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 2 \\ 3x - \ y - \ z &= 3. \end{aligned}$

Rješenje. Proširena matrica sustava glasi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & : & 2 \\ 3 & -1 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}.$$

U ovom je sustavu moguće svaku od nepoznanica učiniti baričnom. Ako se odabere da baričan bude x u prvoj jednadžbi, onda su potrebna dva koraka.
U prvom se prva jednadžba dijeli sa 2 i dobiva se sustav:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & : & 1 \\ 3 & -1 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}.$$

U drugom koraku se poništava nepoznanica x u drugoj jednadžbi. Ordinira se prvom i to tako da se prva jednadžba pomnožena s -3 doda drugoj. Pritom se prva jednadžba prepisuje nepromijenjena, a množenje i pribrajanje izvodi se simultano. Na kraju sustav ima matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & : & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

Prva jednadžba ima baričnu nepoznanicu. Da bi sustav bio baričan, potrebno je i u drugoj jednadžbi imati baričnu nepoznanicu. To više ne može biti x nego ili y ili z. Ako se forsira baričan y u drugoj jednadžbi, onda se druga jednadžba dijeli sa $\left(\frac{7}{2}\right)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno treba drugu jednadžbu pomnožiti sa $\left(\frac{3}{2}\right)$ i dodati prvoj:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovime su transformacije gotove jer je ispunjen cilj: sustav je baričan! Sustav zapisan s nepoznanicama sada glasi:

$$\begin{aligned} x - z &= 1 \\ y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Nakon izlučivanja baričnih varijabli

$$\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= 2z, \end{aligned}$$

rješenja su $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Zadaci.

1. Riješite linearni sustav $\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 3 \\ 3x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$.

2. Riješite linearni sustav $\begin{array}{rcl} 2x-3y+4z & = & 5 \\ 6x+7y-8z & = & 9 \end{array}$.

Rješenja.

1. Uz forsiranje y u drugoj i z u prvoj jednadžbi: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6 \\ -1.2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}$.

2. Jedan od zapisa: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Glede egzistencije i jednoznačnosti, sustav može:

1. biti nekonzistentan odnosno nemati rješenje,
2. imati jedinstveno rješenje,
3. imati skup rješenja koji je moguće suvislo zapisati.

Zadatak 3.15. *Sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{array}{rcl} 2x-y+3z & = & 9 \\ 3x-5y+z & = & -4 \\ 4x-7y+z & = & 5 \end{array}$$

napišite u matričnom obliku. Riješite sustav metodom eliminacije. Riješite sustav matrično.

Rješenje. Sustav nema rješenja. Izračunajte determinantu matrice sustava.

Zadatak 3.16. *Metodom eliminacije riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi. Prepisivanje nepoznanica izbjegnite primjenjujući matrice.*

$$\begin{array}{rcl} 2x+y+4z+8t & = & -1 \\ x+3y-6z+2t & = & 3 \\ 3x-2y+2z-2t & = & 8 \\ 2x-y+2z & = & 4 \end{array}$$

Rješenje. Rješenje je jednoznačno: $x=2, y=-3, z=-3/2, t=1/2$

Postoji prirodna veza između rješivosti sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica i regularnosti matrice sustava.

Primjer 3.9. *Izračunajte Lagrangeovim razvojem po četvrtom stupcu determinantu matrice sustava linearnih jednadžbi iz Zadatka 3.8.*

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -8(-2-6-6) + 2(-4-2+4) + 2(-14-28) = \\ &= 112 - 4 - 84 = 24 \neq 0 \end{aligned}$$

Primjer 3.10. *Izračunajte determinantu matrice iz Zadatka 3.15.*

Rješenje. Determinanta matrice sustava jednaka je nuli.

Zadatak 3.17. *Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Rješenje. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Homogeni sustav je onaj sustav kod kojeg su svi slobodni koeficijenti jednaki nuli. Sustav uvijek ima trivijalno rješenje kod kojeg su sve nepoznanice jednake nuli. Neki slučajevi imaju beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak 3.18. *Riješite homogeni linearni sustav*

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{155}{16}x_4 \\ \frac{143}{16}x_4 \\ \frac{39}{16}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \cdot t \cdot \begin{bmatrix} 155 \\ 143 \\ 39 \\ 16 \end{bmatrix}$, gdje t ima ulogu parametra, generatora rješenja. Kažemo da je rješenje jednodimenzionalno.

Napomena 3.2. *Rang matrice sustava u Zadatku 3.18 jednak je 3. Rješenje je u 4-dimenzionalnom prostoru. Dimenzija rješenja je 1 predstavlja defekt matrice sustava. Jednakost da rang i defekt zbrojeni daju broj varijabli je univerzalna činjenica dokazana kao teorem o rangu i defektu.*

Matrični zapis sustava jednadžbi

$$AX = B$$

ima geometrijsko objašnjenje iz tipova matrica:

$$m \times n \cdot n \times 1 = m \times 1.$$

Umnožak AX može se interpretirati kao pridruživanje koje n-dimenzionalnom vektoru X pridružuje m-dimenzionalni vektor B. Ukoliko je $B = 0$, tada tražimo one vektore koje matrica šalje u ishodište m-dimenzionalnog sustava. Defekt matrice je upravo dimenzija skupa takvih vektora.

Zadatak 3.19. *Riješite nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:*

$$\begin{aligned}
2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\
x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\
5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12
\end{aligned}$$

Rješavanjem se u dva retka dobivaju nule. Tako se sustav reducira:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 6 - 26x_3 + 17x_4 \\
x_2 &= -1 + 7x_3 - 5x_4
\end{aligned}$$

Rješenje. Rješenje je 2-dimenzionalno:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.20. *Rješavanjem sustava pokažite da je on nekonzistentan:*

$$\begin{aligned}
3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\
7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\
5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3
\end{aligned}$$

3.7 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Dan je polinom $f(x) = 2x^3 + 4x - 7$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Odredite matricu $f(A^{-1})$.

2. Riješite matričnu jednadžbu $(A - 2E)X = A + E$ ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dok je E jedinična matrica.

3. Riješite sustav Gauss-Jordanovom metodom eliminacije

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7 \end{aligned}$$

4. Zapišite sva rješenja sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

5. Riješite metodom eliminacije varijabli sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

6. Zadan je polinom $f(x) = -81x^2 + 9x - 2$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte $f(A^{-1})$.

7. Simetričnim dijelom matrice A nazivamo matricu

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

Odredite $41A_s^{-1}$ ako je zadana matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

8. Izračunajte $AB^{-1}C$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

9. Izračunajte $A^{-2}B$ gdje su $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ i $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix}$.

10. Riješite matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Riješite matričnu jednadžbu, a potom izračunajte $X \cdot X^T$.

$$X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Zapišite rješenje sustava

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

13. Riješite homogeni sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -15/2 & -19/4 & 0 \\ 7/4 & 9/4 & -37/4 \end{bmatrix}$.

2. $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 12 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3. $x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_4 = -\frac{3}{2}$.

4.
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -15 \\ 18 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

5. Sustav je inkonzistentan.

6. $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $f(A^{-1}) = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

7. $A_s = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $41 \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 12 & 4 \\ 12 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 14 \end{bmatrix}$.

8. $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $AB^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $AB^{-1}C = 5$.

9. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -14 & -5 & 13 \\ 10 & 4 & -8 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^{-2} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 172 & 37 & -155 \\ -116 & -26 & 106 \\ -40 & -13 & 35 \end{bmatrix}$ i
   $A^{-2}B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -613 \\ 422 \\ 157 \end{bmatrix}$.

10. $X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & -18 & -16 \\ -1 & 6 & 4 \\ -6 & 12 & 12 \end{bmatrix}$.

11. $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; $XX^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 37 & 30 \\ -3 & 30 & 27 \end{bmatrix}$.

12. Forsiranje redom x_2, x_1 i x_4 u redom petoj, trećoj i četvrtoj jednadžbi daje da su prve dvije jednadžbe identiteti (nule u prva dva retka matrice). Rješenje u vektorskom obliku je $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{13}{6} \\ 1 \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$.

13. Jedan od mogućih zapisa glasi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 3 \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$.

4 Funkcije jedne realne varijable

Funkcija u širem smislu. Neka su D (domena) i R (kodomena) neprazni skupovi. Ako postoji pravilo koje ***svakom*** elementu skupa D pridružuje ***jedan*** i ***samo jedan*** element skupa R, govori se o ***funkcijskom preslikavanju*** skupa D u skup R ili ***funkciji***:

$$f : D \to R.$$

Uobičajen je zapis

$$y = f(x)$$

gdje je

$x \in D$ - varijabla

$y \in R$ - vrijednost funkcije

$f(x)$ - pravilo koje svakom elementu x pridruži element $y \in R$.

Funkcija u užem smislu. Ako je kodomena skup realnih brojeva R, onda se govori o funkciji u užem smislu i $f(x)$ se naziva **formulom funkcije**. Funkcije u širem smislu nazivaju se **preslikavanjima**.

U ovom se poglavlju proučavaju osobine funkcija jedne realne varijable.

Primjer 4.1 (Apsolutna vrijednost)**.** *Apsolutna vrijednost realnog broja x je funkcija $|x|$ čija je vrijednost definirana formulama:*

$$\begin{cases} x; & za \quad x \geq 0 \\ -x; & za \quad x < 0 \end{cases}$$

Funkcija ima nenegativne vrijednosti bez obzira na $x \in R$.

Zadatak 4.1. *Neka je $f : D \to R$ funkcija zadana formulom*

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Popunite tablicu vrijednostima funkcije na domeni zadanoj tablicom:

x	10	1000	100,000	1.000,000	100.000,000
$f(x)$					

Rješenje. 2.59374, 2.71692, 2.71827, 2.71828, 2.71828 .

4.1 Graf funkcije

Graf funkcije je skup točaka pri čemu je prva koordinata element domene, a druga vrijednost funkcije:

$$\Gamma = \{(x, y);\ x \in D,\ y = f(x)\}.$$

Funkcije opće potencije zadaju se formulom

$$f(x) = x^a,$$

gdje je a fiksan realan broj.

Ako su varijable realni brojevi, graf funkcije je moguće nacrtati u $X0Y$ koordinatnoj ravnini.

Zadatak 4.2. *Nacrtajte grafove sljedećih općih potencija uzimajući za vrijednost varijable brojeve iz zadane domene*

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \tag{9}$$

1. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = 1$
2. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = x$
3. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = x^2$
4. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = x^3$
5. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = x^4$
6. *Funkciju zadanu formulom* $f(x) = x^5$

Prirodna domena funkcije je skup realnih brojeva za koje je moguće izračunati vrijednost funkcije. Ako nije posebno zadana, domena funkcije se mora odrediti.

Zadatak 4.3. *Ispitujući mogućnost računanja funkcije na vrijednostima navedenim u (9), odredite prirodno područje i nacrtajte grafove zadanih funkcija.*

1. *Funkcija je zadana formulom* $f(x) = x^{-1}$.
2. *Nacrtajte graf funkcije zadane formulom* $f(x) = x^{-2}$.
3. *Nacrtajte graf funkcije zadane formulom* $f(x) = x^{-3}$.
4. *Nacrtajte graf funkcije zadane formulom* $f(x) = x^{-4}$.

Rješenje. U svim funkcijama nije moguće izračunati vrijednost funkcije jedino za $x = 0$, tako da domenu tih funkcija čine svi realni brojevi osim broja 0. Zapis: $D = R \setminus \{0\}$.

Zadatak 4.4. *Funkcija je zadana formulom* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. *Uzimajući vrijednosti iz (9), ispitajte domenu i nacrtajte graf funkcije.*

Rješenje. Uzimanjem vrijednosti iz (9) može se primijetiti nemogućnost računanja funkcijske vrijednosti za negativne vrijednosti. Za skicu grafa treba za x uzeti toliko vrijednosti koliko je potrebno za nacrtati graf, primjerice: $\{0, 1, 4, 9, 16....\}$. Ovo je dobro poznata funkcija drugog korijena $\sqrt{x}$ i njen je graf široko dostupan.

Eksponencijalna funkcija je oblika

$$f(x) = a^x,$$

gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$. Domenu funkcije čine svi realni brojevi, dok slici funkcije pripadaju samo pozitivni brojevi

$$R(f) =< 0, +\infty > .$$

Posebno se može istaknuti **prirodna** eksponencijalna funkcija

$$f(x) = e^x$$

gdje je iracionalni broj $e = 2.71828...$ baza prirodnog logaritma.

Zadatak 4.5. *Nacrtajte graf funkcije*

$$y = 2^x$$

uzimajući za istaknute vrijednosti argumenta brojeve iz skupa $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Zadatak 4.6. *Nacrtajte graf funkcije* $y = e^x$ *uzimajući za istaknute vrijednosti argumenta brojeve iz skupa* $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Zadatak 4.7. *Analogno primjeru (4.6) nacrtajte graf funkcije* $f(x) = 10^x$ *uzimajući vrijednosti funkcije za* $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Zadatak 4.8. *Uzimajući vrijednosti* x*-a iz (9), odredite domenu pa nacrtajte graf funkcije* $y = \log x$. *Odredite domenu funkcije.*

Rješenje. Uzimajući negativne vrijednosti, uočava se nemogućnost određivanja funkcije $\log x$. Niti za $x = 0$, vrijednost se ne može dobiti. Za $x \in \{1, 2, 3\}$ vrijednosti je moguće dobiti, ali se ne dobiva jasna slika.
Za dobru skicu, potrebno je uzeti vrijednosti $x \in \{0.5, 0.2, 0.1, 0.01\}$, kao i $x \in \{10, 100\}$. Sada je moguće zaključiti da je skala na osi x vrlo velika, dok je raspon y-a mali. U praksi se kod prikaza skala visokih raspona uzimaju logaritmi njihovih vrijednosti.
Domena funkcije je skup pozitivnih brojeva: $D =< 0, +\infty >= R^+$

Zadatak 4.9. *Odredite domenu i nacrtajte graf funkcije* $y = \ln x$.

Rješenje. Domena je $D = R^+$.

Opća logaritamska funkcija zadana je formulom

$$f(x) = \log_a x$$

pri čemu vrijedi $x = a^y$ ako i samo ako je $y = \log_a x$.

Vrijedi:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a},$$

gdje su

- $\log x = \log_{10} x$: Briggsov logaritam po bazi 10 poznat iz logaritamskih tablica i
- $\ln x = \log_e x$: prirodni logaritam koji za bazu ima e.

Zadatak 4.10. *Nacrtajte graf funkcije*

$$y = \log_2 x$$

uzimajući istaknute vrijednosti iz domene: $\{1, 2, 4, 8, 16, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$.

Zadatak 4.11. *Nacrtajte graf funkcije*

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

uzimajući istaknute vrijednosti iz domene: $\{1, 2, 4, 8, 16, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$.

Trigonometrijske funkcije primjenjuju se u opisu periodičkih pojava. Četiri su osnovne trigonometrijske funkcije: sinus, kosinus, tangens i kotangens.

Domena funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$ je cijeli skup realnih brojeva.

Radijani. U računanju trigonometrijskih funkcija koriste se radijani. Tada se mogu crtati grafovi funkcija u standardnom $X0Y$ koordinatnom sustavu.

Zadatak 4.12. *Nacrtajte funkciju* $y = \sin x$ *uzimajući vrijednosti naznačene u skupu koji je dio domene:*

$$x \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\}$$

Rješenje. Nakon crtanja, važno je uočiti karakteristični oblik sinusoide kojoj je period 2π, početna faza u $x = 0$ i amplituda $A = 1$. Graf ima jedan brijeg i jedan dol i produljuje se u istom ritmu na obje strane.

Zadatak 4.13. *Nacrtajte graf funkcije* $y = \cos x$.

Rješenje. Uzeti vrijednosti
$x \in \{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\}$. Primijetite da je graf funkcije $y = \cos x$ sinusoida s početkom u $x_0 = \frac{-\pi}{2}$, amplitudom $A = 1$ i periodom $T = 2\pi$.

Vrijedi uvijek adiciona formula $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Zadatak 4.14. *Nacrtajte graf funkcije* $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje. Graf funkcije je sinusoida s početkom u $x_0 = \frac{-\pi}{6}$, traje periodom $T = \frac{2\pi}{2}$ i ima amplitudu $A = 3$.

Funkcija tangens zadana je formulom $y = tgx$ i ima prekide:

$$D(tg) = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}.$$

Zadatak 4.15. *Nacrtajte funkciju $y = tgx$ uzimajući vrijednosti $x \in \{0, 0.524, 0.785, 1.047, 1.5, 1.57\}$, a zatim i njima suprotne vrijednosti.*

Funkcija kotangensa $y = ctgx$ ima prekide:

$$D(ctg) = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}.$$

Vrijedi:

$$ctgx = \frac{1}{tgx}.$$

Ciklometrijske funkcije inverzi su glavnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

Prirodna domena funkcija $\arcsin x = \sin^{-1} x$ i $\arccos x = \cos^{-1} x$ su realni brojevi $-1 \leq x \leq 1$ ili $D = [-1, 1]$.

Zadatak 4.16. *Graf funkcije $y = \arcsin x$ konstruirajte na milimetarskom papiru uzimajući istaknute vrijednosti za argumente:*

$$\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}.$$

Zadatak 4.17. *Nacrtajte graf funkcije $y = \arccos x$ na milimetarskom papiru uzimajući istaknute vrijednosti za argumente:*

$$\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}.$$

Zadatak 4.18. *Na milimetarskom papiru nacrtajte graf funkcije*

$$y = arctgx$$

uzimajući za argumente:

$$x \in \{-100, -10, -\sqrt{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}, 10, 100\}.$$

4.2 Domena, slika, parnost funkcije

Domena funkcije u ovom je poglavlju skup $D \subseteq R$ kojeg čine svi oni realni brojevi za koje je moguće dobiti vrijednost funkcije.

Ograničenja kod računanja su uvjeti pod kojima se mogu računati elementarne funkcije.

Konkretno postoji nekoliko ograničenja koja se mogu sistematizirati:

a) ne smije se dijeliti nulom

$$f(x)=\frac{b(x)}{n(x)} \Rightarrow n(x)\neq 0. \tag{10}$$

b) parni korijeni ne mogu imati negativan argument

$$\text{Ako je } n\in N \text{ i } f(x)=\sqrt[2n]{a(x)} \Rightarrow a(x)\geq 0. \tag{11}$$

c) logaritmirati je moguće samo pozitivne vrijednosti

$$f(x)=\log v(x) \Rightarrow v(x)>0. \tag{12}$$

c) ciklometrijska ograničenja za arcsin i arccos:

$$f(x)=\arccos w(x) \text{ ili } f(x)=\arcsin w(x) \Rightarrow -1\leq w(x)\leq 1. \tag{13}$$

d) tangens ima prekide redom u $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$, odnosno kotangens u $k\pi,\ k\in Z$.

Zadatak 4.19. *Odredite domenu funkcije*

$$f(x)=\frac{x-2}{2x-1}.$$

Rješenje. Zbog (10) nužno

$$2x-1\neq 0.$$

Rješenje nejednadžbe je interval na brojevnom pravcu. Granice intervala se dobivaju izjednačavanjem

$$2x-1=0.$$

Jedina je granica $x=\frac{1}{2}$ i ta granica dijeli brojevni pravac na dva intervala:

x	$-\infty$	$<-\infty,\frac{1}{2}>$	$\frac{1}{2}$	$<\frac{1}{2},+\infty>$	$+\infty$
$f(x)$	?	OK	?	OK	?

Domena funkcije su brojevi oba intervala:

$$D(f)=<-\infty,1/2>\cup<1/2,+\infty>=R\setminus\{\frac{1}{2}\}.$$

Zadatak 4.20. *Odredite domenu funkcije*

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1}.$$

Rješenje. Funkcija je definirana za $x-1\neq 0$ i za $1+x>0$ Domena je unija intervala:

$$D=<-1,1>\cup<1,\infty>=<-1,+\infty>\setminus\{1\}.$$

Zadatak 4.21. *Odredite domenu funkcije*

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$$

Rješenje. Prvi pribrojnik definiran je u slučaju $1-2x \geq 0$, što povlači $1 \geq 2x$ i $x \leq \frac{1}{2}$.
Drugi pribrojnik definiran je za

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & \frac{3x-1}{2} & \leq 1| \cdot 2 \\ -2 \leq & 3x-1 & \leq 2| + 1 \\ -1 \leq & 3x & \leq 3| : 3 \\ -\dfrac{1}{3} \leq & x & \leq 1. \end{array}$$

Domena funkcije je interval koji se dobije kao presjek oba intervala

$$D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Uglate zagrade znače da se za $x = \frac{-1}{3}$ i za $x = \frac{1}{2}$ može izračunati vrijednost funkcije.

Zadatak 4.22. *Odredite domenu funkcije*

$$y = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1}.$$

Rješenje. Nazivnik ne smije biti jednak nuli pa je očito da mora biti $x \neq 1$.
Drugi korijeni mogu se vaditi samo iz nenegativnih brojeva pa mora vrijediti

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

Izraz pod korijenom može biti pozitivan, negativan ili nula. Prvo se izračunaju vrijednosti x za koje je

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ x_1 = 3, \quad x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Predznak trinoma $x^2 - 5x + 6$ analizira se pomoću nultočaka koje na brojevnom pravcu određuju tri intervala:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & <-\infty, 2> & 2 & <2, 3> & 3 & <3, +\infty> & +\infty \\ x^2-5x+6 & ? & + & 0 & - & 0 & + & ? \end{array}$$

Na nekim intervalima izraz pod korijenom je pozitivan, a na nekima negativan. Ispitivanje se vrši izborom bilo koje točke promatranog intervala.
Testiranje intervala daje rješenje nejednadžbe $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ u zapisu unije intervala

$$(-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

Ako se uvaži zahtjev $x \neq 1$, dobiva se domena

$$D = (-\infty, 1) \cup (1, 2] \cup [3, +\infty)$$

gdje obična zagrada uz granicu intervala znači da domena ne sadrži rubnu točku, dok uglata zagrada potvrđuje da rubna točka smije biti uvrštena u formulu funkcije.

Zadatak 4.23. *Odredite domenu funkcije*

$$y = \ln(1 + e^{-x}).$$

Rješenje. Prirodni logaritam računa se samo za pozitivne brojeve:

$$1 + e^{-x} > 0$$

što je ispunjeno za svaki realan broj x pa je $D = R$.

Zadatak 4.24. *Odredite domenu funkcije*

$$y = \arcsin(\ln x).$$

Rješenje. Prvi je uvjet $x > 0$ radi računanja logaritma. Drugi je uvjet

$$-1 \leq \ln x \leq 1$$

zbog domene arkus sinusa. Budući je eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ monotono rastuća, vrijedi

$$e^{-1} \leq e^{\ln x} \leq e,$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

Domena funkcije tako je

$$D = \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

budući su svi brojevi iz intervala pozitivni.

Zadatak 4.25. *Odredite domenu funkcije*

$$y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)].$$

Rješenje. Prvi je uvjet

$$x^2 - 5x + 16 \geq 0.$$

Jednadžba $x^2 - 5x + 16 = 0$ nema realnih nultočaka

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 64}}{2}$$

pa ili svi brojevi zadovoljavaju nejednadžbu ili niti jedan. Provjerom $x = 0$ zadovoljena je nejednadžba

$$0^2 - 5 \cdot 0 + 16 > 0,$$

stoga nejednadžbu zadovoljava svaki realan broj. Drugi uvjet je

$$1 - \log(x^2 - 5x + 16) > 0$$

radi računanja logaritma. Rješavanje nejednadžbe

$$\begin{aligned} 1 - \log(x^2 - 5x + 16) &> 0 \\ \log(x^2 - 5x + 16) &< 1 \\ \log(x^2 - 5x + 16) &< \log 10, \end{aligned}$$

uz uvažavanje logaritma kao rastuće funkcije, nejednadžba prelazi u

$$\begin{gathered} x^2 - 5x + 16 < 10 \\ x^2 - 5x + 6 < 0. \end{gathered}$$

Rješavanje se svodi na nalaženje nultočaka

$$\begin{gathered} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x_1 = 2, \quad x_2 = 3 \end{gathered}$$

i testiranje intervala

$$\langle -\infty, 2\rangle\ ;\ \langle 2, 3\rangle;\ \langle 3, \infty\rangle,$$

od kojih jedino točke

$$x \in \langle 2, 3\rangle$$

zadovoljavaju nejednadžbu i to je ujedno domena zadane funkcije. Napisane zagrade imaju značaj otvorenih zagrada.

Zadatak 4.26. *Odredite domenu funkcije*

$$y = -\frac{x}{4 - x^2} + \ln(x^3 - x).$$

Rješenje. Prvi pribrojnik definiran je za

$$x \neq \pm 2.$$

Drugi pribrojnik je definiran na rješenju nejednadžbe

$$x^3 - x > 0.$$

Rješavanje nejednadžbe svodi se na rješavanje jednadžbe

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x(x - 1)(x + 1) &= 0 \\ x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 &= -1 \end{aligned}$$

i ispitivanje podobnosti intervala:

$$(-\infty, -1) \quad (-1, 0) \quad (0, 1) \quad (1, +\infty).$$

Konačno, uz uvažavanje svih uvjeta, domena je

$$D = (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Zadatak 4.27. *Ispitajte domenu funkcije*

$$y = \ln \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}.$$

Rješenje. Drugi pribrojnik može se računati za

$$x \in [-4, 4].$$

Prvi pribrojnik definiran je za rješenja nejednadžbe

$$\begin{aligned} \sin(x-3) &> 0 \\ 0 + 2k\pi \leq x - 3 \leq \pi + 2k\pi| + 3, &\qquad k \in Z \\ 3 + 2k\pi \leq x \leq 3 + \pi + 2k\pi, &\qquad k \in Z. \end{aligned}$$

Beskonačno mnogo intervala realnih brojeva zadovoljava nejednadžbu, no samo za $k = 0$ interval

$$(3, 3+\pi)$$

i za $k = -1$ interval

$$(3-2\pi, 3-\pi)$$

imaju zajedničkih elemenata sa segmentom

$$[-4, 4].$$

Konačno rješenje je unija intervala:

$$x \in (3-2\pi, 3-\pi) \cup (3, 4].$$

Zadatak 4.28. *Odredite područje u kojem je definirana funkcija*

$$y = \sqrt{3 - \log_2(x-1)}.$$

Rješenje. Logaritam je definiran samo za pozitivne brojeve pa

$$x - 1 > 0$$

povlači prvi uvjet na varijablu x:

$$x \in (1, +\infty).$$

Drugi je zahtjev na računanje parnih korijena:

$$\begin{aligned} 3 - \log_2(x-1) &\geq 0 \\ \log_2(x-1) &\leq 3 \\ \log_2(x-1) &\leq \log_2 8 \\ x - 1 &\leq 8 \\ x &\leq 9. \end{aligned}$$

Oba uvjeta zadovoljavaju točke poluotvorenog intervala

$$(1, 9]$$

i to je područje na kojem je funkcija definirana.

Zadatak 4.29. *Odredite domenu funkcije*

$$y = x^{\frac{1}{x}} + arctg \ln(x^2 + 1).$$

Rješenje. Prvi pribrojnik je moguće računati kao

$$e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

i stoga je potrebno da x bude pozitivan broj. Logaritam u drugom pribrojniku moguće je računati za svaki realan broj budući je

$$x^2 + 1 > 0, \qquad \forall x \in R.$$

Arkus-tangens moguće je definirati na cijelom R. Konačno

$$D = (0, \infty).$$

Zadatak 4.30. *Odredite domenu funkcije*

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 4x + 3}}.$$

Rješenje. Domena se radi drugog korijena podudara s rješenjem nejednadžbe:

$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 4x + 3} \geq 0.$$

Rješavanje je najjednostavnije nalaženjem nultočaka brojnika: $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$, a zatim i nazivnika:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}; \quad x_3 = 1, x_4 = 3,$$

nakon čega slijedi ispitivanje intervala

$$(-\infty, -1); \quad (-1, 1); \quad (1, 3); \quad (3, +\infty).$$

Ispituju se u proizvoljno odabranim vrijednostima iz svakog intervala:

- za $x = -2$
$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 4x + 3} < 0$$
pa interval $(-\infty, -1)$ nije u domeni
- za $x = 0$
$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 4x + 3} > 0$$
i interval $[-1, 1)$ dio je domene, a vrijednost $x = 1$ isključena je radi nazivnika,
- za $x = 2$
$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 4x + 3} < 0$$
i interval nije dio domene.

Konačno, domena je

$$D = [-1, 1).$$

Slika funkcije je skup vrijednosti koje funkcija može poprimiti. Oznaka za sliku odnosno kodomenu je

$$R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}.$$

Zadatak 4.31. *Odredite sliku funkcija*

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$,

2. $f(x) = 2 + 3 \sin x$.

Rješenja. Analiziraju se moguća ograničenja u smislu najmanje i najveće vrijednosti funkcije. Ako je nemoguće odrediti najmanju i najveću vrijednost koju formula može poprimiti, onda je $R = \mathbb{R}$.

1. Izlučivanjem potpunog kvadrata iz formule

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$$

dobiva se izraz u kojem se od uvijek pozitivne vrijednosti $(x-3)^2$ oduzima 4. Najmanja moguća vrijednost funkcije je -4, dok najveća ne postoji:

$$R(f) = [-4, +\infty > .$$

2. Budući je

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

množenjem s tri i dodavanjem 2 svakoj strani složene nejednakosti dobiva se

$$-1 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5,$$

pa je konačno

$$R(f) = [-1, 5].$$

Periodička funkcija Funkcija $f(x)$ naziva se ***periodičkom*** ako postoji pozitivni realni broj T zvani ***period*** funkcije koji ima svojstvo da za svaki broj x iz domene vrijedi

$$f(x + T) = f(x).$$

Najmanji pozitivni realni broj τ s navedenim svojstvom naziva se ***temeljnim periodom***.

Trigonometrijske funkcije primjeri su periodičkih funkcija. Funkcije sinus i kosinus imaju period $2k\pi, k \in Z$, a tangens i kotangens imaju period $k\pi, k \in Z$.

Zadatak 4.32. *Odredite osnovni period funkcija*

1. $f(x) = \cos 8x$,

2. $f(x) = \sin x + tg4x$.

Rješenja.

1. Period T nalazi se po definiciji:

$$\begin{aligned}
\cos 8(x+T) &= \cos 8x \\
8(x+T) &= 8x + 2\pi \\
8x + 8T &= 8x + 2\pi \\
T &= \frac{2\pi}{8} \\
T &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. Temeljni period prvog pribrojnika je 2π, a drugog $\frac{\pi}{4}$ pa je temeljni period funkcije najmanji zajednički višekratnik 2π i $\frac{\pi}{4}$ što ispada 2π.

Parnost funkcije. Funkcija $f(x)$ je **parna** ako ne mijenja vrijednost uvrštavanjem suprotnih brojeva

$$f(-x) = f(x),$$

a **neparna** je ako pri uvrštavanju suprotnih brojeva, vrijednost funkcije mijenja predznak, tj.

$$f(-x) = -f(x).$$

Većina funkcija nije **niti parna, niti neparna,** no svaku je funkciju moguće napisati kao zbroj parne i neparne funkcije

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Zadatak 4.33. *Ispitajte parnost i neparnost sljedećih funkcija:*

1. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$

2. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

3. $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$

4. $f(x) = x^2 + 5x$

5. $f(x) = \log \frac{x+3}{x-3}$

Rješenja.

1. Uvrštavanjem $-x$ umjesto x, dobiva se neparna funkcija:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x) \\ &= x^2\cdot(-\sqrt[3]{x})-2\sin x \\ &= -x^2\sqrt[3]{x}-2\sin x \\ &= -(x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

2. Analognim računom dobiva se parnost:

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^{x}=f(x).$$

3. Račun ponovo pokazuje parnost:

$$f(-x)=|-x|-5e^{(-x)^2}=|x|-5e^{x^2}=f(x).$$

4. Provjera parnosti glasi:

$$f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x,$$

   pa funkcija nije niti parna jer je $f(x)\neq f(-x)$, a niti neparna jer je $f(-x)\neq -f(x)$.

5. Funkcija je neparna:

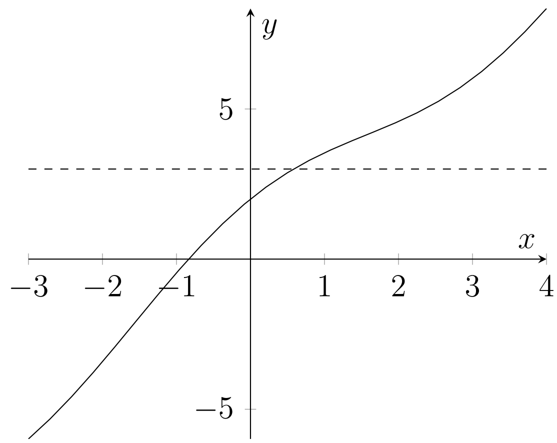
$$\begin{aligned} f(-x) &= \log\frac{-x+3}{-x-3}=\log\frac{-(x-3)}{-(x+3)} \\ &= \log\frac{x-3}{x+3}=\log\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} \\ &= -\log\frac{x+3}{x-3} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

4.3 Grafovi realnih funkcija. Osobine preslikavanja

Realna funkcija je funkcija kojoj su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Graf funkcije zadane formulom $f(x)$ je krivulja $y=f(x)$ u koordinatnoj $X0Y$ ravnini iz koje se zorno mogu uočiti osobine funkcije.

Parna funkcija ima graf simetričan u odnosu na os y. Primjeri parnih funkcija su: $y=x^2$, $y=|x|$, $y=\cos x$.

Neparnoj funkciji graf je centralno simetričan obzirom na ishodište. Primjeri neparnih funkcija su: $y=x^3$, $y=x^3+x$, $y=x^3-x$, $y=\sin x$, $y=tgx$.



Slika 14: $y = 2x + 1 + \cos x$

Rastuća funkcija većem argumentu x pridružuje veću vrijednost:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Iz grafa se vidi da je $y = e^x$ primjer rastuće funkcije. Rastuće su još $y = lnx$, $y = \frac{2}{3}x + 1$ i $y = \sqrt{x}$.

Padajuća funkcija većem argumentu pridružuje manju vrijednost:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Primjer elementarne padajuće funkcije je $y = ctgx$, ali padajuće su i funkcije $y = -\frac{2}{3}x + 2$, $y = e^{-x}$, te $y = \dfrac{12}{x}$.

Ograničena je ona funkcija kojoj je slika $R(f) = \{f(x), x \in D\}$ ograničen skup, u smislu da postoje realni brojevi m i M takvi da je za svaki x iz domene funkcije ispunjeno

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Primjeri ograničenih funkcija su $y = \sin x$ i $y = \cos x$. Ograničene funkcije su i $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$ i $y = arcctgx$.

Injektivna funkcija različitim elementima domene ne može pridužiti iste vrijednosti funkcije:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

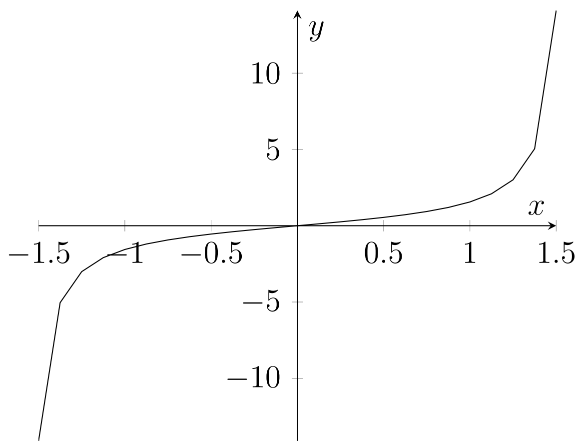
Primjer injektivne funkcije je funkcija zadana formulom $y = 2x + 1 + \cos x$. Graf injektivne funkcije s horizontalnim pravcem ima samo jednu točku presjeka.

Surjekcija je ona funkcija kod koje se podudaraju slika i kodomena. Za takve funkcije

$$f : X \to Y$$

uobičajeno je govoriti da predstavljaju preslikavanja skupa X na skup Y. Primjer surjektivne funkcije je $y = \log x$. Funkcija $y = tgx$ također je surjektivna.

Graf surjektivne funkcije uvijek ima presjek s pravcima paralelnima osi apscisa.



Slika 15: $y = \tan x$

Bijekcija je funkcija koja ima svojstvo injektivnosti i surjektivnosti. Bijekcija je funkcija

$$tg : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rangle \to R.$$

Bijekcije su moguće samo u slučaju da domena i kodomena imaju jednak broj elemenata. Ako je između dva skupa moguća bijekcija, onda su oni jednakobrojni.

4.4 Konstrukcije grafova realnih funkcija

Graf polinoma do najviše prvog stupnja je pravac. Grafovi polinoma višeg stupnja su parabole. Grafovi racionalnih funkcija su hiperbole. Crtaju se nalaženjem karakterističnih točaka: sjecišta s koordinatnim točkama, rubova domene...

Zadatak 4.34. *Konstruirajte graf funkcije*

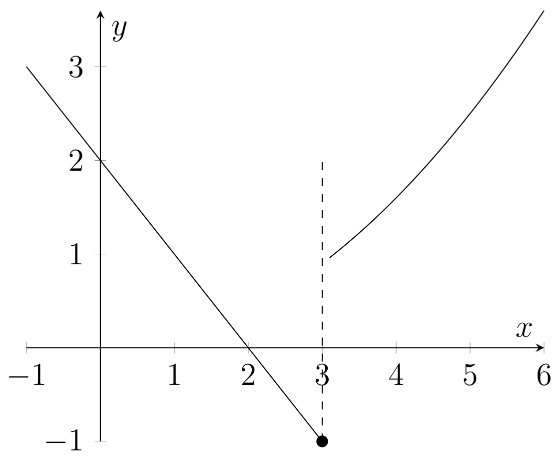
$$y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 3 \\ 0.1x^2, & x > 3 \end{cases} \tag{14}$$

Rješenje. Lijevo od $x = 3$ graf funkcije je pravac i točka $(3, -1)$ pripada pravcu. Desni dio grafa je dio parabole. Funkcija ima prekid.

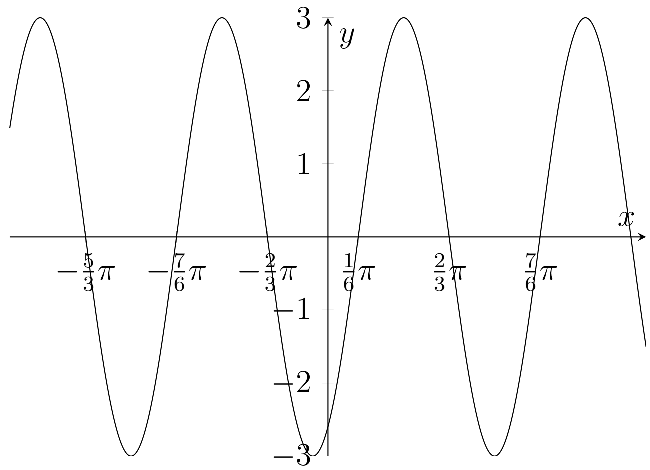
Sinusoida je krivulja koja opisuje pojave koje se periodički mijenjaju, a karakterističnog je valnog izgleda. Karakterizira je početak periode, završetak periode i sredina periode u kojima je vrijednost funkcije nula. Prva četvrtina periode poprima prvu vrijednost amplitude, a posljednja četvrtina drugu, suprotnu vrijednost periode. Uvriježeno je jednu vrijednost amplitude zvati brijegom, a drugu dolom vala.

Zadatak 4.35. *Konstruirajte graf funkcije*

$$y = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{3}).$$



Slika 16: Graf funkcije zadane u (14).



Slika 17: $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje. Prikazano je sinusoidom na slici
Sinusoida ima amplitudu $A = 3$. Period sinusoide je

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Početak jedne od perioda sinusoide je rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} 2x_1 - \frac{\pi}{3} &= 0 \\ x_1 &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Završetak periode tada je

$$x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$

Sredina periode je

$$x_2 = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Prva amplituda dostiže se u točki $x_3 = \dfrac{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{5\pi}{12}$ i iznosi 3. Druga amplituda je u $x_3 = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}}{2} = \dfrac{11\pi}{12}$ i iznosi -3.

Zadaci.

1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte redom grafove $y = x^2$, $y = (x-1)^2$ i $y = x^2 - 4$.

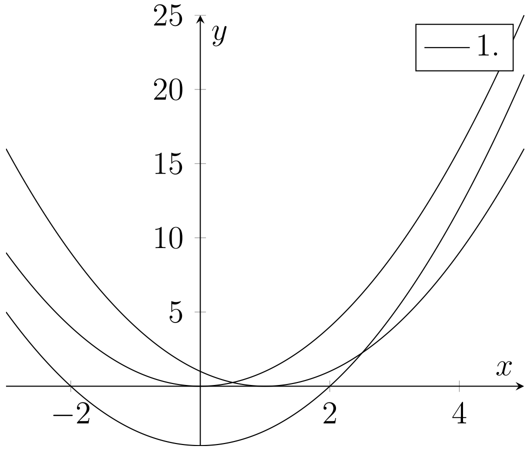
2. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $y = x^3$, $y = (x-1)^3$, $y = x^3 + 2$ i $y = |x^3|$.

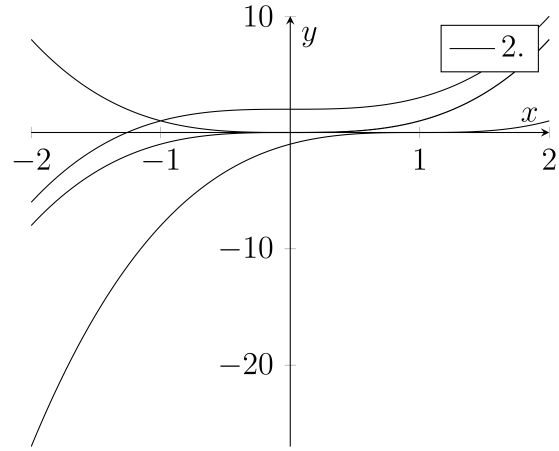
3. Odredite domenu i nacrtajte graf funkcije
$$y = \frac{2-x}{1+x}.$$

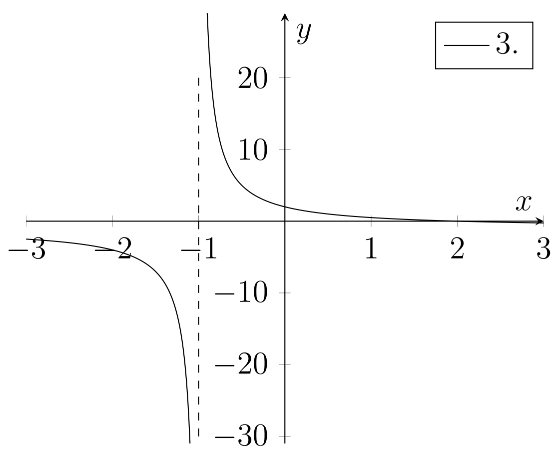
4. Konstruirajte grafove sljedećih funkcija:

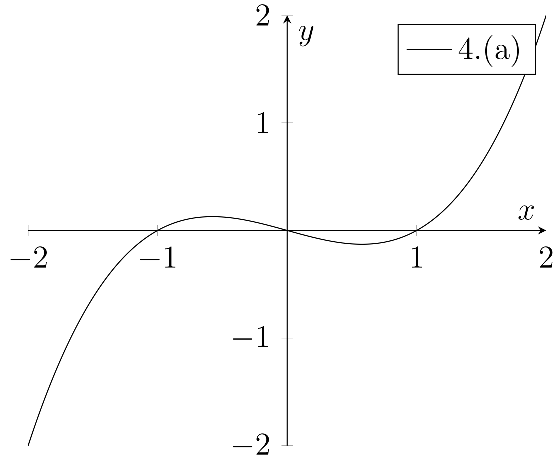
   (a) $y = \dfrac{x^3 - x}{3}$ na zatvorenom intervalu $[-2, 2]$,
   (b) $y = x^2(2-x)^2$ na zatvorenom intervalu $[-1, 3]$,
   (c) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ na domeni funkcije,
   (d) $y = 0.5x + 2^{-x}$ na zatvorenom intervalu $[0, 5]$,
   (e) $y = \dfrac{1}{x^2+4}$,
   (f) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$,
   (g) $y = 4\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$,
   (h) $y = -2\cos(2x+1)$,
   (i) $y = \arcsin(x-2)$ na maksimalnoj domeni,
   (j) $y = x + 1 + \sin(x-1)$,
   (k) $y = \sin x + \cos x$,
   (l) $y = \begin{cases} -x^2; & x < 0 \\ 3x; & x \geq 0 \end{cases}$
   (m) $y = \begin{cases} 4-x; & x < -1 \\ 5; & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+5; & x > 0 \end{cases}$

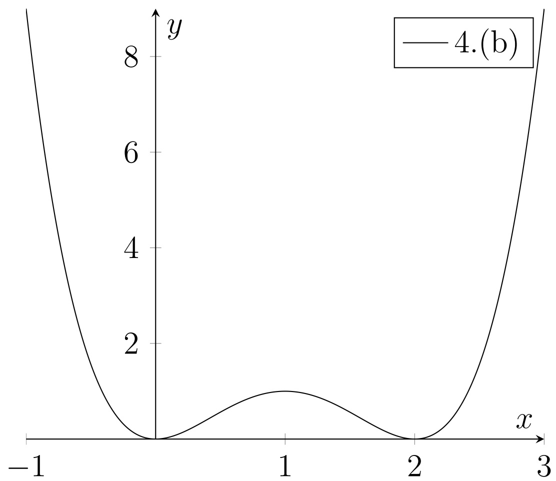
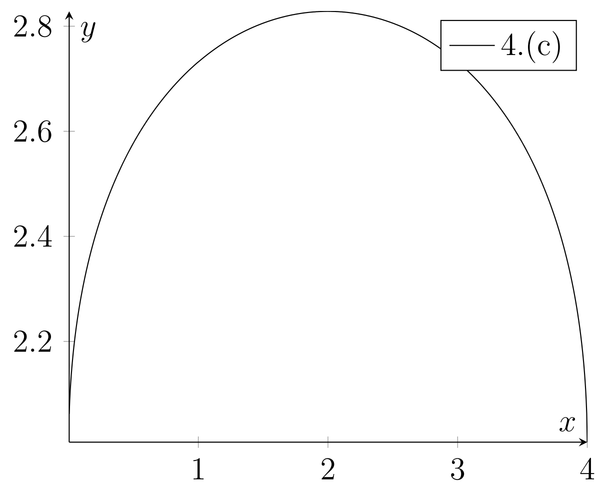
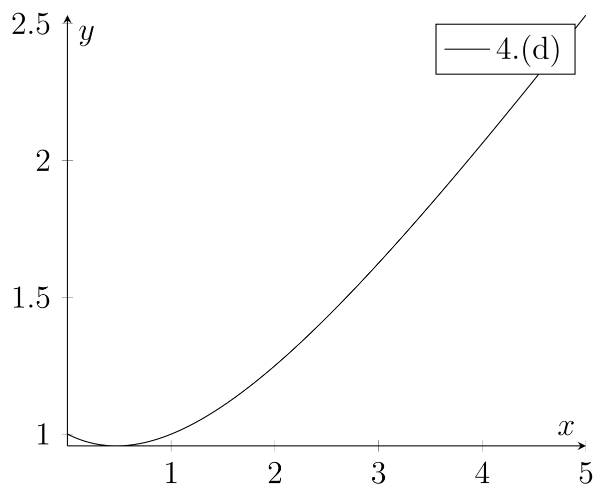
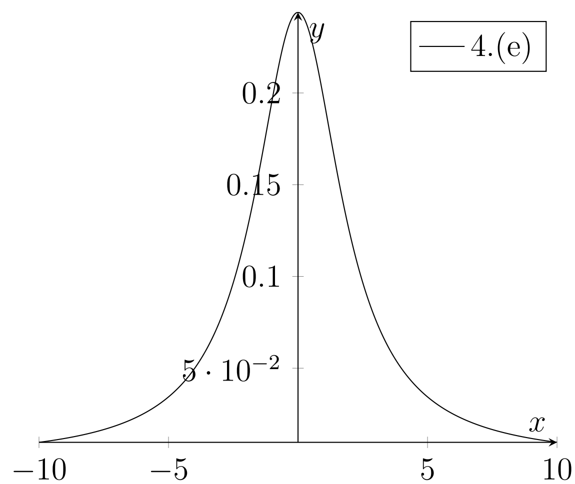
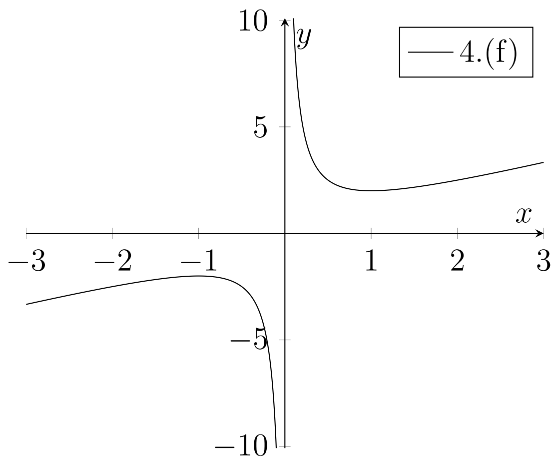
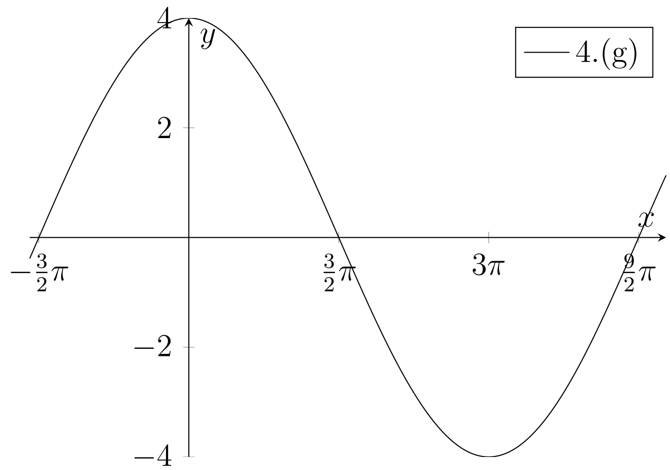
Rješenja.

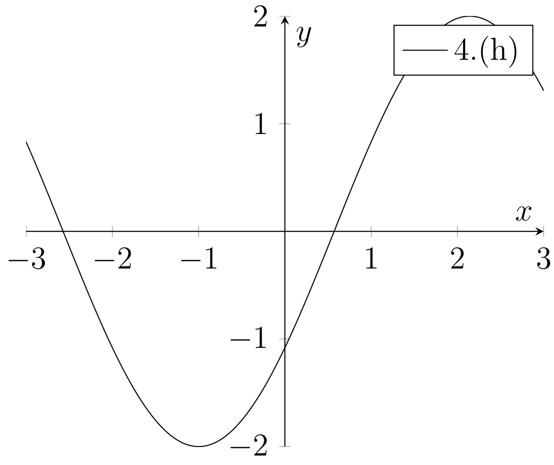

1.
y
x
25
20
15
10
5
−2
2
4

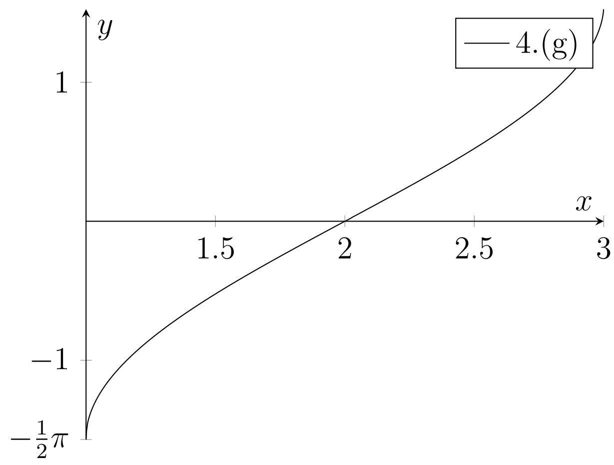

2.
y
x
10
−10
−20
−2
−1
1
2


3.
y
x
20
10
−10
−20
−30
−3
−2
−1
1
2
3


4.(a)
y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2


4.(b)
y
x
8
6
4
2
−1
1
2
3

4.(c)
y
x
2.8
2.6
2.4
2.2
1
2
3
4

4.(d)
y
x
2.5
2
1.5
1
1
2
3
4
5

4.(e)
y
x
0.2
0.15
0.1
5 · 10^−2
−10
−5
5
10

4.(f)
y
x
10
5
−5
−10
−3
−2
−1
1
2
3

4.(g)
y
x
4
2
−2
−4
−3/2 π
3/2 π
3π
9/2 π





4.5 Operacije s funkcijama. Kompozicija funkcija.

Funkcije jedne realne varijable zadane formulama $f(x)$ i $g(x)$ mogu se zbrajati

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

oduzimati

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

množiti

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

i dijeliti

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

Kompozicija funkcija $f(x)$ i $g(x)$ u oznaci

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

moguća je samo u slučaju da je slika funkcije $f(x)$ sadržana u domeni funkcije $g(x)$.

Identiteta je funkcija zadana formulom

$$i(x) = x$$

i ima svojstvo da je

$$i \circ f = f \circ i = f.$$

Inverzna funkcija funkcije $f(x)$ je funkcija u oznaci $f^{-1}(x)$ sa svojstvom

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i,$$

gdje je i identiteta. Samo bijekcije imaju inverzne funkcije. I inverzne funkcije su bijekcije.

Funkcije $y = lnx, \quad ln : (0, +\infty) \to R$ i $y = e^x, \quad e^{()} : R \to (0, +\infty)$ primjeri su inverznih funkcija.

Definiciji funkcije $\arcsin x$ prethodi definicija funkcije glavnih vrijednosti sinusa

$$\begin{aligned} Sin &: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ Sin(x) &= \sin x, \end{aligned}$$

pa je

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Analogno se definiraju funkcije arccos i $arctg$.

Zadatak 4.36. *Ako je $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $g(x) = -\pi x$, koliko je $(f \circ g)(-113)$?*

Rješenje.
Uvrštavanjem u formulu dobije se

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-\pi \cdot (-113)) = f(113\pi) = \cos \frac{113\pi}{2} = 0.$$

Zadatak 4.37. *Odredite kompozicije $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$ za funkcije*

1. $f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = x + 3$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \quad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
3. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 1$

Rješenje.

1. $$\begin{array}{ccccccccc} (f \circ g)(x) & = & f(g(x)) & = & f(x+3) & = & 2(x+3) - 3 & = & 2x + 3 \\ (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) & = & g(2x-3) & = & 2x - 3 + 3 & = & 2x \\ (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & = & f(2x-3) & = & 2(2x-3) - 3 & = & 4x - 9 \\ (g \circ g)(x) & = & g(g(x)) & = & g(x+3) & = & x + 3 + 3 & = & x + 6 \end{array}$$

2. $(f \circ g)(x) = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{6}$, $(g \circ f)(x) = -\dfrac{1}{3}x - 1$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$,
   $(g \circ g)(x) = \dfrac{4}{9}x - \dfrac{25}{9}$.

3. $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$, $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$, $(f \circ f)(x) = 4x + 3$, $(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$.

Zadatak 4.38. *Za realne funkcije $f(x) = |x|$ i $g(x) = \log_2 x$ odredite kompoziciju $f \circ g$. Nacrtajte graf dobivene funkcije.*

Rješenje. Kompozicija $(f \circ g)(x) = |\log_2 x|$ ima graf funkcije $y = |\log_2 x|$ smješten u prvom kvadrantu. Nultočka je $(1, 0)$. Između osi y i nultočke, funkcija pada po krivulji sličnoj grafu kvadratne funkcije, dok od nultočke raste po krivulji sličnoj grafu drugog korijena. U točki $(1, 0)$ ima "šiljak".

4.6 Dekompozicija funkcije. Inverz funkcije

Zadatak 4.39. *Sljedeće funkcije napišite u obliku kompozicije niza elementarnih funkcija:*

1. $y = \log^2 x$
2. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}$
3. $y = 5^{(3x+1)^2}$

Rješenja.

1. $y = (f \circ g)(x)$, gdje su $f(x) = x^2$, $g(x) = \log x$.
2. $y = (f \circ g \circ h)(x)$, gdje su $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = \sin x$.
3. $y = (f \circ g \circ h)(x)$, gdje su $f(x) = 5^x$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = 3x + 1$.

tražene **elementarne** funkcije koje se ne mogu više rastaviti na kompoziciju funkcija.

Zadatak 4.40. *Odredite inverznu funkciju funkcije*

$$y = \frac{x-2}{x+1}.$$

Rješenje. Algebarskim metodama transformira se jednakost tako da na jednoj strani ostane sam x. Množenjem jednakost nazivnikom $x + 1$ dobiva se

$$y(x+1) = x - 2.$$

Množenje zagrade i prebacivanje pribrojnika koji sadrže x na lijevu stranu daju jednakost

$$xy - x = -2 - y.$$

Izlučivanje x

$$x(y-1) = -y - 2$$

i dijeljenje s $y - 1$

$$x = \frac{-y-2}{y-1} = \frac{-(y+2)}{-(1-y)}$$

daju formulu inverzne funkcije koja se obično zapisuje kao

$$y^{-1} = \frac{x+2}{1-x}$$

radi isticanja da se radi o inverznoj funkciji.

Zadatak 4.41. *Odredite inverznu funkciju i odredite domenu inverzne funkcije za funkciju*

$$y = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2.$$

Rješenje. Algebarskim metodama dobije se eksplicitna formula za x:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2| \cdot (e^x + e^{-x}) \\
(e^x + e^{-x})y &= e^x - 2e^{-x} + 2e^x + 2e^{-x} \\
e^{-x} \cdot y &= e^x(3-y) \\
\ln(e^{-x} \cdot y) &= \ln(e^x(3-y)) \\
-x + \ln y &= x + \ln(3-y) \\
\ln y - \ln(3-y) &= 2x \\
x &= \frac{1}{2} \ln \frac{y}{3-y} \\
y^{-1} &= \frac{1}{2} \ln \frac{x}{3-x}
\end{aligned}$$

Domena inverzne funkcije podudara se s rješenjem nejednadžbe

$$\frac{x}{3-x} > 0$$

i zapisuje se kao

$$D = (0, 3).$$

Zadatak 4.42. *Odredite inverz funkcije*

$$y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1.$$

Rješenje. Analogno prethodnom dobije se

$$\begin{aligned}
y - 1 &= 2\sin(3x - \frac{\pi}{3})| : 2 \\
\frac{y-1}{2} &= \sin(3x - \frac{\pi}{3})| \arcsin \\
\arcsin \frac{y-1}{2} &= 3x - \frac{\pi}{3} \\
\arcsin \frac{y-1}{2} + \frac{\pi}{3} &= 3x| : 3 \\
y^{-1} &= \frac{1}{3} \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{9}
\end{aligned}$$

Zadatak 4.43. *Odredite inverznu funkciju funkcije*

$$y = \frac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}.$$

Rješenje. Množenje formule nazivnikom daje

$$\begin{aligned}
(2+e^{\cos x})y &= e^{\cos x}-1\\
ye^{\cos x}-e^{\cos x} &= -1-2y\\
e^{\cos x}(y-1) &= -1-2y| : (y-1)\\
e^{\cos x} &= \frac{1+2y}{1-y}|ln\\
\cos x &= \ln\frac{1+2y}{1-y}|\arccos\\
x &= \arccos\ln\frac{1+2y}{1-y}\\
y^{-1} &= \arccos\ln\frac{1+2x}{1-x}
\end{aligned}$$

Implicitno zadana funkcija $y = y(x)$ je formula u dvije varijable

$$F(x,y)=0.$$

Uz određene uvjete nedegeneracije moguće je iz formule implicitno zadane funkcije izraziti eksplicitno funkciju

$$y=f(x).$$

Zadatak 4.44. *Funkciju*

$$2\sin(y-1)+2x-1=0,\quad y=y(x)$$

napišite u eksplicitnom obliku i odredite joj domenu.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2\sin(y-1) &= 1-2x| : 2\\
\sin(y-1) &= \frac{1-2x}{2}|\arcsin\\
y-1 &= \arcsin\frac{1-2x}{2}\\
y &= \arcsin\frac{1-2x}{2}+1
\end{aligned}$$

Domena funkcije je rješenje sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned}
-1\le \frac{1-2x}{2} &\le 1|\cdot 2\\
-2\le 1-2x &\le 2|-1\\
-3\le -2x &\le 1| : (-2)\\
\frac{3}{2}\ge x &\ge -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

koji daje

$$D=[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}].$$

Zadatak 4.45. *Odredite inverznu funkciju y^{-1} za implicitno zadanu funkciju*

$$y^3 - 2 + \log_3(x-1) = 0.$$

Rješenje. Algebarski se treba eksplicitno izraziti x.

$$\begin{aligned} \log_3(x-1) &= 2 - y^3 | 3^{()} \\ x - 1 &= 3^{2-y^3} \\ x &= 1 + 3^{2-y^3} \\ y^{-1} &= 1 + 3^{2-x^3} \end{aligned}$$

Zadatak 4.46. *Odredite eksplicitni oblik inverzne funkcije y^{-1} ako je funkcija y zadana implicitno*

$$y^2 + \sin^3 x - 2y + 5 = 0.$$

Odredite domenu inverzne funkcije.

Rješenje. Eksplicitni izraz za x dobiva se algebarskim zahvatima

$$\begin{gathered} \sin^3 x = -y^2 + 2y - 5 | \sqrt[3]{} \\ x = \arcsin \sqrt[3]{-y^2 + 2y - 5} \end{gathered}$$

Domena se dobiva rješavanjem sustava nejednadžbi

$$-1 \leq -y^2 + 2y - 5 \leq 1.$$

Lijeva nejednadžba daje

$$\begin{gathered} 0 \leq -y^2 + 2y - 4 \\ y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2} \end{gathered}$$

nepostojanje realnih nultočaka što znači da je izraz

$$-y^2 + 2y - 4$$

negativan za svaki $y \in R$. Desna nejednadžba također ne daje realna rješenja. Domena je prazan skup i funkcija, iako ima algebarski zapis, nije definirana.
Uostalom, jednadžba

$$y^2 + \sin^3 x - 2y + 5 = 0$$

nije rješiva po y

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(5 + \sin^3 x)}}{2}$$

te nema realne korijene ni za jedan $x \in R$.

4.7 Hiperbolne funkcije

Funkcijama se pokušavaju opisati pojave u prirodi i društvu s ciljem da se otkrivanjem veze uzroka i posljedice predvide ponašanja bez provociranja pojave pokusima. Hiperbolne funkcije uvedene su u matematiku kao rješenja jednadžbi gibanja. Naknadno je uočena geometrijska analogija trigonometrijskih funkcija na jediničnoj kružnici i hiperbolnih funkcija na jediničnoj hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

Kosinus hiperbolni je funkcija definirana formulom

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zadaci.

1. Odredite domenu funkcije $y = chx$.
2. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
3. Ispitajte parnost funkcije.
4. Nacrtajte graf funkcije $y = chx$.

Rješenje. 1. Domena je R. 2. Os $0y$ siječe u $(0,1)$. 3. Parna je. 4. Graf je sličan paraboli $y = x^2 + 1$.

Sinus hiperbolni je funkcija definirana formulom

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zadaci.

1. Odredite domenu funkcije $y = shx$.
2. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
3. Ispitajte parnost funkcije.
4. Nacrtajte graf funkcije $y = shx$.

Rješenje. 1. $D = R$. 2. Graf prolazi točkom $(0,0)$. 3. Neparna je. 4. Graf je sličan $y = x^3$.

Tangens hiperbolni definira se analogno trigonometrijskom tangensu i glasi

$$thx = \frac{shx}{chx}.$$

Zadaci.

1. Odredite domenu funkcije $y = thx$.
2. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
3. Ispitajte parnost funkcije.
4. Nacrtajte graf funkcije $y = thx$.

Rješenja. 1. $D = R$. 2. $S = (0,0)$. 3. Neparna je. 4. Graf se nalazi u pruzi između $y = \pm 1$ i sličan je okrenutoj $y = x^3$.

Kotangens hiperbolni definira se poput trigonometrijskog kotangensa i glasi

$$cthx = \frac{chx}{shx}.$$

Zadaci.

1. Odredite domenu funkcije $y = cthx$.
2. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
3. Ispitajte parnost funkcije.
4. Nacrtajte graf funkcije $y = cthx$.

Rješenja. 1. $D = R$. 2. Nema sjecišta. 3. Neparna je. 4. Poput dviju grana hiperbole: donja u III. kvadrantu ispod $y = -1$, gornja u I. kvadrantu iznad $y = 1$.

Osnovne formule hiperbolnih funkcija su

$$\begin{aligned} ch^2x - sh^2x &= 1 \\ thx \cdot cthx &= 1 \\ sh2x &= 2shx \cdot chx \\ ch2x &= ch^2x + sh^2x \end{aligned}$$

Zadatak 4.47. *Dokažite algebarski vjerodostojnost formula hiperbolnih funkcija.*

Zadatak 4.48. *Dokažite Moivreovu formulu*

$$(chx \pm shx)^n = chnx \pm shnx.$$

Uputa: dokaz provedite matematičkom indukcijom.

Area funkcije inverzne su funkcije hiperbolnih funkcija.

Zadatak 4.49. *Izrazite funkcije $Archx$, $Arshx$, $Arthx$ i $Arcthx$.*

Rješenja.

$$\begin{aligned} Archx &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ Arshx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ Arthx &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \\ Arcthx &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

4.8 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Neka je $f(x) = tgx$, $g(x) = ctgx$, $h(x) = \sin x$ i $h(x) = \cos x$. Dokažite da je

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{h(x)\cdot k(x)}.$$

2. Odredite domenu racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2+8x+15}{x^2(x^2-9)},$$

ispitajte ponašanje u rubnim točkama domene i rastavite funkciju na parcijalne razlomke.

3. Odredite domene sljedećih funkcija:
   (a) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$
   (b) $f(x) = \arccos(\frac{x}{2} - 1)$
   (c) $f(x) = \frac{1}{xe^2}$
   (d) $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$
   (e) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$
   (f) $f(x) = \log(3x-1) + 2\log(x+1)$
   (g) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$
   (h) $y = ctg \ln x$
   (i) $y = \sqrt{\ln\frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4-3x-x^2}$

4. Odredite slike sljedećih funkcijskih preslikavanja:
   (a) $f(x) = |x| + 1$
   (b) $f(x) = \frac{5}{x}$
   (c) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
   (d) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$
   (e) $f(x) = 1 - 3\cos x$

(f) $f(x) = 4^{-x^2}$

5. Ispitajte parnost i neparnost funkcija:

   (a) $f(x) = x^4 \sin 7x$
   (b) $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$
   (c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$
   (d) $f(x) = |x| + 2$
   (e) $f(x) = |x + 2|$
   (f) $f(x) = \log \cos x$
   (g) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$

6. Odredite temeljne periode funkcija:

   (a) $f(x) = \sin 5x$
   (b) $f(x) = -2\cos(x/3) + 1$
   (c) $f(x) = \log \cos 2x$
   (d) $f(x) = tg 3x + \cos 4x$

7. Nacrtajte graf funkcije $y = \sin x$, graf funkcije $y = \sin 2x$ i graf funkcije $y = \sin \frac{1}{2}x$.

8. Koristeći se identitetom $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, nacrtajte graf funkcije $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

9. Odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ g)(x)$ ako je

$$f(x) = \frac{2 - x}{3x - 1}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{2x - 1}.$$

10. Ako je

$$f(x) = \log \frac{1 + x}{1 - x}, \quad g(x) = \frac{2x + x^3}{3x^2 + 1},$$

    dokažite da je

$$(f \circ g)(x) = 3f(x).$$

11. Neka su $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$ i $h(x) = \frac{1}{x}$. Uvjerite se da je kompozicija funkcija asocijativna operacija.

12. Za sljedeće funkcije odredite elementarne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ koje čine njihovu kompoziciju $(f \circ g)(x)$. Nadalje, odredite domenu i nacrtajte grafove funkcija $y = (f \circ g)(x)$.

    (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$
    (b) $(f \circ g)(x) = \sin 2x$
    (c) $(f \circ g)(x) = \arcsin \frac{1+x}{x-3}$

(d) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$

(e) $(f \circ g)(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

(f) $(f \circ g)(x) = \ln \frac{2x+1}{3x^2-x+1}$

13. Sljedeće funkcije napišite u obliku kompozicije niza elementarnih funkcija:

    (a) $y = \ln(2x^2 - 3)$

    (b) $y = \ln \sqrt{2x - 1}$

    (c) $f(x) = \sin \ln \arccos(x^2 + 2)$

14. Odredite inverzne funkcije sljedećih funkcija:

    (a) $f(x) = 5x - 3$

    (b) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-5}{7-3x}}$

    (c) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x - 5}$

    (d) $f(x) = \log_4 \frac{2-x}{x-4}$

Rješenja.

1. Tvrdnja je točna.

2. Domena: $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to -3} f(x) = -1/27$. Nultočka funkcije je $(-5, 0)$. Funkcija se može neprekidno dodefinirati s $f(-3) = -1/27$. Rastav na parcijalne razlomke je $-\frac{8}{9x} - \frac{5}{3x^2} + \frac{8}{9(x-3)}$

3. Domene:

    (a) $[-2, 0) \cup (0, 2]$

    (b) $[0, 4]$

    (c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

    (d) $x \neq \frac{2k+1}{4}\pi, \quad k \in Z$

    (e) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

    (f) $(1/3, \infty)$

    (g) $[0, 2]$

    (h) $x \neq e^{k\pi}, \quad k \in Z$

    (i) $[-4, -2)$ jer $\ln \frac{x-4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+2} \geq 1$ iz čega slijedi $\frac{x-4}{x+2} - 1 \geq 0$, a svođenjem na zajednički nazivnik $\frac{-6}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x + 2 < 0$, a zajedno s uvjetom drugog pribrojnika slijedi predloženo rješenje.

4. Slike:

(a) $[1, +\infty)$
(b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
(c) $[-4, 4]$
(d) $(-\infty, 3)$
(e) $[-2, 4]$
(f) $(0, 1]$

5. Parnost

   (a) neparna
   (b) parna
   (c) niti parna niti neparna
   (d) parna
   (e) niti parna niti neparna
   (f) parna
   (g) neparna

6. Temeljni periodi:

   (a) $\frac{2\pi}{5}$
   (b) 6π
   (c) π
   (d) π

7. Graf nacrtajte samostalno.

8. Graf nacrtajte samostalno.

9. $(f \circ g)(x) = \frac{3x-3}{x+4}$, $(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{5-5x}$.

10. Jednakost vrijedi.

11. Asocijativnost je svojstvo poznato iz množenja realnih brojeva:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Tako treba provjeriti da vrijedi

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h) &= (f \circ (g \circ h))(x) \\ (f \circ g)(\frac{1}{x}) &= f((g \circ h)(x)) \\ f(g(\frac{1}{x})) &= f(g(\frac{1}{x})) \\ f(\frac{1}{x^3}) &= f(\frac{1}{x^3}) \\ \frac{2}{x^3} + 1 &= \frac{2}{x^3} + 1 \end{aligned}$$

12. (a) Funkcije sastavnice su polinom $g(x) = -x^2 + 1$ i funkcija drugog korijena $f(x) = \sqrt{x}$. Domena je $D = [-1, 1]$. Graf je gornja polukružnica sa centrom u ishodištu radijusa 1 s točkama $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

(b) Funkcija je složena od $g(x) = 2x$ i $f(x) = \sin x$. Domena je R, a graf je sinusoida amplitude 1, perioda π i nultočkama u $\{\pm\frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z\}$.

(c) Radi se o slaganju racionalne funkcije $g(x) = \frac{1+x}{x-3}$ i ciklometrijske funkcije $f(x) = \arcsin x$. Domena je rješenje sustava nejednadžbi

$$-1 \leq \frac{1+x}{x-3} \leq 1$$

uz obavezno isključenje: $x \neq 3$. Rješavanje lijeve nejednadžbe

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \frac{1+x}{x-3} \\
0 &\leq 1 + \frac{1+x}{x-3} \\
0 &\leq \frac{x-3+1+x}{x-3} \\
0 &\leq \frac{2x-2}{x-3}
\end{aligned}$$

daje ograničenje $x \in (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$. Analogno, desna nejednadžba

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{x-3} - 1 &\leq 0 \\
\frac{4}{x-3} &\leq 0
\end{aligned}$$

daje $x \in (-\infty, 3)$. Zajedno, domena je $(-\infty, 1]$. O grafu se zna da je jedina nultočka $(-1, 0)$. Točka $(1, -\frac{\pi}{2})$ rubna je točka grafa s desna. Iz $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Ispitivanja se mogu opisati krivuljom koja zdesna počinje u $(1, -\frac{\pi}{2})$, os y siječe u $\arcsin\frac{1}{3} = -0.34$, os x u točki -1 i priljubljuje se pravcu $y = \frac{\pi}{2}$ za $x \to -\infty$.

(d) Funkcija se može promatrati kao kompozicija polinoma $g(x) = x^2 + x + 2$ i racionalne funkcije $g(x) = \frac{1}{x}$. Domena je R. Za $x \to \pm\infty$ vrijednosti kompozicije teže k nuli. Svođenjem nazivnika na potpun kvadrat

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

dobiva se informacija da su vrijednosti kompozicije pozitivni brojevi i da se najveća vrijednost dobiva za $x = -\frac{1}{2}$ u iznosu $\frac{4}{7}$. Graf je zvonolika krivulja iznad osi x, s maksimumom u $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$, koja os y siječe u točki s ordinatom $\frac{1}{2}$. Graf je bez šiljaka.

(e) Slaganjem racionalne $g(x) = \frac{1}{1-x}$ i eksponencijalne $f(x) = e^x$ funkcije dobiva se funkcija definirana na cijelom R osim $x = 1$. Ispitivanjem jednostranih limesa dobiva se $\lim_{x\to 1^+}(f\circ g)(x) = 0$ i $\lim_{x\to 1^-}(f\circ g)(x) = +\infty$ dobiva se prekid druge vrste jer je limes s jedne strane konačan dok s druge strane nije. Ispitivanjem se dobiva da je $\lim_{x\to\pm\infty}(f\circ g)(x) = 1$ što znači da se krivulja grafa s desne i s lijeve strane priljubljuje pravcu $y = 1$. Os y graf siječe u točki $(0, e)$. Krivulja grafa crta se slijeva i počinje uz pravac $y = 1$ pa se kroz točku $(0, e)$ penje prema vertikali $x = 1$ uz koju se priljubljuje. Desna strana počinje u $(1, 0)$ i kao parabola se priljubljuje pravcu $y = 1$.

(f) Funkcija je nastala slaganjem racionalne funkcije $g(x) = \frac{2x+1}{3x^2-x+1}$ i prirodnog logaritma $f(x) = \ln x$. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3x^2-x+1} > 0| \quad &\cdot (3x^2-x+1) > 0 \\ x &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nultočka se traži jednadžbom

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3x^2-x+1} = 1| \quad &\cdot (3x^2-x+1) \\ 3x^2 - 3x &= 0 \\ 3x(x-1) &= 0 \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 1 \end{aligned}$$

koja daje dvije nultočke. Ispitivanje

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln\frac{2x+1}{3x^2-x+1} = \ln 0 = -\infty$$

daje zaključak da graf funkcije počinje uz vertikalu $x = -\frac{1}{2}$, raste preko ishodišta, dostiže maksimum između 0 i 1 u nepoznatoj točki, spušta se kroz $(1, 0)$ ispod osi x i budući je $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{2x+1}{3x^2-x+1} = \ln 0 = -\infty$ odlazi u $-\infty$ kao obrnuta kvadratna parabola.

13. Dekompozicija:

(a) $y = (f\circ g)(x)$, gdje je $g(x) = 2x^2 - 3$ polinom, a $f(x) = \ln x$.

(b) $y = (f\circ g\circ h)(x)$, gdje je $h(x) = 2x - 1$ linearna funkcija, $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ opća potencija i $f(x) = \ln x$.

(c) $f(x) = (f_1\circ f_2\circ f_3\circ f_4)(x)$, gdje su $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \ln x$, $f_3(x) = \arccos x$ i $f_4(x) = x^2 + 2$

14. Inverz:

(a) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$

(b) $f^{-1}(x) = \frac{7x^4+5}{3x^4+2}$

(c) $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{5x+1}{x-3}$

(d) $f^{-1}(x) = \frac{2-4^{x+1}}{4^x+1}$

5 Limesi

Primjer 5.1. *Ispitajte dijeljenje nulom.*

Konstruira se niz varijabli
$$1, 0.1, 0.01, \dots 10^{-n} \dots$$
koje uvrštavanjem u formulu $f(x) = \frac{1}{x}$ generiraju niz
$$1, 10, 100, \dots 10^{n} \dots$$

Prirodno je reći da niz varijabli teži k nuli, dok niz vrijednosti funkcije teži u beskonačnost. Zapis rezultata analize:
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$
Pedantnosti radi, ispravno bi analizu trebalo napisati kao
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$
radi razlike u odnosu na niz varijabli
$$-1, -0.1 \dots$$
koji također teži k nuli, no niz vrijednost funkcija
$$-1, -10, -100 \dots$$
teži u minus beskonačnost
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Zadatak 5.1. *Ispitajte*
$$\lim_{x \to 0} \ln x.$$

Rješenje. Konstruirati niz $\{0.1, 0.01, \dots\}$ i bilježiti vrijednosti funkcije $\{\ln 0.1, \ln 0.01, \dots\}$. Zaključak, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

5.1 Broj e

Zadatak 5.2. *Netko dobije milijun kuna i uloži ih u banku na godinu dana uz* 12% *godišnjih kamata. Kojom svotom raspolaže nakon godine dana?*

Rješenje.

$C_0 = 1,000.000kn$ glavnica

$p = 12\%$ godišnji postotak

$C_1 =?$ svota nakon godine dana

$C_1 = C_0 + C_0 \cdot p = C_0 \cdot (1 + p);\ C_0 = 1,120.000kn$

Zadatak 5.3. *Netko je dobio milijun kuna, ali ih je uložio na godinu dana u banku uz dogovor, da mu se mjesečno* $\frac{p}{12} = 1\%$ *kamata pripisuje glavnici. Kojom će svotom raspolagati na kraju godine?*

Rješenje. Neka je

$C_0 = 1,000.000kn$ - početna svota

$p = 12\%$ - godišnja kamatna stopa

Krajem prvog mjeseca svota na računu biti će

$$C_1 = C_0 + \frac{p}{12} \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12}).$$

Krajem drugog mjeseca bit će

$$C_2 = C_1 + \frac{p}{12} \cdot C_1 = C_1 \cdot (1 + \frac{p}{12}) = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12}) \cdot (1 + \frac{p}{12}) = C_0(1 + \frac{p}{12})^2.$$

Induktivno, krajem trećeg mjeseca bit će

$$C_3 = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12})^3,$$

a krajem godine, nakon 12 ukamaćivanja

$$C_{12} = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12})^{12}.$$

Uvrštavanjem podataka

$$C_{12} = 1,000.000 \cdot (1 + \frac{0.12}{12})^{12} = 1,126.825,03kn.$$

Uočite da je povećanje u odnosu na prošli zadatak iznosom od $6.825,03kn$ vrlo solidna svota.

Zadatak 5.4. *Kolika će biti svota od milijun kuna na kraju godine, ako* $\frac{p}{360}$ *ukamaćujemo svaki dan, uz* $p = 12\%$ *godišnjeg kamatnjaka?*

Rješenje. Analognim razmatranjem dobiva se formula

$$C_{360} = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{360})^{360},$$

gdje je $C_0 = 1,000.000kn$, $p = 12\%$. Konačna svota je $c_{360} = 1,127.474,31kn$. Uočite da povećanje i nije drastično u odnosu na prethodni zadatak.

Promatranjem tri prethodna zadatka naslućuje se postojanje granične vrijednosti za ukamaćivanja koja bi se vršila svakog trenutka.

Zadatak 5.5. *Neka je* $f : N \to R$ *niz zadan formulom*

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Odredite $f(1)$, $f(10)$, $f(100)$, $f(1000)$, $f(10000)$, $f(1000000)$, $f(10^8)$ *zaokruženo na 5 decimala.*

Rješenje. $f(1) = 2$, $f(10) = 2.593742$, $f(100) = 2.704813$, $f(1000) = 2.716923$, $f(10000) = 2.718145$, $f(1000000) = 2.718280$, $f(10^8) = 2.718281$.

Baza prirodne eksponencijalne progresije e je realni broj čija vrijednost zaokružena na 5 decimala glasi

$$e = 2.71828.$$

Zapis tvrdnje da se vrijednost broja e može po volji točno dobiti računanjem formule

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$$

odabirom dovoljno velikih brojeva n je izraz

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e,$$

gdje se oznaka $\lim_{n\to\infty}$ čita kao granična vrijednost izraza u koji se umjesto n uvrštavaju (beskonačno) veliki brojevi. Dobro je zapisati i drugi, izvedeni limes

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{p}{n})^n = \left(\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{\frac{n}{p}})^{\frac{n}{p}} \right)^p = e^p.$$

Ukamaćuje li se svota svaki trenutak, to će svota nakon godine dana **neprekidnog ili kontinuiranog** ukamaćivanja godišnjim kamatnjakom p biti:

$$\lim_{n\to\infty} C_0 \cdot (1 + \frac{p}{n}) = C_0 \cdot e^p.$$

5.2 Limes niza

Niz realnih brojeva je takvo nabrajanje brojeva kod kojeg postoji algoritam za dobivanje člana u nizu ovisno o rednom broju na kojem se taj član nalazi. Niz realnih brojeva je funkcija

$$a : N \to R$$

u oznaci

$$a(n) = a_n.$$

Limes niza a_n, ako postoji, je broj a koji ima svojstvo

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \qquad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

Oznaka:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Niz koji ima limes naziva se **konvergentnim**. Limes nazivamo graničnom vrijednosti niza.

Divergentni nizovi imaju beskonačan limes što obilježavamo s

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

ili se limes ne može odrediti kao primjerice

$$\lim_{n\to\infty} \sin n.$$

Svojstva limesa vrlo su prirodna:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Neki osnovni limesi:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad |a| < 1$
3. $\lim_{n\to\infty} |a|^n = \infty$
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$
6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
7. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$
8. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Neodređeni oblici:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty.$$

Zadaci.

1. Odredite limes niza čiji je opći član

$$a_n = \frac{n+1}{2n}.$$

2. Izračunajte limes niza zadanog općim članom

$$a_n = (\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7})^3.$$

3. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{2n^2-1}}.$$

4. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}.$$

5. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} 8^{\frac{2n+1}{3n-2}}.$$

6. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n-2}{n})^n.$$

7. Riješite

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n+3}{2n})^n.$$

8. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}).$$

9. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{2n+\sin n}.$$

10. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}.$$

Rješenje.

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3 &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7} : \frac{n^2}{n^2}\right)^3 \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}
\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{2n^2-1}} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2-\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n} = 1.$$

5.

$$8^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{-2}})^n = \left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{-2}})^{\frac{n}{-2}}\right)^{-2} = e^{-2}.$$

7.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n})^n = e^{\frac{3}{2}}.$$

8.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-n})\cdot\frac{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-n}} &= \\
= \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-n}} &: \frac{n}{n} \\
= \frac{6}{2} &= 3
\end{aligned}$$

9. Koristiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$$

radi ograničenosti funkcije $\sin x$ i dijeliti brojnik i nazivnik s n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{2n+\sin n} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sin n}{n}}{2+\frac{\sin n}{n}} = \frac{1}{2}.$$

10. Dijeliti najvećom potencijom:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n} : \frac{6^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n+(\frac{2}{3})^n+(\frac{5}{6})^n}{(\frac{1}{3})^n+1} = 0.$$

5.3 Limes funkcije

Primjer 5.2. *Odredite domenu funkcije* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$*. Konstruirajte niz varijabli* x_n *sa svojstvom*

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0.$$

Pretpostavite

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Rješenje. Računati vrijednosti sinusa za kutove u radijanima:

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\frac{\sin x_n}{x_n}$	0,998334	0,9999833	0,9999998	0,9999999

Pretpostavka:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Zbog parnosti funkcije

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = f(x)$$

slijedi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Konačno, može se pisati

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Limes funkcije $f(x)$ kada x teži broju c je A u zapisu

$$\lim_{x\to c} = A$$

ako

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Beskonačan limes funkcije:

Primjer 5.3. *Funkcija*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ima limese

$\lim_{x\to 0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} = +\infty$

Funkcija $f(x)$ ima limes u točki c ako je

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x).$$

Svojstva limesa funkcije:

1. $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to c} f_1(x) + \lim_{x\to c} f_2(x)$
2. $\lim_{x\to c}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to c} f_1(x) \cdot \lim_{x\to c} f_2(x)$
3. $\lim_{x\to c}[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}] = \frac{\lim_{x\to c} f_1(x)}{\lim_{x\to c} f_2(x)}$.

Neodređeni oblici:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, 1^{\infty}.$$

Određeni oblici:

$$\frac{A}{0} \to \infty, \quad \frac{A}{\infty} \to 0, \quad \frac{\infty}{0} \to \infty \ldots$$

Zadatak 5.6. *Odredite eksperimentalno*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Rješenje. Promatranjem nizova varijabli i pripadnih vrijednosti funkcije

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}:$$

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x_n)$	0,953101	0,995033	0,999500	0,999950

odnosno

x_n	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x_n)$	1,053605	1,005034	1,000500	1,000050

opravdano je pretpostaviti da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

jer je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Zadatak 5.7. *Odredite konvergentnim nizovima*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Rješenje. Ispitivanja nizova varijabli i vrijednosti funkcija

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

daju primjerice

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x_n)$	1,051709	1,005017	1,000500	1,000050

odnosno

x_n	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x_n)$	0,951626	0,995017	0,999500	0,999950

iz čega se zaključuje da funkcija ima limes i da vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Zadatak 5.8. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. Prije je pokazano da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \sim 2.71828.$$

Transformacijom izraza dobiva se

$$\lim_{x\to 0} (1+\frac{1}{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}$$

koji supstitucijom

$$\frac{1}{x} \to t$$

prelazi u

$$\lim_{t\to\infty} (1+\frac{1}{t})^t = e.$$

Zadatak 5.9. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Rješenje. U rješavanju zadataka koriste se svojstva limesa funkcija i eksperimentalno dobiveni limesi:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln a} - 1)\ln a}{x\ln a} = /x\ln a = t/ \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \ln a = \ln a \cdot 1
\end{aligned}$$

Zadatak 5.10. *Izračunajte limes funkcije*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+4}{x^2+2x+2}.$$

Rješenje. Analiza limesa funkcije počinje uvrštavanjem vrijednosti kojoj teži varijabla x:

$$\lim_{x\to 4} \frac{9+4}{9+6+2}.$$

Ako je oblik funkcije unutar limesa određen, analizi je kraj:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+4}{x^2+2x+2} = \frac{13}{17}.$$

Zadatak 5.11. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 1$ u formulu funkcije čiji limes treba odrediti, dobiva se

$$\frac{1}{-0},$$

jer je $1 - x < 0$ za $x > 1$ i limes se može odrediti.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = \frac{\lim_{x\to 1^+} x}{\lim_{x\to 1^+} 1-x} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

U računanju se obično drugi korak preskače ako je iz konteksta jasno o čemu se radi.

Zadatak 5.12. *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem sve većih brojeva u brojnik i nazivnik dobivaju se i u brojniku i u nazivniku sve veći brojevi pa je oblik limesa neodređen

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x dobiva se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Zadatak 5.13. *Odredite*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem se dobiva neodređeni oblik

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Množenjem brojnika i nazivnika izrazom $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ iracionalnost će se prebaciti iz brojnika u nazivnik:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.14. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}.$$

Rješenje. Koristeći limes dobiven eksperimentalno i supstituciju:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{2}{2} &= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \\
& \quad /t=2x/ \\
&= 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2
\end{aligned}$$

Zadatak 5.15. *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Rješenje. Zadani limes ima oblik

$$\frac{A}{\infty},$$

gdje A poprima vrijednost

$$-1\le A\le 1,$$

limes ima odredljivi oblik i jednak je nuli jer se ograničene vrijednosti dijele sve većim i većim vrijednostima.

Zadatak 5.16. *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

Rješenje. Rješenje se sastoji u proširivanju brojnika i nazivnika:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}\cdot\frac{\frac{5}{5x}}{\frac{2}{2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 5.17. *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Rješenje. U svakom boljem matematičkom priručniku možete pronaći identitet

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Transformacijom formule pod limesom dobiva se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2} \\
&= \frac{2}{4}\cdot(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot(1)^2=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.18. *Riješite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{x+1}.$$

Rješenje. Analizira se baza i dobiva se

$$\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)\right)^{\lim_{x\to 0}1+x} = (3\cdot 1)^1 = 3.$$

Zadatak 5.19. *Odredite limes funkcije*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

Rješenje. Analogno prethodnom zadatku dobiva se

$$\begin{aligned}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}\right)^{\lim_{x\to\infty}x^2} &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^{\infty}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0\end{aligned}$$

Zadatak 5.20. *Za proizvoljnu realnu vrijednost konstante $c \neq 0$, dokažite da je*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{c}}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{c}}\right)^{\frac{x}{c}}\right)^c\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{c}}\right)^{\frac{x}{c}}\right)^c\\ &= /supstitucija \quad \frac{x}{c} = t/\\ &= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^c = e^c\end{aligned}$$

Supstitucija je korektna jer je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c} = \lim_{t\to\infty} t = \infty.$$

Zadatak 5.21. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

Rješenje. Dijeljenjem brojnika i nazivnika unutar zagrade s x dobiva se

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})^x}{(1+\frac{1}{x})^x} =\\ &= \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}\end{aligned}$$

Zadatak 5.22. *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+3})^{x+2}.$$

Rješenje. Početna analiza daje neodređenost tipa

$$1^{\infty}.$$

Nizom algebarskih transformacijama navodimo na oblik iz jednog od prethodnih zadataka.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3-4}{x+3})^{x+2} &= \lim_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x+3})^{x+2}\\
&= \lim_{x+3\to\infty}((1+\frac{-4}{x+3})^{x+3})^{\frac{x+2}{x+3}}\\
&= (e^{-4})^{\lim x\to\infty \frac{x+2}{x+3}} = (e^{-4})^{1} = e^{-4}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.23. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. Rješava se analogno prethodnom zadatku

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} &= (\lim_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}})^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\\
&= e^{1} = e
\end{aligned}$$

Zadatak 5.24. *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jednostrani limesi računaju se kad način konvergencije niza varijabli x_n daje različite rezultate pa je potrebno posebno naznačiti način konvergencije. Jednostranim limesima ispituje se ponašanje funkcija na rubovima domene.

Zadatak 5.25. *Ispitajte limese*

1.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Rješenje. U oba slučaja valja podijeliti brojnik i nazivnik i pritom imati na umu da za **negativne** vrijednosti varijable x vrijedi

$$x = -\sqrt{x^2}.$$

1. Nakon dijeljenja:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

2. Analogno, no ovaj put je $x = \sqrt{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Zadatak 5.26. *Ispitajte funkciju*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

u točki prekida odnosno ispitajte

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

i

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Rješenje. Postepena analiza daje

$$\frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

dok u drugom slučaju daje

$$\frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Kaže se da funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

ima u nuli **prekid prve vrste**.

Zadatak 5.27. *Ispitajte ponašanje funkcije u točki $x = 2$. Odredite*

a)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$$

b)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$$

Rješenje.

a) Neposredna analiza daje
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{-0} = -\infty,$$
gdje
$$\frac{2}{-0}$$
predstavlja niz
$$\frac{2}{-0.1}, \frac{2}{-0.01}, \frac{2}{-0.001}, \ldots$$
sve negativnijih brojeva.

b) Slično je
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

5.4 Neprekidnost funkcije

Promjena varijable može uzrokovati promjenu vrijednosti funkcije. Neka je
$$y = f(x)$$
formula koja računa vrijednost funkcije y za vrijednost varijable x. Kaže se da je funkcija $f(x)$ neprekidna u točki x_0 ako
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$
Analogna je definicija pomoću limesa. Funkcija je neprekidna u točki x_0 svoje domene ako je
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
Elementarne funkcije, funkcije dobivene računskim operacijama i komponiranjem elementarnih funkcija neprekidne su u točkama za koje su definirane.

Primjer 5.4. *Funkcija zadana formulama*
$$f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq 3 \\ 3x, & x > 3 \end{cases}$$
ima u točki $x_0 = 3$ prekid prve vrste
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x = 9$$
dok je
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -2x^2 = -18.$$
Iz ispitivanja se vidi da su limesi konačni, ali se razlikuju.

Napomena 5.1. *Uvjet neprekidnosti po prvoj definiciji nije ispunjen jer* $\epsilon > 0$*, primjerice* $\epsilon = 2$*, za koji vrijedi:*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \quad |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) + 18| > 2.$$

za svaki $\delta > 0$ *dovoljno je uzeti* $x > 0$*.*

Primjer 5.5. *Funkcija*

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

neprekidna je na cijeloj domeni jer je dobivena kvocijentom elementarnih funkcija.

Primjer 5.6. *Funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

je neprekidna u nuli jer je pokazano da je

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Primjer 5.7. *Funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

ima prekid u točki $x = 0$ *jer je eksperimentalno pokazano da je*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \neq 3.$$

Isto tako, moguće je naći $\epsilon > 0$ *tako da*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \quad |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| > \epsilon.$$

Taj ϵ *može biti i* $\frac{1}{2}$*.*

Primjer 5.8. *Funkcija*

$$f(x) = |x|$$

neprekidna je u svakoj točki domene R*. Funkcija* $|x|$ *definirana je formulama*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Budući je

$$\lim_{x \to 0^-} -x = 0 = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$$

funkcija je neprekidna.

Primjer 5.9. *Funkcija*

$$f(x) = \frac{3-2x}{1+x}$$

nije definirana za $x = -1$. *Ispitivanja limesa*

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{3-2x}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{3-2x}{1+x} = +\infty$$

pokazuju da graf funkcije ima u točki $x = -1$ *prekid druge vrste.*

Zadatak 5.28. *Odredite parametar* a *tako da funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 5x^4 - 2x + a & x \geq 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na R.

Rješenje. $a = 1$.

5.5 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Zadan je niz brojeva

$$3, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{11}{5}, \ldots ...$$

Nastavite niz s barem tri nova člana. Odredite opći član niza i 1000. član niza. Odredite limes niza.

2. Nastavite niz

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{10}{5}, \quad \frac{13}{7}, \ldots$$

Odredite formulu za dobivanje općeg člana niza i graničnu vrijednost niza.

3. Odredite graničnu vrijednost niza

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{9}{4}, \ldots, \quad \frac{4n-3}{n+1} \ldots$$

4. Ispitajte konvergenciju niza

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \ldots$$

5. Odredite

$$\lim_{x\to 4} \frac{5x+2}{2x+3}.$$

6. Odredite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+7}.$$

7. Odredite
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}.$$
8. Odredite
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}.$$
9. Odredite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$$
supstitucijom $1+x=y^5$.
10. Odredite
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}.$$
Koristite se trigonometrijskim identitetima.
11. Odredite
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}.$$
12. Odredite
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$$
13. Odredite
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}).$$
14. Odredite
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^x.$$
15. Ispitajte limese s lijeva i s desna funkcije
$$f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$$
u točki $x=3$.
16. Odredite limese s lijeva i s desna funkcije
$$f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$$
za $x=a$.

Rješenja.

1. $\frac{13}{6}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{17}{8}, \ldots$, $a_n=\frac{2n+1}{2}$, $a_{1000}=\frac{2001}{1000}$, $\lim=2$.
2. $\frac{16}{9}$, $\frac{19}{11}, \ldots$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n+1}=3/2$.

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{n+1} = 4.$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$

5. Nakon uvrštavanja dobiva se $\frac{22}{11} = 2.$

6. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x i analize dobiva se $3/2$.

7. Rastavom na proste faktore brojnika i nazivnika, skraćivanjem se ukida neodređenost: $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = 2.$

8. Rastaviti brojnik i nazivnik izlučivanjem x^2 iz prva dva pribrojnika i $x-1$ nakon toga. Skraćivanjem se dobiva granična vrijednost 0.

9. Nakon supstitucije $\lim_{x\to 0} \frac{y^3-1}{y^5-1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)} = \frac{3}{5}.$

10. Koristiti identitet $\sin^2 \frac{5x}{2} = \frac{1-\cos 5x}{2}$ i računati $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x})^2 = 2\cdot(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}.$

11. Ovdje je neodređenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$ koja se uklanja dijeljenjem brojnika i nazivnika najvećom potencijom x^3:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

12. Dijeljenje brojnika i nazivnika s x^4 povlače
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

13. U ovom zadatku neodređenost oblika $\infty - \infty$ uklanja se množenjem i dijeljenjem izraza izrazom $(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})$ nakon čega se dobiva
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$$
i dijeljenjem brojnika i nazivnika s x, limes je jednak 2.

14. Dijeljenjem brojnika i nazivnika unutar zagrade
$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-3x+7} + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} = 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}$$
i transformacijom u granicama dopustivog
$$\lim_{x\to\infty} [(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}$$
prelazi u
$$e^{\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8.$$

15. Kada $x \to 3^-$, tada $\frac{1}{x-3} \to -\infty$ i $2^{\frac{1}{x-3}} \to 0$ pa je $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3}$. S druge strane, $x \to 3^+$, onda $\frac{1}{x-3} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}} \to \infty$ pa je $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$.

16. Analogno, $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

6 Derivacija funkcije

Neka je funkcija f definirana u okolini točke x_0 i neka je x točka iz te okoline. Ako kvocijent

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ima graničnu vrijednost kad $x \to x_0$, onda tu graničnu vrijednost nazivamo **derivacijom funkcije** f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.
Dakle, vrijedi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uz oznake $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ prethodnu derivaciju možemo zapisati kao

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

pri čemu je Δx prirast varijable x, a Δy prirast funkcije f.
Ako funckija f ima derivaciju u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$, onda kažemo da je ona derivabilna na (a, b). Funkciju definiranu na (a, b) nazivamo derivacijom funkcije f na intervalu (a, b) i vrijedi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

za svaki $x \in (a, b)$.

Zadatak 6.1. *Izračunajte omjer*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

za funkciju

$$y = x^2.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

jer je Δx zanemarivo malo prema $2x$.

Zadatak 6.2. *Odredite formule prvih derivacija funkcija*

1. $y = 12$

2. $y = x$

3. $y = \frac{1}{x}$

4. $y = \sqrt{x}$

5. $y = sinx$

6. $y = cosx$

Rješenja.

1. Funkcija je konstanta pa vrijedi

$$\begin{aligned} y(x) = y(x + \Delta x) = 12 \quad &\Rightarrow \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 12 - 12 = 0 \\ y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 & \end{aligned}$$

bez obzira na Δx.

2. Slično kao u prethodnom

$$\begin{aligned} y(x) &= x \\ y(x + \Delta x) &= x + \Delta x \\ y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x} \\ y(x + \Delta x) &= \frac{1}{x + \Delta x} \\ \Delta y &= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \\ &= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}. \\ y' &= \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

jer je $\Delta x << x$.

4. U ovom slučaju racionalizirat će se brojnik

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sqrt{x} \\
y(x+\Delta x) &= \sqrt{x+\Delta x} \\
\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \\
y' &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

jer je $\Delta x << x$ pa je $\sqrt{x+\Delta x} = \sqrt{x}$.

5. Adicijske formule i provjereni limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

koriste se u deriviranju funkcije sinusa

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sin x \\
y(x+\Delta x) &= \sin(x+\Delta x) = \sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos x \\
\Delta y &= \sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos x - \sin x \\
&= \sin(\Delta x)\cos x,
\end{aligned}$$

zbog $\cos \Delta x \to 1$ za $\Delta x \to 0$. Nadalje je

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x)\cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \cos x \\
y' &= -\cos x
\end{aligned}$$

6. Potpuno analogno prethodnom zadatku, korištenjem istog limesa i adicijske formule $\cos(x+\Delta x) = \cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x)$ dobiva se

$$y' = -\sin x.$$

Zadatak 6.3. *Odredite derivaciju eksponencijalne funkcije*

$$f(x) = e^x$$

preko limesa koristeći limes dobiven eksperimentalno

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Zadatak 6.4. *Odredite derivaciju funkcije prirodnog logaritma*

$$f(x) = \ln x$$

koristeći algebru i eksperimentalno dobiven limes

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

6.1 Tehnika deriviranja

Deriviranje se može shvatiti kao **operator** na skupu svih funkcija u smislu da svakoj funkciji f jedne realne varijable **operator deriviranja** pridruži točno jednu funkciju f' koja se naziva **derivacijom** početne funkcije.
Deriviranje ima dva svojstva koja se ističu:

- Linearnost
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

- Newton-Leibnitzovo svojstvo
$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Budući se svaka funkcija dobiva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem, dijeljenjem ili komponiranjem elementarnih funkcija, potrebno je poznavati derivacije elementarnih

funkcija kao postupke u slučaju da se funkcije zbrajaju, oduzimaju, množe, dijele ili se radi o kompoziciji funkcija.
Do sada su pokazane derivacije eksponencijalne funkcije

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow f'(x) = e^x,$$

koja je jedina jednaka svojoj derivaciji, zatim prirodne logaritamske funkcije

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

trigonometrijske funkcije sinusa

$$(\sin x)' = \cos x$$

i nešto drugačije derivacije kosinusa

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

6.1.1 Deriviranje opće potencije

Opća potencija je funkcija oblika

$$f(x) = x^n$$

gdje je n fiksan realni broj. Deriviranje je lako pokazati u slučaju da je n prirodni broj.

Zadatak 6.5. *Odredite derivaciju potencije*

$$f(x) = x^n$$

koristeći se formulom za potenciranje binoma navedenom u algebarskom dodatku.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{+nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Veliki broj funkcija može se svesti na oblik opće potencije

$$f(x) = x^a,$$

gdje je a negativan broj, razlomak, a može biti i nula. Derivacija opće potencije tako postaje široko primjenjiva. Važno je upamtiti da vrijedi

$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot x^{a-1}.$$

Zadaci.

1. Derivirajte opće potencije:

$$\begin{array}{llllll} a) & y=x^4 & b) & y=x^{10} & c) & y=x^{-3} \\ d) & y=x^{-6} & e) & y=x^{\frac{2}{3}} & f) & y=x^{\frac{7}{5}} \\ g) & y=x^{-\frac{3}{4}} & h) & y=x^{-\frac{5}{3}} & i) & y=x^{2,5} \end{array}$$

Rješenja.

1. (a) $y' = 4x^3$
   (b) $y' = 10x^9$
   (c) $y' = -3x^{-4}$
   (d) $y' = -6x^{-7}$
   (e) $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
   (f) $y' = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$
   (g) $y' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$
   (h) $y' = -\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$
   (i) $y' = 2.5x^{1.5}$

6.1.2 Deriviranje funkcije pomnožene konstantom

Uz uvjet da je poznata derivacija funkcije $f(x)$ moguće je derivirati funkciju

$$y = c \cdot f(x), \qquad y' = c \cdot f'(x).$$

Dokaz je vrlo očit

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{dx \to 0} \frac{c \cdot f(x+dx) - c \cdot f(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} c \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = c \cdot f'(x).$$

Derivacija logaritamske funkcije proizvoljne baze zahvaljujući identiteti

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

jednaka je

$$f(x) = \log_b x \quad f'(x) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln b}.$$

Zadatak 6.6.

Derivirajte sljedeće funkcije

$$\begin{array}{llllll} a) & y=3x^2 & b) & y=6\sqrt[3]{x} & c) & y=\frac{5}{x^4} \\ d) & y=6e^x & e) & y=\frac{\sin x}{3} & f) & y=\frac{5x^3}{9} \end{array}$$

Rješenje. a) $y' = 6x$, b) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$, c) $y' = -\frac{20}{x^5}$, d) $6e^x$, e) $y' = \frac{1}{3}\cos x$, f) $y' = \frac{5}{3}x^2$.

6.1.3 Derivacija zbroja i razlike

Uz uvjet poznavanja derivacija funkcija $f(x)$ i $g(x)$ moguće je derivirati

$$\begin{aligned} y &= f(x) + g(x) \\ y' &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Dokaz je jednostavan i nalazi se u [1].

Zadaci.

Derivirajte sljedeće funkcije:

1. $$y = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$$

2. $$y = 2\sqrt{x} - \frac{3x}{2} + \frac{2}{x}$$

3. $$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$$

4. $$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

5. $$y = sinx - cosx$$

6. $$y = x\sqrt{x}$$

Rješenja.
1. $y' = 9x^2 + 8x - 5$. 2. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} - \frac{2}{x^2}$. 3. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$. 4. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$. 5. $y' = \cos x + \sin x$. 6. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

6.1.4 Derivacija umnoška funkcija

Ako su poznate derivacije funkcija $f(x)$ i $g(x)$, onda je moguće derivirati njihov umnožak

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Primjer 6.1. *Derivirajte funkciju*

$$y = x^3 arctgx.$$

Rješenje.

$$y' = 3x^2 arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Zadatak 6.7. *Derivirajte sljedeće umnoške*

1. $y = xlnx$
2. $y = x^2 e^x$

Rješenje.

1. $y' = \ln x + 1$
2. $y' = 2xe^x + x^2 e^x$

6.1.5 Derivacija kvocijenta funkcija

Ukoliko je moguće derivirati funkciju $f(x)$ koja se nalazi u brojniku i $g(x)$ u nazivniku, tada je moguće derivirati kvocijent tih dviju funkcija

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ y' &= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g}(x))' &= (\frac{f(x)}{g(x)})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) - g(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f(x)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)} \\ &= \frac{1}{g(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)}[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}g(x) - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}f(x)] \\ &= \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot[f'(x)g(x) - g'(x)f(x)] \end{aligned}$$

Primjer 6.2. *Derivirajte funkciju*

$$y = \frac{\arcsin x}{x}.$$

Rješenje.

$$y' = \frac{x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x\cdot 1}{x^2}.$$

Primjer 6.3. *Odredite derivaciju funkcije*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

Rješenje.

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Zadaci. Odredite prve derivacije sljedećih funkcija:

1.
$$y = \frac{x+2}{x-3}$$

2.
$$y = \frac{x}{lnx}$$

3.
$$y = \frac{e^x}{x^2}$$

4.
$$y = \frac{ln^2x}{x}$$

5.
$$y = \frac{sinx}{cosx}$$

Rješenja.
1. $y' = \frac{-5}{(x-3)2}$. 2. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. 3. $y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$. 4. $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$. 5. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

6.2 Derivacija inverzne funkcije

Ako je
$$y = f(x)$$
formula koja opisuje funkcijsko pridruživanje varijable x vrijednosti funkcije y, onda je
$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$
formula koja opisuje kako se varijabli x pridružuje vrijednost prve derivacije y'.

Inverz funkcije dobiva se izražavanjem varijable x preko oznake za vrijednost funkcije y koja postaje varijabla inverzne funkcije
$$f^{-1}(y) = x.$$
Tada je
$$x' = \frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$
Formula derivacije inverzne funkcije u slučaju da je varijabla funkcije uobičajeno označena s x glasi
$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Primjer 6.4. *Derivirajte funkciju inverznu funkciji sinusa.*

Rješenje. Funkcija sinusa zapisuje se formulom

$$y = \sin x.$$

Slijedi račun:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \\ x &= \arcsin y \\ x' &= \frac{\Delta x}{\Delta y} = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

pa u slučaju da je funkcija zadana formulom

$$f(x) = \arcsin x$$

njena derivacija glasi

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zadatak 6.8. *Izvedite derivaciju funkcije*

$$f(x) = \arccos x.$$

Rješenje. Funkcija je inverz funkcije

$$y = \cos x.$$

Slijedi račun:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \\ x' &= \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{\sin x} \\ (\arccos y)' &= -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

koji daje rješenje

$$f'(x) = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zadatak 6.9. *Derivirajte*

$$y = \ln x.$$

Rješenje. Račun daje

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ x &= e^y \\ x' &= e^y \\ y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Zadatak 6.10. *Izvedite derivaciju funkcije*

$$y = arctgx.$$

Rješenje. Analogno prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned} y &= arctgx \\ x &= tgy \\ x' &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ y' &= \cos^2 y = \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

6.3 Derivacija kompozicije funkcija

Kompozicije funkcija su formule u kojoj jedna funkcija za argument ima cijelu formulu neke druge funkcije.
Ukoliko je poznata derivacija funkcije argumenta i funkcije kojoj je ona argument, moguće je derivirati:

$$y = f(g(x)) \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Kompoziciju

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

je moguće dekomponirati kao

$$y = f(z), z = g(x)$$

i pokazati da vrijedi

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(z) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Primjer 6.5. *Derivirajte funkciju*

$$y = (x^2 - 3x + 4)^3.$$

Rješenje. Moguće je kubirati zagradu pa onda derivirati kao produkt. Jednostavniji je pristup kao funkciji složenoj od formula

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \\ z = g(x) &= x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

koje je moguće derivirati

$$\begin{aligned} f'(z) &= 3z^2 \\ z' = g'(x) &= 2x - 3. \end{aligned}$$

Postupak derivacije složene funkcije daje

$$y' = 3(x^2 - 3x + 4)^2 \cdot (2x - 3).$$

Primjer 6.6. *Odredite prvu derivaciju funkcije*

$$y = \ln \sin x.$$

Rješenje. Deriviranje s lijeva na desno daje

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx.$$

Primjer 6.7. *Odredite prvu derivaciju funkcije*

$$y = 2^{x^2}.$$

Rješenje.

$$\begin{array}{rlll}
 & y & = 2^{x^2} & \\
dekompozicija: & y = 2^z & & z = x^2 \\
 & \dfrac{dy}{dz} = 2^z \ln 2 & & \dfrac{dz}{dx} = 2x \\
y' = & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} & = & 2^z \ln 2 \cdot 2x \\
 & & = & 2^{z+1} x \ln 2 \\
 & & = & 2^{x^2+1} x \ln 2
\end{array}$$

Zadatak 6.11. *Odredite derivaciju opće eksponencijalne funkcije*

$$y = a^x.$$

Rješenje. Opća eksponencijalna funkcija je kompozicija

$$y = a^x = e^{a \ln x}$$

koja se derivira postupno

$$y' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Zadatak 6.12. *Odredite prvu derivaciju funkcije*

1. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
2. $y = \sqrt{2x^3 - 1}$
3. $y = sin2x$
4. $y = sin^2x$
5. $y = e^{x^2 - x}$
6. $y = \ln \frac{x-2}{3-2x}$

Rješenja.

1. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $y' = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-1}}$
3. $y' = 2\cos 2x$
4. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$
5. $y' = (2x-1)e^{x^2-x}$
6. $y' = \frac{3-2x}{x-2} \cdot \frac{-1}{(3-2x)^2} = \frac{-1}{(x-2)(3-2x)}$

6.4 Tangenta i normala na graf funkcije

Tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ je pravac koji se najbolje priljubljuje krivulji grafa

$$\Gamma f = \{(x, y), \quad y = f(x)\}$$

Jednadžba tangente je jednadžba pravca koji prolazi diralištem (x_0, y_0), ima koeficijent smjera

$$k = tg\varphi = y'(x_0),$$

pri čemu je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x. Jednadžba tangente dana je s

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Normala je pravac koji diralištem prolazi okomito na tangentu. Jednadžba normale je

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

Zadaci.

1. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija i napišite jednadžbe tangenata na grafove u točkama koje su zadane sljedećim podacima:
   (a) graf $y = 2x - x^2$ u točki $x = \frac{1}{2}$
   (b) krivulja $y = \frac{12}{x}$ u točki $x = 4$
   (c) funkcija $y = \sqrt{x}$ u točki $y = 3$
2. Odredite jedndžbu tangente i normale
   (a) na krivulju $y = \sqrt[3]{x-1}$ u točki $(1, 0)$
   (b) na krivulju $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ u sjecištu s osi x
   (c) na krivulju $y = e^{1-x^2}$ u sjecištima s pravcem $y = 1$

3. Zadana je funkcija
$$y = \ln \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$
Koliko je $y'(1)$? Napišite jednadžbu tangente i jednadžbu normale na graf zadane funkcije.

4. Zadana je funkcija
$$f(x) = \ln(2 + e^{-x} + \sqrt{e^x + e^{-x} + 4}).$$
Odredite točku u kojoj graf funkcije $y = f(x)$ siječe os y i koeficijent smjera tangente na graf u toj točki.

5. Odredite koordinate točke u kojoj os x siječe tangentu povučenu na graf funkcije $y = x^2$ u točki s ordinatom $y = 4$.

Rješenja.

1. a) $4x - 4y + 1 = 0$, b)$y = -\frac{3}{4}x + 6$, c)$y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

2. Tangenta i normala: a)$x = 1, y = 0$; b)$x - 2y - 1 = 0, 2x + y - 2 = 0$; c)$2x + y - 3 = 0, x - 2y + 1 = 0$ za $(1, 1)$; $2x - y + 3 = 0, x + 2y - 1 = 0$ za $(-1, 1)$.

3. Iz $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}$ očito je $y'(1) \to \infty$ što daje za tangentu vertikalu $x = 1$, a za normalu $y = 0$.

4. $y_0 = f(0) = \ln(3 + \sqrt{6}$, $y'(0) = -\frac{1}{3+\sqrt{6}}$.

5. Uvjete da im je ordinata $y = 4$ imaju dva dirališta $(2, 4)$ i $(-2, 4)$ pa postoje dvije tangente $y = 4x - 4$ i $y = -4x - 4$ koje sijeku os x u $x_1 = 1$ i $x = -1$.

6.5 Derivacija implicitno zadane funkcije

Formula u kojoj su dvije varijable, izjednačena s nulom predstavlja u ravnini R^2 krivulju u smislu da jednadžba $F(x, y) = 0$ provjerava pripada li točka $T(x, y)$ krivulji. Primjeri su jednadžbe parabole, hiperbole, elipse i kružnice.
Uz određene uvjete jednadžba
$$F(x, y) = 0$$
implicitno definira y kao funkciju od x. Jedan od uvjeta je da vertikala siječe pripadnu krivulju samo u jednoj točki.

Primjer 6.8. *Jednadžba jedinične kružnice*
$$x^2 + y^2 = 1$$
definira funkciju
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
na gornjoj polukružnici i funkciju
$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$
na donjoj.

Derivaciju y' implicitno zadane funkcije nalazimo derivirajući

$$F(x,y)=0$$

po varijabli x smatrajući y funkcijom koja ovisi o x po nepoznatoj formuli. Geometrijska interpretacija y' je koeficijent smjera tangente na krivulju

$$F(x,y)=0.$$

Primjer 6.9. *Odredite y' implicitno zadane funkcije*

$$x^2+y^2=1.$$

Derivacija lijeve i desne strane po varijabli x daje

$$\begin{aligned} 2x+2y\cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

formulu za računanje koeficijenta smjera tangente na kružnicu

$$x^2+y^2=1.$$

Koeficijent smjera $y'\to\infty$ za $y\to 0$ što je očito jer su jednadžbe tangenata u tim točkama $x=1$ i $x=-1$.

Primjer 6.10. *Odredite y' ako je y zadana implicitno*

$$x^3+y^3-6xy=0.$$

Rješenje. Deriviranjem lijeve i desne strane po x dobiva se

$$\begin{aligned} 3x^2+3y^2y'-6(y+xy') &= 0 \\ 3x^2-6y &= 3y'(2x-y^2) | :3(2x-y^2) \\ y' &= \frac{x^2-2y}{2x-y^2} \end{aligned}$$

Zadatak 6.13. *Odredite prvu derivaciju funkcije $y(x)$ zadane implicitno*

$$\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=9.$$

Rješenje. Deriviranjem po x dobiva se tražena ovisnost y' o koordinatama (x,y)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}-e^{-\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} &= 0|\cdot x^2 \\ x &= e^{-\frac{y}{x}}(y'x-y)|e^{\frac{y}{x}} \\ xe^{\frac{y}{x}}+y &= xy' \\ y' &= e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Zadatak 6.14. *Odredite y' ako je zadano*

$$tgy = xy.$$

Rješenje. Deriviranje lijeve i desne strane daje

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 y}y' &= y + xy' \\ y' &= \frac{y\cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}\end{aligned}$$

Zadatak 6.15. *Odredite prvu derivaciju funkcije y zadane implicitno*

$$x^y = y^x.$$

Rješenje. Logaritmiranjem lijeve i desne strane formulu treba pripremiti, a onda derivirati.

$$\begin{aligned}x^y &= y^x \quad |\ln \\ y\ln x &= x\ln y \quad |' \\ y'\ln x + \frac{y}{x} &= \ln y + x\frac{y'}{y} \\ y' &= \frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\cdot\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Zadaci.

1. Odredite y' ako je y zadana formulom

$$y^3 = \frac{x-y}{x+y}.$$

2. Funkcija y zadana je implicitno formulom

$$e^y = x + y.$$

   Odredite y'.

Rješenja.

1. $y' = \frac{2y}{3y^2(x+y)^2+2x}$.
2. $y' = \frac{1}{e^y-1}$.

Primjer 6.11. *Izračunajte vrijednost y' u točki $(-1,0)$ krivulje*

$$arctg\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

zadane implicitno.

Rješenje. Formulu kojom je zadana krivulja treba derivirati po varijabli x

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy') = 0.$$

Zatim se uvrštavanjem vrijednosti koordinata točke $x=-1$, $y=0$ dobiva jednadžba u kojoj je jedina nepoznanica y'

$$\frac{1}{1+0}\frac{-y'-0}{1} - \frac{1}{1}\frac{1}{2}(-2+0) = 0$$

iz koje izlazi

$$y'(-1,0) = 1.$$

Zadatak 6.16. *Odredite $y'(1,1)$ funkcije*

$$x^y = y^x.$$

Rješenje. Implicitna formula treba se logaritmiranjem svesti u oblik pogodan za deriviranje:

$$\begin{aligned}
\ln x^y &= \ln y^x \\
y\ln x &= x\ln y \quad |' \\
y'\ln x + y\frac{1}{x} &= \ln y + x\frac{1}{y}y' \\
y' &= 1
\end{aligned}$$

Zadaci.
Izračunajte vrijednosti derivacije implicitno zadanih funkcija.

1. Funkcije
$$\frac{x^2}{9}.\frac{y^2}{4} = 1$$
u točki s ordinatom $y=2$.

2. Funkcije
$$x^2+xy+y^2 = 7$$
u točki s apscisom $x=-2$.

3. Funkcije
$$xy - tgy = 0$$
u točki $(0,\pi)$.

Rješenje.

1. $y'(2,3) = -\frac{3}{2}$ i $y'(2,-3) = \frac{3}{2}$.
2. $y'(-2,3) = \frac{1}{4}$ i $y'(-2,-1) = -\frac{5}{4}$.
3. $y'(0,\pi) = \pi$.

Zadatak 6.17. *Odredite vrijednost prve derivacije y' funkcije*

$$e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$$

u točki s ordinatom $y = 0$.

Rješenje. Apscisa točke može biti bilo koji $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i nije jednoznačna pa postoji beskonačno mnogo rješenja ovog zadatka. Derivacija po x daje

$$e^x \sin y + e^x \cos y \cdot y' + y' e^{-y} \cos x + e^{-y} \sin x = 0.$$

Uvrštavanjem se dobiva za proizvoljni $k \in Z$

$$y'((2k+1)\frac{\pi}{x}) = (-1)^{k+1} e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}.$$

6.6 Diferencijal funkcije

Za razliku od derivacije koja daje koeficijent smjera tangente, diferencijal je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini neke točke.

Diferencijal funkcije f u točki x je izraz

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x,$$

pri čemu je funkcija $y = f(x)$ derivabilna u točki x.

Primjer 6.12. *Odredite diferencijal funkcije*

$$y = \arcsin x$$

za vrijednost argumenta $x = 1/2$. Odredite $\arcsin 0.45$ *pomoću prvog diferencijala.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
dy &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x \\
y'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\
\Delta x &= 0.45 - 0.5 = -0.05 \\
dy &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{20} = -\frac{1}{10\sqrt{3}} \\
\arcsin 0.45 &= \arcsin 1/2 + d\arcsin 1/2(-0.05) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{10\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Zadaci.

1. Odredite prve diferencijale sljedećih funkcija:
   (a) $y = (3x^2 - x)^{3/2}$ u točki $x = -1$
   (b) $y = 2^x - 3^{-x} + \sqrt{x}$ u točki $x = 1$
   (c) $y = \ln(\cos \frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$ za $x = \frac{4}{\pi}$

2. Odredite pomoću diferencijala odgovarajućih funkcija:
   (a) $\sqrt{101}$
   (b) $\ln 3$
   (c) $e^{0.05}$
   (d) $arctg2$
   (e) $\sin 69^o$
   (f) $tg40^o$

3. Ako je

$$y = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x},$$

provjerite da vrijedi

$$2x^2 dy = (x^2 y^2 + 1)\Delta x.$$

Rješenja.

1. Diferencijali:
   (a) $dy = -21\Delta x$
   (b) $dy = (2\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{2})\Delta x$
   (c) $dy = \frac{\pi^2}{8}\Delta x$

2. Približno računanje:
   (a) $\sqrt{101} = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 1 = 10 + \frac{1}{20} = 10.05$
   (b) $\ln 3 = \ln e + \frac{1}{e} \cdot (3 - e) = 1 + \frac{3}{e} - 1 = \frac{3}{e} \approx 1.1$
   (c) $e^{0.05} = e^0 + e^0 \cdot 0.05 = 1.05$
   (d) $arctg2 = arctg\sqrt{3} + \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi+6-3\sqrt{3}}{12} \approx \frac{18.56-5.19}{12} = \frac{13.35}{12} = 1.11$
   (e) $\sin 69^o = \sin 60^o + \cos 60^o \cdot 9^o \cdot \frac{\pi}{180^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{20} \approx \frac{1.73}{2} + \frac{0.157}{2} = 0.865 + 0.078 = 0.943$
   (f) $tg40 = tg45 + \frac{1}{\cos^2 45} \cdot (-5^o) \cdot \frac{\pi}{180} = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{3.14}{18} = 1 - 0.174 = 0.826$

3. provjera potvrđuje jednakost

6.7 Logaritamsko deriviranje

Logaritamsko deriviranje neophodno je kad se varijabla javlja u bazi i eksponentu, a može biti i zgodno jer algebarski pojednostavljuje izraze potenciranja i korjenovanja.

Primjer 6.13. *Derivirajte*

$$y = x^x.$$

Rješenje. Logaritmiranjem lijeve i desne strane dobiva se

$$\ln y = x \ln x$$

koji deriviramo kao implicitno zadanu funkciju

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Moguće je iskoristiti početnu jednakost i dobiti y' eksplicitno

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

Zadatak 6.18. *Odredite prvu derivaciju funkcije*

$$y = (\sin x)^x.$$

Rješenje. Potpuno isti postupak kao u prethodnom primjeru daje

$$\begin{aligned} \ln y &= x \ln \sin x \\ \frac{1}{y} y' &= \ln \sin x + x \frac{1}{\sin x} \cos x \\ y' &= (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cdot ctgx) \end{aligned}$$

Zadatak 6.19. *Derivirajte*

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Rješenje. Logaritmiranje i implicitno deriviranje daje

$$\begin{aligned} \ln y &= \sqrt{x} \ln x \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

Zadatak 6.20. *Derivirajte funkciju*

$$y = x^{x^x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x^x \ln x \quad |\ln \\
\ln\ln y &= x\ln x + \ln\ln x \quad |' \\
\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{y'}{y} &= \ln x + 1 + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \\
y' &= y\ln y\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}\right) \\
&= x^{x^x}\cdot x^x(\ln x)(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}) \\
&= x^{x^x}\cdot x^x(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Zadaci.
Logaritamski derivirajte sljedeće funkcije:

1. $$y = \cos^{\sin x} x.$$
2. $$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$
3. Odredite domenu funkcije
$$y = x\cdot\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-1)^5}}.$$
   Napišite jednadžbe tangente i normale na graf zadane funkcije u točki $T(3, y)$. Koliku površinu omeđuju tangenta, normala i os x?

Rješenja. 1. $y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. 2. $y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$.
3. Jedino ograničenje predstavlja nultočka nazivnika te je

$$D = R\setminus\{1\}.$$

Vrijednost funkcije u zadanoj točki je

$$y(3) = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1\cdot 4}{2^5}} = \frac{3}{2}.$$

Logaritmiranje prije deriviranja:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x + \frac{1}{3}\left(2\ln(x-2) + \ln(x+1) - 5\ln(x-1)\right) \\
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-1} \\
\frac{2}{3}\cdot y' &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} - \frac{5}{6} \\
y' &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

- tangenta: $3x - 8y + 3 = 0$;
- normala: $16x + 6y - 57 = 0$;
- sjecište tangente s osi y: $y_t = \frac{3}{8}$;
- sjecište normale s osi y: $y_n = \frac{19}{2}$;
- površina trokuta:

$$P = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{57}{32}.$$

6.8 Derivacija funkcije zadane parametarski

Postoje krivulje čije točke po koordinatama generira parametar t. Uz uvjet da na intervalu $x \in [a, b]$ svaki vertikalni pravac siječe krivulju u **samo jednoj** točki, moguće je govoriti o **funkcijskoj** ovisnosti varijable y o varijabli x.
Poznata krivulja koju bi opisivala svjetiljka zalijepljena na rub kotača bicikla polumjera a dok se vozi po ravnoj cesti je **cikloida**. Koordinate cikloide generirane kutom t za koji se zakrenuo kotač bicikla računaju se po formulama

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Točka cikloide dobiva se uvrštavanjem parametra t u formule koje daju njene koordinate.
Formula derivacije za varijablu ima parametar t i glasi

$$y'(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

gdje su $\dot{y}$ i $\dot{x}$ derivacije koordinatnih funkcija koje ovise o t.
Derivacija y' na parametarski zadanoj cikloidi tako je

$$y'(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

i definirana je za svaki t osim u nultočkama nazivnika.

Zadatak 6.21. *Odredite točke u kojima formula prve derivacije na cikloidi ima prekid. Ispitajte*

$$\lim_{t \to 0^+} y'(t) \quad i \quad \lim_{t \to 0^-} y'(t)$$

i generalizirajte limese u točkama prekida.

Rješenje. Limesi

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} y'(t) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin^2 \frac{t}{2} \cdot t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot 4}} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot \frac{0}{4}} = +\infty \\ \lim_{t \to 0^-} y'(t) &= -\infty \end{aligned}$$

ukazuju da cikloida u točkama prekida prve derivacije ima "šiljke".

Zadaci. Odredite derivacije y' koje predstavljaju koeficijente smjera tangenti parametarski zadanih krivulja u sljedećim zadacima.

1. Krivulja je zadana parametarski
$$\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{array} \right. .$$
Odredite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$.

2. Parametarski zadanoj funkciji
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{array} \right.$$
odredite derivaciju. Riješite se parametra t i napišite implicitnu i eksplicitnu jednadžbu za funkciju $y = y(x)$.

3. Ako je
$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{array} \right.$$
parametarski zadana krivulja, odredite prvu derivaciju i izračunajte vrijednost derivacije za točku određenu parametrom $t = 0$.

Rješenja.

1. Derivacija $\frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{t+1}$

2. Derivacija: $y' = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. Formula: $y^3 = x^2$, graf se sastoji od dva gornja dijela dviju parabola sa "šiljkom" u iskodištu i osima duž osi x.

3. $\frac{dy}{dx} = -2e^{3t}$, vrijednost $y'(0) = -2$.

6.9 Derivacije višeg reda

Derivacija funkcije ponovo je funkcija. Deriviranjem derivacije dobiva se funkcija koja se naziva drugom derivacijom u oznaci y''.
Analogno se definira treća derivacija u oznaci y''', četvrta u oznaci $y^{(IV)}$ i tako dalje ...

Zadaci.

1. Odredite četvrtu derivaciju $y^{(IV)}$ polinoma
$$y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 1.$$

2. Izračunajte vrijednost $y''(0)$ za funkciju
$$y = e^{x^2}.$$

3. Odredite petu derivaciju funkcije
$$y = \ln 2x.$$
Kako bi glasila formula 10. derivacije? A n-te?

4. Pokažite da funkcija
$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x$$
zadovoljava diferencijalnu jednadžbu
$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Rješenja.

1. $y^{(IV)} = 360x - 48.$

2. $y'' = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$, $y''(0) = 2.$

3. $y^{(V)} = \frac{24}{x^5}$, $y^{(X)} = -\frac{9!}{x^{10}}$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$

Formalno, zapis druge derivacije je derivacija po x prve derivacije
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$
gdje je
$$\frac{d^2y}{dx^2}$$
formalni zapis koji se čita: "Dvaput deriviran y po varijabli x.

Primjer 6.14. *Pokažite da druga derivacija*
$$\frac{d^2y}{dx^2}$$
kod funkcije koja je parametarski zadana glasi
$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Rješenje. Primjena formalnog računa daje
$$\begin{aligned} y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} \\ \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$

Zadatak 6.22. *Odredite y'' na elipsi zadanoj parametarski*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Rješenje. $y'' = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$.

6.10 Primjena derivacija u geometriji

Derivacija u geometriji ima značajnu ulogu u proučavanju kvalitativnih osobina krivulja i ploha. Ideja tangente u svojoj generalizaciji omogućava lokalnu organizaciju zakrivljenih ploha u ravninske.

Zadaci.

1. Odredite domenu funkcije
$$y = \ln\frac{x+1}{x-1}$$
i napišite jednadžbu tangente u točki s apscisom $x = 2$.

2. Izračunajte površinu koju tangenta na krivulju
$$y = x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$$
povučena u točki s apscisom $x = 3$ zatvara s koordinatnim osima.

3. Odredite domenu funkcije
$$y = \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} + x\sin 4x$$
i napišite jednadžbu tangente u točki s apscisom $x = 1$.

4. Odredite jednadžbu tangente koja je na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ povučena u točki $(3, y < 0)$.

5. Izračunajte površinu koju s koordinatnim osima zatvara tangenta povučena na hiperbolu $9x^2 - 16y^2 = 144$ u točki $(x < 0, 3)$.

6. U kojoj je točki krivulje $y^2 = 2x^3$ tangenta okomita na pravac $4x - 3y + 2 = 0$?

7. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju
$$ye^y = e^{x+1}$$
u točki $T(0, 1)$ zadane krivulje. Koliku površinu zatvaraju tangenta i normala s osi x?

8. Zadana je funkcija
$$f(x) = 2\arccos\frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{3}.$$
Odredite inverznu funkciju. Nacrtajte inverznu funkciju i odredite jednadžbu tangente u točki $T(\frac{\pi}{3}, y)$ grafa inverzne funkcije.

9. Odredite jednadžbe tangenata na graf funkcije
$$y = \frac{1-x}{2x+3}$$
okomitih na pravac $5x - y - 2 = 0$.

10. Izračunajte vrijednost parametra k za koju je tangenta na graf funkcije
$$y = \ln(kx^2 - x + 1)$$
povučena u točki s apscisom $x = 3$ okomita na pravac $x + y + 5 = 0$.

11. Koliku duljinu na tangenti povučenoj na krivulju
$$arctg\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$$
u točki $(0, 1)$ određuju točke u kojima tangenta siječe koordinatne osi?

12. Odredite domenu funkcije
$$y = \ln\frac{x-1}{x+1}$$
i nacrtajte u koordinatnom sustavu tangentu na graf funkcije povučenu u točki s apscisom $x = 2$. Koliku duljinu ima dio tangente između njenih sjecišta s koordinatnim osima?

13. Odredite jednadžbu tangente i normale povučene na graf funkcije
$$y = (2x)^{3x}$$
u točki s apscisom $x = \frac{1}{2}$.

14. Odredite jednadžbe tangente i normale na krivulju
$$x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$$
u točki u kojoj je ordinata $y = 3$.

15. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju
$$y^4 = 4x^4 + 6xy$$
u točki $(1, 2)$.

16. Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$xy - tgx = 0$$

u točki $A(\frac{\pi}{4}, y)$.

17. Izračunajte površinu koju s osi x zatvaraju tangente na krivulju

$$3x^2 - xy^2 - 3y + x = 0$$

u točkama s ordinatom $y = 1$.

18. Krivulja je zadana jednadžbom

$$e^y \sin x - e^{-x} \cos y = 0.$$

Pokažite da točka $(0, \frac{\pi}{2})$ pripada krivulji. Odredite jednadžbu tangente povučene u zadanoj točki na zadanu krivulju.

19. Funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ naziva se area-sinus hiperbolni. Odredite inverz i prvu derivaciju inverza zadane funkcije. Odredite jednadžbe tangente i normale na graf inverzne funkcije u točki s apscisom $x = 0$.

20. Zadana je funkcija
$$y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x - 1}{3} + \frac{\pi}{2}.$$
Odredite jednadžbu normale na graf funkcije inverzne zadanoj funkciji u točki s apscisom $x = \frac{\pi}{4}$. Nacrtajte graf inverzne funkcije.

21. Zadana je funkcija
$$f(x) = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}}.$$
Odredite domenu i izračunajte $f(0)$. Odredite jednadžbu tangente na graf u ishodištu.

Kut pod kojim se sijeku krivulje u sjecištu računa se kao kut između tangenata na krivulje u njihovom sjecištu. Za kut φ između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ u zajedničkoj točki $(x_0, y_0 = f(x_0) = g(x_0))$ vrijedi

$$tg\varphi = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$

22. Pod kojim kutevima sinusoide $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ sijeku os x u ishodištu koordinatnog sustava?

23. Pod kojim se kutom sijeku parabole $y = (x - 2)^2$ i $y = -4 + 6x - x^2$?

24. Pod kojim se kutom sijeku parabole $y = x^2$ i $y = x^3$?

25. Pokažite da se hiperbole $xy = a^2$ i $x^2 - y^2 = b^2$ sijeku pod pravim kutom.

Upute i rješenja zadataka.

1. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

koja se rješava, nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika, analizom predznaka na brojevnom pravcu

x :	$-\infty$		-1		1		∞
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	!	$+$	

i glasi $D =< -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty >$. Za tangentu imamo x-koordinatu dirališta $x_0 = 2$. Druga koordinata dobiva se po formuli

$$y_0 = \ln 3.$$

Koeficijent smjera tangente jednak je iznosu prve derivacije u točki dirališta

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1} \\ k = y'(x_0) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

tako da jednadžba tangente može biti

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + \ln 3.$$

2. Koeficijent smjera tangente dobiva se postepeno

$$\begin{aligned} y' &= \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \frac{1+x-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y'(3) &= \arcsin\sqrt{\frac{3}{4}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Druga koordinata dirališta dobiva se uvrštavanjem u funkciju

$$y_0 = 3 \cdot \arcsin\sqrt{\frac{3}{4}} + arctg\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Jednadžba tangente glasi

$$y - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}(x-3).$$

Sjecišta pravca s osi x i y su

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \\ y &= \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Tražena površina je površina pravokutnog trokuta i glasi

$$P = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1) \cdot (\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{3} - \frac{9}{2\pi} - \frac{\pi}{6}$$

što je približno u apsolutnoj vrijednosti 1.049 odnosno 1.05 kvadrata.

3. Domena je rješenje

$$\frac{4-x}{2x-1} \geq 0.$$

Nultočke brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu daju

$x:$	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$\frac{4-x}{2x-1}$		$-$	!	$+$	0	$-$	

domenu $D = <\frac{1}{2}, 4]$. Za tangentu treba

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= \sqrt{\frac{3}{1}} + \sin 4 = \sqrt{3} + \sin 4 \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}} \cdot \frac{-(2x-1) - 2(4-x)}{(2x-1)^2} + \sin 4x + x \cos 4x \cdot 4 \\ y'(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1-6}{1} + \sin 4 + 4 \cos 4 \end{aligned}$$

Jednadžba tangente glasi

$$y - \sqrt{3} - \sin 4 = \left(-\frac{7}{\sqrt{3}} + \sin 4 + 4 \cos 4 \right) (x - 1)$$

ili približno $y = -7.4x + 8.4$.

4. Deriviranjem lijeve i desne strane po x dobiva se

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' &= 0 \\ y' &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Točka dirališta ima koordinate $(3, -4)$ pa je

$$y'(3, -4) = \frac{3}{4}$$

i jednadžba tangente glasi

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}.$$

5. Prva koordinata dirališta dobiva se uvrštavanjem druge u jednadžbu hiperbole

$$\begin{aligned} 9x^2 &= 144 + 16 \cdot 9 \\ x^2 &= 32 \\ x &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Koeficijent smjera tangente dobiva se iz derivacije implicitno zadane funkcije

$$\begin{aligned} 18x - 32yy' &= 0 \\ y' &= \frac{18 \cdot (-4)\sqrt{2}}{32 \cdot 3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

otkuda jednadžba tangente glasi

$$y - 3 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}(x + 4\sqrt{2}).$$

Rješavanjem jednadžbi nakon uvrštavanja $x = 0$ odnosno $y = 0$ dobivaju se sjecišta s osi y u $y = -3$ i s osi x u $x = -2\sqrt{2}$. Površina pravokutnog trokuta je

$$P = \left| \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-2\sqrt{2}) \right| = 3\sqrt{2} \quad kvadrata.$$

6. Formula za računanje koeficijenta smjera tangente u proizvoljnoj točki krivulje dobiva se deriviranjem

$$\begin{aligned} 2yy' &= 6x^2 \\ y' &= \frac{3x^2}{y} \end{aligned}$$

Zahtjev za okomitost tangente i zadanog pravca daje uvjet

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow k = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow y' = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} &= \frac{3x^2}{y} \\ y &= -4x^2 \end{aligned}$$

koji se uvrsti u jednadžbu krivulje

$$\begin{aligned} 16x^4 &= 2x^3 \quad | : 2x^2 \neq 0 \\ x &= \frac{1}{8} \\ y &= -4\frac{1}{64} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

i daje rješenje.

7. Koeficijent smjera tangente, tangenta i normala dobivaju se

$$\begin{aligned} e^y y' + y e^y y' &= e^{x+1} \quad |(0,1) \\ y'e + y'e &= e \\ y' &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tangenta \ldots \qquad & y = \frac{1}{2}x + 1 \\ normala \ldots \qquad & y = -2x + 1 \end{aligned}$$

Tangenta siječe os x u točki $(-2, 0)$, a normala u $(1/2, 0)$. Tražena površina

$$P = \frac{2.5 \cdot 1}{2} = 1.25 \quad kvadrata.$$

8. Inverz je formula koja računa x preko y

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} - \frac{\pi}{6} &= \arccos \frac{x-1}{2} \\ \cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{x-1}{2} \\ 2\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 &= x \\ f^{-1}(x) &= 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad |\cos\alpha = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f^{-1}(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \end{aligned}$$

Crta se sinusoida amplitude 2, periode 4π, početka u $-2\pi/3$, koja je podignuta za 1. Točka grafa

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

u kojem treba povući tangentu je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{3} \\ y_0 &= 2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3, \end{aligned}$$

koeficijent smjera je

$$y' = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

pa jednadžba tangente glasi

$$y - 3 = 0.$$

9. Koeficijent smjera tangente na pravac

$$y = 5x - 2$$

očito je

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{5} \\ y' &= \frac{-(2x+3)-2(1-x)}{(2x+3)^2} = \frac{-5}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{5} = \frac{-5}{(2x+3)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} 2x+3=5 & 2x+3=-5 \\ 2x=2 & 2x=-8 \\ x=1 & x=-4 \\ y=0 & y=\frac{5}{-5}=-1, \end{array}$$

stoga postoje dvije tangente

$$\begin{aligned} t_1 \ldots \quad & x+5y+9=0 \\ t_2 \ldots \quad & x+5y-1=0. \end{aligned}$$

10. Tangenta povučena na zadani graf u točki $x=3$ ima koeficijent smjera

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{kx^2-x+1}\cdot(2kx-1) \\ y'(3) &= \frac{1}{9k-2}\cdot(6k-1) \\ y=-x-5 \quad \Rightarrow & \quad y'=1 \\ 9k-2 &= 6k-1 \\ k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

11. Derivacija lijeve i desne strane po varijabli x je

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}+\frac{y-xy'}{y^2} &= \frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy') \\ \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{1} &= \frac{1}{1}\cdot(0+2y') \\ 2 &= 2y' \\ y' &= 1 \end{aligned}$$

Tangenta $y-1=x$ odsjeca koordinatne osi u $(0,1)$ i $(-1,0)$ pa po Pitagorinu teoremu tražena duljina iznosi

$$d^2 = 1+1$$

oko 1.4 jedinične duljine.

12. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

i dobiva se nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu

$x:$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	!	$-$	0	$+$	

Domena je $D = <-\infty, -1> \cup <1, +\infty>$. Ordinata dirališta dobiva se računanjem vrijednosti funkcije

$$y_0 = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3,$$

a koeficijent smjera tangente je vrijednost prve derivacije

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \\ y'(2) &= 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

a iz jednadžbe tangente $y + \ln 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ odrede se sjecišta s koordinatnim osima $(0, -\frac{4}{3} - \ln 3)$ i $\frac{3\ln 3}{2} + 2, 0)$. Pitagorin poučak daje

$$\begin{aligned} d^2 &= (\frac{4}{3} + \ln 3)^2 + (\frac{3\ln 3}{2} + 2)^2 \\ d^2 &= \frac{13\ln^2 3}{4} + \frac{26\ln 3}{3} + \frac{52}{9} \\ d &\approx 4.38 \end{aligned}$$

13. Dirališe je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \\ y_0 &= (2 \cdot \frac{1}{2})^{3\cdot\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Koeficijent smjera tangente logaritamskim deriviranjem

$$\begin{aligned} \ln y &= 3x \cdot \ln 2x \quad |' \\ \frac{1}{y}y' &= 3\ln 2x + 3x\frac{1}{2x}2 \\ y' &= 3. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente je

$$y - 1 = 3(x - \frac{1}{2}),$$

a normale je

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}).$$

14. Apscisa dirališta dobiva se iz jednadžbe

$$x^3 + 2x + 3 = 0$$

pogađanjem $x = -1$. Talijanski matematičar Cardano našao je postupak za rješavanje jednadžbi trećeg reda, ali to nažalost prelazi okvire ove zbirke. Koeficijent smjera tangente

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yy' + 2 &= 0 \\ y' &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

daje jednadžbe

$$\begin{aligned} &\textit{tangente}\ldots \qquad y-3=-\frac{5}{6}(x+1) \\ &\textit{normale}\ldots \qquad y-3=\frac{6}{5}(x+1) \end{aligned}$$

15. Derivacija implicitno zadane funkcije daje koeficijent smjera tangente

$$\begin{aligned} 4y^3y' &= 16x^3+6y+6xy' \\ 32y' &= 16+12+6y' \\ y' &= \frac{14}{13} \end{aligned}$$

nakon čega jednadžba tangente glasi

$$y-2=\frac{14}{5}(x-1),$$

a normale

$$y-2=-\frac{5}{14}(x-1).$$

16. Ordinata točke dobiva se rješavanjem jednadžbe

$$\frac{\pi}{4}y-1=0$$
$$y=\frac{4}{\pi}\approx 1.273,$$

dok se nakon koeficijenta smjera

$$\begin{aligned} y+xy'-\frac{1}{\cos^2 x} &= 0 \\ y' &= \frac{8}{\pi}-\frac{16}{\pi^2}\approx 0.925 \end{aligned}$$

dobiva jednadžba tangente $y-1.3=0.9(x-0.8)$ s pristojnom pouzdanošću.

17. Dvije su točke krivulje s istom ordinatom

$$3x^2-x-3+x=0$$
$$x_1=1 \quad x_2=-1$$
$$y_1=3 \quad y_2=3$$

Koeficijenti smjerova dobivaju se derivacijom implicitno zadane funkcije

$$\begin{aligned} 3x^2-xy^2-3y+x &= 0 \\ 6x-y^2-2xyy'-3y'+1 &= 0 \\ 6x-y^2+1 &= y'(2xy+3) \\ y' &= \frac{6x-y^2+1}{2xy+3} \\ y'(1,3) &= \frac{6-9+1}{6+3}=-\frac{2}{9} \\ y'(-1,3) &= \frac{-6-9+1}{-6+3}=\frac{14}{3} \end{aligned}$$

i daju dvije tangente

$$y-3=-\frac{2}{9}(x-1)$$
$$y-3=\frac{14}{3}(x+1)$$

Tangente sijeku os x u točkama $(29/2,0)$ i $(-23/14,0)$, a sjecište je u točki $(-10/11,113/33)$. Iz crteža moguće je dobiti površinu trokuta

$$P=\frac{\frac{113}{7}\cdot\frac{113}{33}}{2}=27.6385 \quad kvadrata.$$

18. Koeficijent smjera tangente nakon deriviranja

$$\begin{aligned}
e^y y'\sin x+e^y\cos x+e^{-x}\cos y+e^{-x}\sin y\cdot y' &= 0 \quad |(0,\pi/2)\\
e^{\pi/2}+y' &= 0\\
y' &= -e^{\pi/2}\approx -4.810
\end{aligned}$$

daje tangentu

$$y-\frac{\pi}{2}=-e^{\frac{\pi}{2}}x.$$

19. Area-sinus hiperbolni $Arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ima inverz

$$\begin{aligned}
y &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})\\
e^y &= x+\sqrt{x^2+1}\\
(e^y-x)^2 &= x^2+1\\
e^{2y}-2xe^y+x^2 &= x^2+1\\
e^{2y}-1 &= 2xe^y\\
x &= \frac{e^{2y}-1}{2e^y}\\
x=f^{-1}(y) &= \frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
shx &= \frac{e^x-e^{-x}}{2},
\end{aligned}$$

sinus hiperbolni. Prva derivacija sinusa hiperbolnog je

$$\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x}\cdot(-1))=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$$

ili kosinus hiperbolni. U točki

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
y_0 &= 0\\
y'(x_0) &= 1\\
y &= x
\end{aligned}$$

20. Inverz je:

$$\begin{aligned}
2y-\pi &= \arcsin\frac{x-1}{3} \\
\sin(2y-\pi) &= \frac{x-1}{3} \\
3\sin(2y-\pi)+1 &= x \\
f^{-1}(x) &= 3\sin(2x-\pi)+1.
\end{aligned}$$

Tangenta na graf inverza

$$\begin{aligned}
x_0 &= \pi/4 \\
y_0 &= f^{-1}(x_0) = 3\sin(\pi/2-\pi)+1 = -3+1 = -2 \\
y' &= 3\cos(2x-\pi)\cdot 2 \\
y'(x_0) &= 0 \\
\textit{tangenta}\ldots & \quad y=-2 \\
\textit{normala}\ldots & \quad x=\pi/4.
\end{aligned}$$

21. Domena se dobiva rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} > 0.$$

Nejednadžba se rješava analizom predznaka brojnika

$$\begin{aligned}
1-\sqrt[3]{x} &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

koji je pozitivan za $x<1$. Nazivnik je uvijek pozitivan kao rezultat drugog korijena. Pitanje je može li se uvijek korjenovati. Analiza izraza pod korijenom počinje traženjem nultočaka.

$$\begin{aligned}
1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2} &= 0 \\
/\sqrt[3]{x} &= t/ \\
1+t+t^2 &= 0 \\
t_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \\
t &\in \emptyset
\end{aligned}$$

Nepostojanje nultočaka ukazuje da je izraz ispod korijena uvijek pozitivan.

$$D=(-\infty,1).$$

Nadalje, $f(0)=0$. Za jednadžbu tangente potrebno je odrediti koeficijent smjera

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}{1-\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}-(1-\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{-\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1-x} \\
&= \frac{-2-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}-(1-\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2})}{6\sqrt[3]{x}(1-x)} \\
&= \frac{-3-3\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x^2}(1-x)} = -\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x^2}(1-x)}
\end{aligned}$$

koji u ishodištu nije izračunljiv. Analizom granične vrijednosti

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}(1-x)} = \pm\infty$$

dobiva se beskonačno velik koeficijent smjera čije je geometrijsko značenje vertikala $x=0$.

22.

$$\begin{aligned}
y_1' = \cos x &\;\Rightarrow\; y_1'(0)=1 \\
y_2' = \cos 2x\cdot 2 &\;\Rightarrow\; y_2'(0)=2 \\
tg\varphi &= \frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3} \\
\varphi &= 18^o
\end{aligned}$$

23. Sjecište parabola:

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 &= -4+6x-x^2 \\
2x^2-10x+8 &= 0 \\
x^2-5x+4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=4,1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1' = 2(x-2) \Rightarrow y_1'(4)=4 \qquad & y_2'(1)=-2 \\
y_2' = 6-2x \Rightarrow y_2'(4)=-2 \qquad & y_2'(1)=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tg\varphi(4) &= \frac{6}{-7}, \qquad \varphi=-41^o \Rightarrow 41^o \\
tg\varphi(1) &= \frac{6}{7}, \qquad \varphi = 41^o.
\end{aligned}$$

Kutevi su u obje točke jednaki jer se za kut između pravaca uzima šiljasti kut.

24. Parabole imaju dva sjecišta $(0,0)$ i $(1,1)$. Koeficijenti smjerova tangenti u sjecištima

$$\begin{array}{lll} y_1' = 2x & y_1'(0) = 0 & y_1'(1) = 2 \\ y_2' = 3x^2 & y_2'(0) = 0 & y_2'(1) = 3 \end{array}$$

ukazuju da se krivulje u ishodištu diraju, dok se u $(1,1)$ sijeku pod kutom

$$tg\varphi = \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7} \Rightarrow \varphi = 8^o.$$

25. Računanje koeficijenta smjera za obje hiperbole

$$\begin{array}{cc} y + xy' = 0 & 2x - 2yy' = 0 \\ y' = -\frac{y}{x} & y' = \frac{x}{y} \end{array}$$

vodi na uvjet okomitosti tangenti u zajedničkim točkama

$$y_1' \cdot y_2' = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1.$$

6.11 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Sljedeće funkcije napišite u obliku potencija pa derivirajte:

$$\begin{array}{llllll} a) & y = \sqrt[3]{x} & b) & y = \sqrt[6]{x} & c) & y = \sqrt[5]{x^3} \\ d) & y = \frac{1}{x^4} & e) & y = \frac{1}{x^5} & f) & y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \\ g) & y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} & h) & y = x^2\sqrt[5]{x^4} & i) & y = \frac{x^5}{\sqrt[6]{x^7}} \end{array}$$

2. Derivirajte $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

3. Derivirajte $y = (2-x)x + (x-1)(x+2)$.

4. Derivirajte $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

5. Derivirajte $y = (2-x^2)cosx + 2xsinx$.

6. Derivirajte $y = \frac{\sqrt{x}}{lnx}$.

7. Izračunajte vrijednost $y'(-2)$ funkcije $y = \frac{x^3}{x^2+3}$.

8. Odredite prvu derivaciju funkcije $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x - \sin x}$.

9. Derivirajte funkciju $y = \arcsin 2x$.

10. Odredite prvu derivaciju funkcije $y = 5 \cdot e^{-x^2}$.

11. Derivirajte $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

12. Odredite derivaciju funkcije $y = \frac{1}{5^{x^2}}$.

13. Odredite prve derivacije sljedećih složenijih funkcija

(a) $y = \sqrt{xe^x + x}$

(b) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} - (\arcsin x)^3$

(c) $y = arctg(\ln x) + \ln(arctgx)$

(d) $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$

14. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $y = \frac{7}{x^3}$

(b) $y = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$

(c) $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$

(d) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

(e) $y = 3x^3\ln x - x^3$

(f) $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

(g) $y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

(h) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$

(i) $y = \sqrt{1 - 3x^2}$

(j) $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$

(k) $y = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

(l) $y = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$

(m) $y = \cos^3\frac{x}{3}$

(n) $y = \ln tg\frac{2x+1}{4}$

(o) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

15. Izračunajte vrijednosti prvih derivacija u zadanim točkama.

(a) Odredite $y'(1)$ ako je zadana funkcija

$$y = x^3.$$

(b) Za

$$y = 2x^4 - \sqrt{3}$$

odredite $y'(2)$.

(c) Izračunajte $y'(-1)$ za

$$y = \frac{1}{x}.$$

(d) Kolika je vrijednost $y'(0)$ ako je

$$y = \sqrt{1 + 2x}?$$

(e) Zadana je funkcija
$$f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$
Izračunajte $f'(-1)$.

(f) Koliko je $f'(64)$ ako je
$$f(x) = \sqrt[6]{x}?$$

(g) Ako je
$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x - \sqrt{10},$$
koliko je $y'(0)$?

(h) Neka je
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Odredite $y'(4)$.

(i) Odredite vrijednost prve derivacije funkcije
$$f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}$$
za $x = 27$.

(j) Odredite $y'(0)$ za funkciju
$$y = \frac{2x+3}{4}.$$

(k) Neka je
$$z = (\sqrt{2} - \sqrt{t})^2.$$
Odredite brzinu
$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = z'(t)$$
u točki $t = \frac{1}{4}$.

(l) Jednadžba gibanja glasi
$$s = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^2.$$
Izračunajte $s'(8)$ odnosno brzinu na kraju 8. sekunde.

(m) Broj uplata lota Q ovisi o broju dobitnika k po formuli
$$Q = \frac{1000k^2}{k^2+1}.$$
Izračunajte $Q'(5)$, tj. graničnu vrijednost broja uplata kod poznatog broja od 5 dobitaka.

(n) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Izračunajte $f'(0)$.

(o) Izračunajte $y'(-1)$ za graf funkcije $y = f(x)$ ako je zadano

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

(p) Za vrijednost argumenta $x = \pi/3$ izračunajte vrijednost prve derivacije funkcije

$$y = \frac{x \sin x}{1 + tgx}.$$

(q) Ako je $x = 1$, $y = x \arcsin x$, koliko je y'?

(r) Neka je

$$y = arctgx - \frac{x}{1+x^2}.$$

Izračunajte $y'(-1)$.

(s) Zadana je funkcija

$$y = \frac{1}{(1-x^2)^5}.$$

Odredite $y'(2)$.

(t) Za funkciju

$$y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$$

izračunajte $y'(5)$.

(u) Odredite $y'(0)$ ako je zadana funkcija

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

(v) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin^2 x^3.$$

Izračunajte $y'(-1.5)$.

(w) Zavisna varijabla računa se po formuli $y = \arccos(1-2x)$. Koliko je $y'(1/4)$?

(x) Odredite $y'(4)$ ako je zadana funkcija

$$y = \arcsin \frac{2}{x}.$$

(y) Ako je $y = \ln \sin x$ i $x = \pi/4$, koliko je y'?

(z) Za
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$$
izračunajte $y'(-4)$.

16. Izračunajte $f(3)$ i $f'(3)$ za funkciju $f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + 3 \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} + \frac{1}{2} \arctan x$.

17. Odredite koordinate točaka u kojima koordinatne osi siječe tangenta povučena na $y = lnx$ u točki s apscisom $x = 1$.

18. Kolika je površina koju s koordinatnim osima određuje tangenta povučena na graf sinusoide $y = 3sin(2x - \frac{\pi}{4})$ u točki s apscisom $x = \frac{3\pi}{4}$?

19. Odredite y' iz
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$
gdje je a proizvoljna konstanta.

20. Izračunajte vrijednost funkcije
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$$
u točki za koju je $y = 4$.

21. Izračunajte vrijednost funkcije
$$e^y + xy = e$$
u točki $(0, 1)$.

22. Izračunajte vrijednost funkcije
$$x \ln y - y \ln x = 1$$
u točki za koju je $x = 1$.

23. Provjerite da
$$arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$
zadovoljava diferencijalnu jednadžbu
$$x(dy - \Delta x) = y(\Delta x + dy).$$

24. Izračunajte $df_{x=2}$ ako je
$$f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$$

25. Kako glasi dy ako je
$$y = (x - 3)\sqrt{x}?$$

26. Izračunajte $y'(-2)$ ako je
$$y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}.$$

27. Krivulja je zadana parametarski

$$\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

Odredite derivaciju

$$\frac{dy}{dx}.$$

28. Dokažite da funkcija y zadana parametarski jednadžbama

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

zadovoljava *diferencijalnu jednadžbu*

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Rješenja.

1. a) $y = x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, b) $y = x^{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, c) $y = x^{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow y' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$, d) $y = x^{-4} \quad \Rightarrow y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$, e) $y = x^{-5} \quad \Rightarrow y' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$, f) $y = x^{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow y' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$, g) $y = x^{-\frac{4}{7}} \quad \Rightarrow y' = -\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{4}{7x\sqrt[7]{x^4}}$, h) $y = x^2 \cdot x^{\frac{4}{5}} = x^{\frac{14}{5}} \quad \Rightarrow y' = \frac{14}{5}x^{\frac{9}{5}} = \frac{14x\sqrt[5]{x^4}}{5}$, i) $y = \frac{x^5}{\sqrt[6]{x^7}} = \frac{x^5}{x^{\frac{7}{6}}} = x^{\frac{23}{6}} \quad \Rightarrow y' = \frac{23}{6}x^{\frac{17}{6}} = \frac{23x^2\sqrt[6]{x^5}}{6}$.

2. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

3. $y' = 3$

4. $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. $y' = x^2 \sin x$

6. $y' = \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}\ln^2 x}$.

7. $y' = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{52}{49}$.

8. $y' = \frac{1-\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)^2}$.

9. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

10. $y' = 5 \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -10xe^{-x^2}$.

11. $y' = 2\ln x(\ln x)' - \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x}(2\ln x - \frac{1}{\ln x})$.

12. Priprema derivacije $y = 5^{-x^2}$ olakšava deriviranje $y' = 5^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot \ln 5 = -\frac{2x \cdot \ln 5}{5^{x^2}}$.

13. (a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{xe^x + x}} \cdot (e^x + xe^x + 1)$

(b) priprema olakšava deriviranje

$$\begin{aligned} y &= \sin^{\frac{2}{3}} x - (\arcsin x)^3 \\ y' &= \frac{2}{3} \sin^{-\frac{1}{3}} x \cos x - 3(\arcsin x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y' &= \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3 \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(c) $y' = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

(d) $y' = \frac{1}{\cos \frac{x-1}{x}} \cdot (-\sin \frac{x-1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \tan \frac{x-1}{x}$

14. (a) $y' = -\frac{21}{x^4}$

(b) $y' = \sqrt[3]{x}$

(c) $y' = x(x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3} + x^6)$

(d) $y' = -x^2 e^{-x}$

(e) $y' = 9x^2 \ln x$

(f) $y' = (\frac{8}{9})^x \ln \frac{8}{9}$

(g) $y' = x^2 \cos x$

(h) $y' = 6\frac{x+1}{2x^2+3x}$

(i) $y' = -\frac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$

(j) $y' = \arccos \frac{x}{2} + \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}$

(k) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x}$

(l) $y' = -\cos x$

(m) $y' = -\cos^2 \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3}$

(n) $y' = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}$

(o) $y' = \frac{1}{\cos x}$

15. a) $y'(1) = 3$, b) $y'(2) = 64$, c) $y'(-1) = -1$, d) $y'(0) = 1$, e) $f'(-1) = 3$, f) $y'(64) = 1/192$, g) $y'(0) = 4$, h) $y'(4) = -1/16$, i) $y'(27) = -\frac{20}{3^7}$, j) $y'(0) = 1/2$, k) $\frac{\Delta z}{\Delta t}(\frac{1}{4}) = 1 - 2\sqrt{2}$, l) $s'(8) = 1/48$, m) $Q'(5) = 14.79$ (znači da svaki sljedeći dobitak kod poznatih 5 dobitaka donosi otprilike 15 novih uplata), n) $y'(0) \to +\infty$, o) $-1/6$, p) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}}{(1+\sqrt{3})^2} \approx -0.14$, q) $y'(1) \to \infty$, r) $y'(-1) = 1/2$, s) $\frac{20}{3^6} \approx 0.027$, t) $y'(5) = -4/75$, u) $y'(0) = -1$, v) 3.0378, w) $y'(\frac{1}{4}) = 4/\sqrt{3}$, x) $y'(4) = -1/4\sqrt{3}$, y) $y'(\pi/4) = 1$, z) $y'(4) = 1/5$.

16. Jednostavnosti računanja radi, treba iskoristiti svojstva logaritma:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\arctan x \\
f(3) &= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3}{4}\ln 5 - \ln 3 + \frac{1}{2}\arctan 3 = 0.906276 \\
f(x) &= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) - \frac{3}{4}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\arctan x \\
f'(x) &= \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{6x}{4(x^2+1)} - \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2(x^2+1)} \\
f'(3) &= 0
\end{aligned}$$

17. Diralište je $(1,0)$, tangenta $y = x - 1$, sjecišta s koordinatnim osima su $(1,0)$ i $(0,-1)$.

18. Diralište $(\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, tangenta

$$y + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}(x - \frac{3\pi}{4}),$$

a tražena površina $P = \frac{3\sqrt{2}(3\pi-2)^2}{32}$.

19. $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

20. $y'(4,4) = -1$.

21. $y'(0,1) = -e^{-1}$.

22. $y'(1,e) = e^2 - e$.

23. Dokaz završava traženom jednakosti

24. $df_{x=2} = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}\Delta x = \frac{1}{2(1+\sqrt{3})}\Delta x$

25. $dy = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$

26. $y'(-2) = \frac{8}{63}\sqrt[3]{\frac{7}{9}} \approx 0.12$.

27. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{1-t^2}$.

28. Dokaz završava traženom jednakosti.

7 Primjene derivacija

Jednostavnost i razrađenost tehnike deriviranja omogućavaju primjenu derivacija u svim područjima ljudske djelatnosti. U ovoj zbirci su obuhvaćene primjene u geometriji.

7.1 Lokalni ekstremi. Intervali monotonosti

Funkcije koje se obrađuju u ovoj točki eksplicitno su zadane formulom

$$y = f(x).$$

Funkcija raste na intervalu $< a, b >$ ako vrijedi

$$x_1, x_2 \in < a, b >, \quad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ako na intervalu $< a, b >$ vrijedi

$$f'(x) > 0 \quad x \in < a, b >,$$

onda je funkcija rastuća na intervalu $< a, b >$.

Funkcija pada na intervalu $< a, b >$ ako vrijedi:

$$x_1, x_2 \in < a, b >, \quad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ako na intervalu $< a, b >$ vrijedi

$$f'(x) < 0 \quad x \in < a, b >,$$

onda je funkcija padajuća na intervalu $< a, b >$.

Interval monotonosti funkcije je interval na kojem funkcija stalno raste ili stalno pada.

Lokalni maksimum funkcije je vrijednost funkcije $f(x_1)$ za koju postoji $\delta > 0$ tako da

$$|x - x_1| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < f(x_1).$$

Lokalni minimum funkcije je vrijednost funkcije $f(x_2)$ za koju postoji $\delta > 0$ tako da

$$|x - x_1| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > f(x_2).$$

Stacionarna točka domene je ona vrijednost varijable x_0 za koju je

$$f'(x_0) = 0.$$

Lokalni minimumi i maksimumi nazivaju se lokalnim ekstremima funkcije. Lokalni ekstremi funkcije vrijednosti poprimaju samo u stacionarnim točkama, no postoje stacionarne točke u kojima funkcija ne poprima ekstremnu vrijednost.

Primjer 7.1. *Točka $x_0 = 0$ stacionarna je točka funkcije $y = x^3$, no funkcija u toj točki ne postiže lokalni ekstrem.*

Dokaz. Prva derivacija $y' = 3x^2$ očito pokazuje da je $x_0 = 0$ stacionarna točka. No, na intervalu $x \in < -\infty, 0 >$ vrijedi da je $y(x) < 0 = y(0) = 0$, dok na intervalu $x \in < 0, +\infty >$ vrijedi $y(0) = 0 < y(x)$.

Nužan uvjet za postojanje ekstrema u točki x_0 je

$$f'(x_0) = 0.$$

Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema je promjena predznaka prve derivacije u stacionarnoj točki.

Druga derivacija svojom pozitivnošću u stacionarnoj točki ukazuje na lokalni minimum, a svojom negativnošću ukazuje na lokalni maksimum. Slabe strane provjere drugom derivacijom su obaveza deriviranja i slučaj kad je i druga derivacija jednaka nuli.

Zadatak 7.1. *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$y = x^2 - 2x + 5.$$

Rješenje. Domena funkcije je R. Nužan uvjet je

$$\begin{aligned} y' &= 2x - 2 \\ y' &= 0 \quad \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Analiza predznaka na brojevnom pravcu

$x:$	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	4	$\nearrow$	

daje
interval pada $< -\infty, 1 >$,
interval rasta $< 1, +\infty >$,
minimum u točki $T_{min} = (1, 4)$.

Zadatak 7.2. *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$y = \frac{x}{x-2}.$$

Rješenje. Domena funkcije očito je

$$D = < -\infty, 2 > \cup < 2, +\infty >$$

jer jedini uvjet za računanje vrijednosti funkcije predstavlja dijeljenje koje u nuli nije definirano.

Prva derivacija

$$y' = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

definirana je na cijeloj domeni. Očito je da prva derivacija poprima samo negativne vrijednosti jer je nazivnik kao kvadrat uvijek pozitivan broj. Intervali pada funkcije su $< -\infty, 2 >$ i $< 2, +\infty >$.

Zadatak 7.3. *Za funkciju*

$$f(x) = x \ln x$$

odredite intervale monotonosti.

Rješenje. Budući se logaritmirati mogu samo pozitivni brojevi, domena funkcije je

$$D =< 0, +\infty > .$$

Prva derivacija

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

ima nultočku za

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1|_e \\ x &= e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.36788. \end{aligned}$$

Domena se ovom nultočkom dijeli na dva dijela

$$D =< 0, \frac{1}{e} > \cup < \frac{1}{e}, +\infty > .$$

Ni na jednom dijelu nultočaka više nema. Uzimanjem točke

$$0.1 \in< 0, 0.36788 >$$

i uvrštavanjem u prvu derivaciju dobiva se

$$y'(0.1) = \ln 0.1 - 1 = -1.30$$

negativna vrijednost koja zbog neprekidnosti prve derivacije na intervalu $< 0, \frac{1}{e} >$ povlači da je prva vrijednost negativna na cijelom intervalu. Naime, promjena predznaka neprekidne funkcije povlači nužno postojanje nultočke.
Analogno, uvrštavanjem vrijednosti varijable $10 \in< \frac{1}{e}, +\infty >$ u formulu prve derivacije

$$y'(10) = \ln 10 + 1 = 3.30$$

pozitivna vrijednost ukazuje da je prva derivacija pozitivna na cijelom intervalu $< \frac{1}{e}, +\infty >$. Interval rasta funkcije je $< \frac{1}{e}, +\infty >$, a interval pada $< 0, \frac{1}{e} >$.

Napomena 7.1. *Promjena vrijednosti neprekidne funkcije slična je promjeni temperature. Negativna temperatura pri prirodnom, neprekidnom, prijelazu u pozitivnu mora bar u jednom trenutku biti nula. Eksplozija mine u snijegu ili puštanje CO_2 iz boce u požaru nisu neprekidne promjene temperature.*

Zadatak 7.4. *Ispitajte monotonost funkcije*

$$y = \arcsin(1 + x).$$

Rješenje. Domena funkcije dobiva se iz ograničenja

$$\begin{aligned} -1 \leq 1 + x \leq 1 &| - 1 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ D = [-2, 0]. \end{aligned}$$

Prva derivacija

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 + x)^2}} > 0$$

daje rast funkcije na cijeloj domeni $[-2, 0]$.

Zadatak 7.5. *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

Rješenje. Funkcija nije definirana u nultočki nazivnika

$$\begin{aligned} x - 1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \\ D = R \setminus \{1\} &= \ < -\infty, 1 > \cup < 1, +\infty > . \end{aligned}$$

Nultočke prve derivacije su

$$\begin{aligned} y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} &= 0 \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} &= 0 | \cdot (x-1)^2 \\ x(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Nultočke i točka prekida dijele skup realnih brojeva na tri dijela

$$< -\infty, 0 > \cup < 0, 1 > \cup < 1, 2 > \cup < 2, +\infty > .$$

Uvrštavanjem u prvu derivaciju po jedne točke svakog segmenta dobiva se

$$\begin{aligned}
-2 \in <-\infty, 0> \quad &\Rightarrow \quad y'(-2) = \frac{8}{9} > 0 \\
0.5 \in <0, 1> \quad &\Rightarrow \quad y'(0.5) = \frac{-0.75}{0.25} < 0 \\
1.5 \in <1, 2> \quad &\Rightarrow \quad y'(1.5) = \frac{-0.75}{0.25} < 0 \\
3 \in <2, +\infty> \quad &\Rightarrow \quad y'(3) = \frac{3}{4} > 0
\end{aligned}$$

- točka lokalnog maksimuma $(0, -2)$, budući funkcija raste do 0, a zatim pada
- točka lokalnog minimuma $(2, 2)$, jer funkcija pada za manje, a raste za vrijednosti varijable veće od 2.

Zadatak 7.6. *Odredite ekstreme funkcije*

$$y = \frac{x^3}{x^2+3}.$$

Rješenje. Budući je funkcija definirana na cijelom R, nužan uvjet traži nultočku prve derivacije.

$$\begin{aligned}
y' = \frac{3x^2(x^2+3) - x^3(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2} \quad &= \quad 0 \\
x^2 \quad &= \quad 0 \\
x_0 \quad &= \quad 0
\end{aligned}$$

Nultočke prve derivacije dijeli domenu $D = R$ na dva dijela

$$<-\infty, 0> \cup <0, +\infty> .$$

Uvrštavanjem broja $-1 \in <-\infty, 0>$ u formulu

$$y'(-1) = \frac{1 \cdot 10}{16} > 0,$$

a zatim $1 \in <0, +\infty>$

$$y' = \frac{1 \cdot 10}{16} > 0$$

postaje jasno da funkcija ne mijenja tok, već je rastuća na oba dijela. Zbog toga stacionarna točka nije točka ekstrema.

Zadatak 7.7. *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$y = x^2 e^{-x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} D = R \\ y' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x} \cdot (-1) = xe^{-x}(2-x) \\ y' = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Analiza na brojevnom pravcu daje

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	
			min		max		

Lokalni minimum je $(0, 0)$, a lokalni maksimum je $(2, 4e^{-2})$.

Zadatak 7.8. *Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije*

$$y = x \ln^2 x.$$

Rješenje. Domena je ograničena logaritmom

$$D =< 0, +\infty > .$$

Nultočke prve derivacije

$$\begin{aligned} y' = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} &= 0 \\ \ln x(\ln x + 2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= e^{-2} \end{aligned}$$

vode na analizu predznaka prve derivacije na domeni

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Analiza daje rast funkcije na intervalima

$$< 0, \frac{1}{e^2} > \cup < 1, +\infty >$$

i pad funkcije na intervalu

$$< \frac{1}{e^2}, 1 > .$$

Lokalni maksimum iznosi $\frac{4}{e^2}$ i postiže se za $x_1 = \frac{1}{e^2}$, a lokalni minimum je točka $(1, 0)$.

Zadatak 7.9. *Odredite i klasificirajte lokalne ekstreme funkcije*

$$y = 2\sin 2x + \sin 4x.$$

Rješenje. Domena je R. Prva derivacija

$$\begin{aligned}
y' = 2\cos 2x \cdot 2 + \cos 4x \cdot 4 &= 0\\
4\cos 2x + 4\cos 4x &= 0| : 4\\
\cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x &= 0\\
\cos 2x + \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) &= 0\\
2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 &= 0, \qquad \cos 2x = t\\
2t^2 + t - 1 &= 0\\
t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}&\\
t_1 = -1; \qquad t_2 = \frac{1}{2}&
\end{aligned}$$

daje beskonačno mnogo nultočaka

$$\begin{array}{cc}
\cos 2x = -1 & \cos 2x = \frac{1}{2}\\
2x = \pi + 2k\pi, k \in Z & 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\\
x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z
\end{array}$$

pomoću kojih se analizira predznak prve derivacije na brojevnom pravcu

x	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} \simeq -\frac{\pi}{2}$	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$

Analiza pokazuje da su lokalni minimumi funkcije u točkama $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}, k \in Z$, dok lokalne maksimume funkcija postiže u točkama $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}, k \in Z$.

Zadaci.

1. Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije

$$y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

2. Odredite domenu i intervale monotonosti funkcije

$$y = \frac{x}{ln^2 x}.$$

3. Odredite domenu i intervale monotonosti funkcije

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

4. Odredite domenu, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$y = \ln \frac{2x-3}{x-1}.$$

5. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$y = xe^{x-x^2}.$$

6. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija

   (a)
   $$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1,$$

   (b)
   $$y = \frac{x^3 - x^2}{e^{-x}},$$

   (c)
   $$y = \ln^4 x - \ln^2 x.$$

Rješenja.

1. Domena $D = (0, +\infty)$. Prva derivacija i njena nultočka su

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{(x^2)^2} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 - 2\ln x = 0 \\ \frac{1}{2} = \ln x \\ x = e^{1/2} \approx 1.649 \end{array}$$

Analiza predznaka na brojevnom pravcu

$$\begin{array}{c|cccccc} x: & 0 & & e^{1/2} & & +\infty \\ \hline y' & ! & + & 0 & - & \\ y & ! & \nearrow & \frac{1}{2e} & \searrow & \end{array}$$

daje odgovore

- interval rasta $(0, e^{1/2})$,
- interval pada $(e^{1/2}, +\infty)$,
- lokalni maksimum $M = (e^{1/2}, \frac{1}{2e})$.

2. Zbog nazivnika koji ne smije biti nula je

$$D = <0, 1> \cup <1, +\infty> .$$

Prva derivacija je

$$y' = \frac{\ln^2 x - x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x(\ln x - 2)}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}.$$

Analiza predznaka provodi se nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika

$$\begin{array}{cc} \ln x = 2 & \ln x = 0 \\ x = e^2 \approx 7.389 & x = 1. \end{array}$$

Na brojevnom pravcu

$$\begin{array}{c|ccccccc} x: & 0 & & 1 & & e^2 & & +\infty \\ \hline y' & ! & + & ! & - & 0 & + & \\ y & ! & \nearrow & ! & \searrow & \frac{e^2}{4} & \nearrow & \end{array}$$

dobivaju se odgovori

$$\begin{array}{rl} \textit{intervali rasta} & <0,1> \cup <e^2,+\infty> \\ \textit{interval pada} & <1,e^2> \\ \textit{lokalni minimum} & (e^2, \dfrac{e^2}{4}) \end{array}$$

3. Domena je $D = R \setminus \{-1, 1\}$. Iz prve derivacije

$$y' = \frac{x^2 - 1 - 2x \cdot x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}$$

zaključuje se da je prva derivacija uvijek negativna pa je funkcija padajuća na cijeloj domeni.

4. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{2x-3}{x-1} > 0.$$

Nultočke brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu daju

$$\begin{array}{c|ccccccc} x: & -\infty & & 1 & & 3/2 & & +\infty \\ \hline \frac{2x-3}{x-1} & & + & ! & - & 0 & + & \end{array}$$

domenu

$$D = <-\infty, 1> \cup <3/2, +\infty> .$$

Prva derivacija

$$y' = \frac{x-1}{2x-3} \cdot \frac{2(x-1) - (2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x + 3}{(2x-3)(x-1)} = \frac{1}{(2x-3)(x-1)}$$

nakon analogne analize daje rastuću monotonost funkcije na cijeloj domeni.

5. Funkcija je definirana na cijelom R. Prva derivacija i nultočke su

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x-x^2} + x \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x) = e^{x-x^2} \cdot (1 + x - 2x^2) \\
y' &= 0 \\
2x^2 - x - 1 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

brojevni pravac:

$$\begin{array}{l|ccccccccc}
x: & -\infty & & -1/2 & & 1 & & +\infty \\
\hline
y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\
y & & \searrow & -\frac{e^{-3/4}}{2} & \nearrow & 1 & \searrow &
\end{array}$$

intervali monotonosti:

$$\begin{aligned}
&\textit{intervali} \quad \textit{pada}: && < -\infty, -1/2 > \cup < 1, +\infty > \\
&\textit{interval} \quad \textit{rasta}: && < -1/2, 1 >
\end{aligned}$$

$$\textit{lokalni} \quad \textit{minimum} \quad (-1/2, \frac{-e^{-3/4}}{2}), \qquad \textit{lokalni} \quad \textit{maksimum} \quad (1,1).$$

6. (a) $D = R$.

$$\begin{aligned}
y' &= 2x^2 - 2 \\
y' = 0 \Leftrightarrow & \quad x_1 = 1, x_2 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|ccccccc}
x: & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\
\hline
y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\
y & & \nearrow & \frac{7}{3} & \searrow & -\frac{1}{3} & \nearrow &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\textit{raste} &\quad < -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty > \\
\textit{pada} &\quad < -1, 1 > \\
T_{max} = (-1, \frac{7}{3}) &\quad T_{min} = (1, -\frac{1}{3})
\end{aligned}$$

(b) Domena funkcije je R. Slijedi analiza prve derivacije. Radi jednostavnosti deriviranja, mudro je algebarski dotjerati formulu funkcije:

$$y = e^x(x^3 - x^2).$$

Nadalje

$$\begin{aligned}
y' &= e^x(x^3 - x^2) + e^x(3x^2 - 2x) = e^x(x^3 + 2x^2 - 2x) = xe^x(x^2 + 2x - 2) \\
y' &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_{2,3} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\
x_2 &= -1 - \sqrt{3} = -2.73 \\
x_3 &= -1 + \sqrt{3} = 0.73
\end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$e^{-1-\sqrt{3}}(-14-8\sqrt{3})$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$e^{-1+\sqrt{3}}(-14+8\sqrt{3})$	$\nearrow$	

$$\begin{aligned}
\textit{intervali pada} \quad & <-\infty,-1-\sqrt{3}> \cup <0,-1+\sqrt{3}> \\
\textit{intervali rasta} \quad & <-1-\sqrt{3},0> \cup <-1+\sqrt{3},+\infty> \\
\textit{lokalni minimumi} \quad & (-1-\sqrt{3},-e^{-1-\sqrt{3}}(14+8\sqrt{3}) \approx -1.813), \\
& (-1+\sqrt{3},e^{-1+\sqrt{3}}(-14+8\sqrt{3}) \approx -0.2986) \\
\textit{lokalni maksimum} \quad & (0,0)
\end{aligned}$$

(c) Domena je $<0,+\infty>$. Prva derivacija

$$y' = 4\ln^3 x \cdot \frac{1}{x} - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x(2\ln^2 x - 1)}{x}$$

daje nultočke

$$\begin{array}{ccc}
\ln x = 0 & \ln^2 x = \frac{1}{2} & \\
x_1 = 1 & \ln x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ln x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & x_2 = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 2 & x_3 = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0.5
\end{array}$$

koje na brojevnom pravcu daju analizu

$x:$	0		$e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$		1		$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$		$+\infty$
y'	!	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	!	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

koja daje

- intervale pada $<0,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}> \cup <1,e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}>$,
- intervale rasta $<e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}},1> \cup <e^{\frac{1}{\sqrt{2}}},+\infty>$,
- lokalni maksimum $(1,0)$,
- lokalni minimumi $(e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}},-\frac{1}{4})$, $(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}},-\frac{1}{4})$.

7.2 Točke infleksije. Intervali konveksnosti i konkavnosti

Za neprekidnu funkciju f kažemo da je **konveksna** ako je područje iznad grafa konveksno. To je ekvivalentno tvrdnji da je za bilo koje dvije točke na grafu, dio grafa između te dvije točke ispod spojnice te dvije točke. Na intervalu konveksne zakrivljenosti druga derivacija funckije je pozitivna.

Za neprekidnu funkciju f kažmo da je **konkavna** ako je područje ispod grafa konveksno. To je ekvivalentno tvrdnji da je za bilo koje dvije točke na grafu, dio grafa između te dvije točke iznad spojnice te dvije točke. Na intervalu konkavne zakrivljenosti druga derivacija funckije je negativna.

Točka infleksije je točka grafa $(x_0, f(x_0))$ u kojoj funkcija mijenja način zakrivljenosti. U točki infleksije druga derivacija jednaka je nuli, no obrat ne vrijedi.

Zadatak 7.10. *Odredite točke infleksije grafa funkcije*

$$y = e^{-x^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije je cijeli skup R.
Prva derivacija

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

Druga derivacija

$$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Nultočke druge derivacije su

$$\begin{aligned}
-2e^{-x^2}(1-2x^2) &= 0 \\
1-2x^2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \\
x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
x_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Analiza predznaka druge derivacije izvodi se na brojevnom pravcu:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$	$e^{-1/2}$	$\cap$	$e^{-1/2}$	$\cup$	

Točke infleksije su $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$ i $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$.

Zadatak 7.11. *Odredite točke infleksije polinoma*

$$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7.$$

Rješenje. Domena je R. Nultočke druge derivacije su

$$\begin{aligned}
y' &= 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12 \\
y'' &= 36x^2 - 60x - 24 \\
36x^2 - 60x - 24 &= 0| : 12 \\
3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Analiza na brojevnom pravcu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\cup$	$-\frac{322}{27}$	$\cap$	-63	$\cup$	

pokazuje da se infleksija postiže u točkama domene $x_1 = -\frac{1}{3}$ i $x_2 = 2$.

Zadatak 7.12. *Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije funkcije*

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rješenje. Funkcija je definirana na svim realnim brojevima. Prva i druga derivacija daju

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\
y'' &= \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(1+x^2)(1+x^2+2(1-x^2))}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -\sqrt{3} \\
x_3 &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Analiza predznaka druge derivacije na brojevnom pravcu daje

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cap$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cup$	0	$\cap$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cup$	

intervale konveksnosti

$$< -\sqrt{3}, 0 > \cup < \sqrt{3}, +\infty >,$$

intervale konkavnosti

$$< -\infty, -\sqrt{3} > \cup < 0, \sqrt{3} >$$

i točke infleksije

$$(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (0,0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Zadaci.

1. Odredite intervale zakrivljenosti i točke infleksije grafova funkcija:

   (a)
   $$y = 3x^5 - 2x^6$$

(b)
$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$
(c)
$$y = xe^{1-x}$$
(d)
$$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$
(e)
$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
(f)
$$y = \arcsin \frac{1}{x-1}$$

Rješenja.

1. (a) Domena je R. Slijedi

$$\begin{aligned} y' &= 15x^4 - 12x^5 \\ y'' &= 60x^3 - 60x^4 = 60x^3(1-x) \\ y'' = 0 & \quad \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\cap$	0	$\cup$	1	$\cap$	

$$\begin{aligned} konveksna: & \quad < 0,1 > \\ konkavna: & \quad < -\infty, 0 > \cup < 1, +\infty > \\ Infleksija: & \quad (0,0) \quad i \quad (1,1) \end{aligned}$$

(b) Domena je $R \setminus \{1\}$. Nadalje:

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2}$$

$$y'' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3-1)^2 - 2(x^3-1)\cdot 3x^2 \cdot (x^6 - 4x^3)}{(x^3-1)^4}$$

$$= \frac{6x^2(x^3-1)[(x^3-2)(x^3-1) - x^3(x^3-4)]}{(x^3-1)^4}$$

$$y'' = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt[3]{2}$$

$x:$	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$-$	$!$	$+$	
y		$\cup$	$\frac{2\sqrt[3]{2}}{-3}$	$\cap$	0	$\cap$	$!$	$\cup$	

$$konveksnost: < -\infty, -\sqrt[3]{2} > \cup < 1, +\infty >$$

$$konkavnost: < -\sqrt[3]{2}, 1 >$$

$$infleksija: (-\sqrt[3]{2}, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3})$$

(c) Domena je skup R. Dalje slijedi prva, druga derivacija, analiza i odgovor:

$$y' = e^{1-x} + xe^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x}(1-x)$$

$$y'' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$x:$	$-\infty$		2		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	$\frac{2}{e}$	$\cup$	

$$konkavnost: \quad < -\infty, 2 >$$

$$konveksnost: \quad < 2, +\infty >$$

$$Infleksija: \quad (2, \frac{2}{e})$$

(d) Računanje vrijednosti funkcije nema ograničenja pa je $D = R$. Prva i druga derivacija:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} \cdot (4x - 3x^2) = \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}}$$

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4-6x)\cdot\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2} - \frac{2(4x-3x^2)}{3\sqrt[3]{2x^2-x^3}} \cdot (4x-3x^2)}{\sqrt{(2x^2-x^3)^4}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{-8x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}.$$

Analiza predznaka druge derivacije slijedi nakon otkrivanja nultočaka brojnika i nazivnika. Nultočka brojnika

$$x = 0$$

Nultočke nazivnika

$$\begin{aligned} 2x^2 - x^3 &= 0 \\ x^2(2-x) &= 0 \\ x_1 = 0 & \qquad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Analiza zakrivljenosti na brojevnom pravcu

$$\begin{array}{ccccccccc} x: & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ y'' & & - & ? & - & ? & + & \\ y & & \cap & 0 & \cap & 0 & \cup & \end{array}$$

daje interval konkavnosti $< -\infty, 2 >$ i interval konvenksnosti $< 2, +\infty >$. Točka $(2, 0)$ je točka grafa u kojoj funkcija mijenja zakrivljenost pa je to točka infleksije.

(e) Domena funkcije je rješenje nejednadžbe

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x} > 0.$$

Budući ni brojnik ni nazivnik nemaju nultočaka, rješenje nejednadžbe je cijeli R ili nejednadžbu uopće nije moguće zadovoljiti. Budući postoji $y(0)$,

$$D = R.$$

Deriviranje:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)(\sqrt{x^2+1} + x) - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)^2} \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x - (2x + \sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x)}{x^2 + 1 - x^2} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} \\ y'' &= \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \end{aligned}$$

Nazivnik je uvijek pozitivan. Nultočke brojnika omogućavaju analizu predznaka druge derivacije na brojevnom pravcu

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	0	$\cup$	

$$\begin{aligned} Infleksija: &\quad (0,0) \\ konveksnost: &\quad <0,+\infty> \\ konkavnost: &\quad <-\infty,0> \end{aligned}$$

(f) Prvi je problem domena:

$$-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1.$$

Rješava se posebno lijeva, posebno desna nejednadžba:

$$\begin{array}{cc} -1 \leq \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} \leq 1 \\ 0 \leq 1 + \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} - 1 \leq 0 \\ 0 \leq \frac{x-1+1}{x-1} & \frac{1-x+1}{x-1} \leq 0 \\ 0 \leq \frac{x}{x-1} & \frac{2-x}{x-1} \leq 0 \end{array}$$

Rješenje lijeve nejednadžbe je $<-\infty,0> \cup <1,+\infty>$, rješenje desne $<-\infty,1> \cup <2,+\infty>$, a obje nejednadžbe mogu zadovoljiti brojevi iz intervala

$$<-\infty,0> \cup <2,+\infty>.$$

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije zahtijevaju deriviranje:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(x-1)^4-(x-1)^2}} = -\left((x-1)^4-(x-1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ y'' &= \frac{1}{2}\left((x-1)^4-(x-1)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(4(x-1)^3-2(x-1)\right) \\ &= \frac{(x-1)(4x^2-8x+4-2x+2)}{2\sqrt{[(x-1)^4-(x-1)^2]^3}} \\ &= \frac{(x-1)(2x^2-5x+3)}{\sqrt{[(x-1)^4-(x-1)^2]^3}} \end{aligned}$$

Nultočke brojnika su $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{3}{2}$. Nultočke nisu u domeni. Analiza predznaka druge derivacije na domeni

$x:$	$-\infty$		0			2		$+\infty$
y''		$-$	$!$	*izvan*	*domene*	$?$	$+$	
y		$\cap$	$-\frac{\pi}{2}$		$?$	$\frac{\pi}{2}$	$\cup$	

daje konveksnost za $<2,+\infty>$ i konkavnost za $<-\infty,0>$. Točaka infleksije nema.

7.3 L'Hospitalovo pravilo

Neodređenost u računanju limesa dolazi kada uvrštavanje vrijednosti c dovodi do diskusije tipa

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

odnosno

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

L'Hospital je dokazao da, ako u tom slučaju postoji

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

onda je taj limes jednak početnom.

Primjer 7.2. *L'Hospitalovo je pravilo očito na primjeru*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = L'H = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

što je u poglavlju o limesu funkcije pokazano eksperimentalno.

Zadatak 7.13. *Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

Rješenje. Uvrštavanje vrijednosti 0 u funkciju čiji se limes traži dovodi do neodređenog oblika koji rješavamo L'Hospitalovim pravilom.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \frac{-\infty}{-\infty}.$$

L'Hospital predlaže deriviranje posebno brojnika i nazivnika

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{tg2x} = \frac{0}{0} \\ &= L'H = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Zadatak 7.14. *Odredite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctgx}.$$

Rješenje. Budući uvrštavanje

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \frac{-\infty}{\infty}$$

daje neodređenost, pokušava se deriviranjem brojnika i nazivnika doći do odredljivog izraza

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = -\frac{0}{0}.$$

Primjena L'Hospitalovog pravila nije ograničena

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = L'H = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

a uzastopno ponavljanje pravila garantira da je konačni limes jednak početnom.

Zadaci. Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{20}}{e^{2x}}$$
2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$
3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x + arctgx}{x}$$
4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$
5. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}$$
6. $$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\cot x$$
7. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$$

Rješenje.

1. 0
2. 0
3. 1
4. $-\frac{1}{3}$
5. ∞

6. 0

7. L'Hospitalovo pravilo u ovom slučaju daje limes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

koji se ne može odrediti. Stoga početni limes rješavamo pouzdanom klasikom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} : \frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1$$

jer je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{x} = 0$$

zbog ograničenih vrijednosti $\sin x$ i neograničene vrijednosti kojom se $\sin x$ dijeli.

U neodređene oblike spadaju

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) &= 0\cdot\infty \\
\lim_{x\to c} f(x)-g(x) &= \infty-\infty \\
\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= 1^{\infty};\quad 0^0;\quad \infty^0.
\end{aligned}$$

Elementarnim transformacijama i korištenjem zamjene limesa i neprekidnih funkcija navedeni se oblici transformiraju u izraze na koje se smije primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

Zadatak 7.15. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} \arcsin x ctgx.$$

Rješenje. Trigonometrijskim identitetom

$$ctgx = \frac{1}{tgx}$$

dobije se zapis funkcije na koji se može primijeniti L'Hospitalovo pravilo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \arcsin x ctgx &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{tgx} = \frac{0}{0} \\
&= L'H = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Zadatak 7.16. *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. U ovom slučaju izraz se može transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\
&= L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Zadatak 7.17. *Odredite*

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right].$$

Rješenje. Uvrštavanjem kritične vrijednosti dobiva se

$$\infty - \infty.$$

Za primjenu L'Hospitalovog pravila funkcija mora imati oblik razlomka:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right] &= \lim_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{0}{0} \\
&= L'H = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{t}{t(t+1)} \\
&= L'H = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t+1+t} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zadaci. Odredite limese sljedećih funkcija:

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot tgx$$

2. $$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$$

3. $$\lim_{x\to\infty} x^6 \cdot e^{-x}$$

4. $$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$$

5. $$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2})$$

6. $$\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$$

7.
$$\lim_{x\to 0} x^x$$

8.
$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x-1}}$$

9.
$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$$

10.
$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

11.
$$\lim_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$$

12.
$$\lim_{x\to 1}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\tan\frac{\pi x}{2}}$$

13.
$$\lim_{x\to 0}(\frac{\pi}{2}-arctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$$

14.
$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(1-e^{-x})}}$$

Rješenja.

1. 2
2. 0
3. 0
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{1}{2}$ Koristiti: $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}=\dots$
7. 1
8. ∞
9. e^{-1}
10. 1
11. e^3
12. e^{-1}

13. 1

14. e

Zadatak 7.18. *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem se dobiva upravo neodređeni oblik 0^0. Računanje limesa zahtijeva transformaciju

$$(\sin x)^{tgx} = e^{\ln(\sin x)^{tgx}} = e^{tgx\cdot\ln\sin x}$$

koja se poziva na odnos međusobno inverznih funkcija

$$e^{\ln a} = a.$$

Nadalje, zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije, moguće je zapisati

$$\lim_{x\to 0} e^{tgx\cdot\ln\sin x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}}$$

pa se računanje svodi na nalaženje

$$\begin{aligned}
e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}} &\overset{L'H}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} \\
&= e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{tgx}} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

7.4 Asimptote grafa funkcije

Postoje vertikalna

$$x = c \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$$

horizontalna

$$y = d \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = d$$

i možebitno kosa asimptota

$$\begin{aligned}
y &= kx + l \\
k &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\
l &= \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)
\end{aligned}$$

Zadatak 7.19. *Odredite asimptote grafa funkcije*

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Rješenje. Domena funkcije bit će rješenje nejednadžbe

$$x^2 - 1 > 0.$$

Nejednadžba se rješava nalaženjem onih točaka x na brojevnom pravcu za koje je

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_1 = 1 \qquad & x_2 = -1 \end{aligned}$$

Analiza predznaka izraza $x^2 - 1$ na brojevnom pravcu dat će interval u kojem je izraz $x^2 - 1$ pozitivan

$x:$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2-1:$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Budući da nazivnik isključuje nultočke, domena je

$$D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Vertikalne asimptote traže se u rubovima domene

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

pa je pravac $x = -1$ prva vertikalna asimptota.
Računanje

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

daje i drugu vertikalnu asimptotu $x = 1$ i to su jedine vertikalne asimptote.
Horizontalna asimptota traži se ispitivanjem limesa u beskonačnim rubovima domene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} : \frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}}} \\ /x^2 = \sqrt{x^4}/ & \\ &= \frac{1}{\sqrt{0 - 0}} = +\infty, \end{aligned}$$

pa nema horizontalne asimptote prema $+\infty$. Posve analogno nema je ni prema $-\infty$ jer je zbog **parnosti** funkcije graf simetričan:

$$\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Za određivanje kose asimptote potrebno je odrediti koeficijent smjera

$$
\begin{aligned}
k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} : \frac{x}{x} \\
k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} \\
/x > 0 &\Rightarrow x = \sqrt{x^2}/ \\
k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1
\end{aligned}
$$

i odsječak na osi y

$$
\begin{aligned}
l = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{\infty - \infty}{\infty}.
\end{aligned}
$$

L'Hospitalovo pravilo ovdje nema uporišta za primjenu budući je neodređen brojnik. Preostaje pokušaj prebacivanja iracionalnosti iz brojnika u nazivnik odnosno racionalizacija brojnika

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{x^2 + x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1} + x(x^2-1)} \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} : \frac{x^3}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x^2}} \\
l &= \frac{0}{1+1-0} = 0
\end{aligned}
$$

Rezultati pokazuju da postoji kosa asimptota za $x \to +\infty$ i to je pravac

$$y = x.$$

Asimptota se za drugu stranu domene kad $x \to -\infty$ traži se analognim postupkom

$$
\begin{aligned}
k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} : \frac{x}{x} \\
/x < 0 &\Rightarrow x = -\sqrt{x^2}/ \\
k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} \\
k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-0}} = -1.
\end{aligned}
$$

Analogno se računa koficijent l u jednadžbi kose asimptote $y = kx + l$

$$
\begin{aligned}
l = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\
l = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{x^2-x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}-x(x^2-1)} \\
= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}-x^3+x}:\frac{x^3}{x^3} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1\cdot(-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}})-1+\frac{1}{x^2}} \\
l &= \frac{0}{-1-1+0} = 0
\end{aligned}
$$

pa je asimptota kojoj se graf funkcije priljubljuje za izuzetno negativne vrijednosti argumenta

$$y = -x.$$

Zadatak 7.20. *Odredite asimptote krivulje*

$$y = \frac{2x^3}{x^2-4}.$$

Rješenje.
Vertikalna asimptota nalazi se na temelju domene

$$D = R \setminus \{-2, 2\}.$$

Ispitivajući

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^-}\frac{2x^3}{x^2-4} &= \frac{-16}{-0} = +\infty \\
\lim_{x\to-2^+}\frac{2x^3}{x^2-4} &= \frac{-16}{+0} = -\infty \\
\lim_{x\to2^-}\frac{2x^3}{x^2-4} &= \frac{16}{-0} = -\infty \\
\lim_{x\to2^+}\frac{2x^3}{x^2-4} &= \frac{16}{+0} = +\infty
\end{aligned}
$$

dobivaju se dvije vertikalne asimptote

$$x = -2 \quad i \quad x = 2.$$

Horizontalne asimptote dobiti se mogu nakon ispitivanja

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}:\frac{x^3}{x^3} = \frac{2}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}} = \frac{2}{-0} = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}:\frac{x^3}{x^3} = \frac{2}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}} = \frac{2}{+0} = +\infty
\end{aligned}
$$

koje pokazuje da ih nema.
Kose asimptote postoje ako postoje konačni limesi

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = 2 \\ l &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-4)}{x^2-4} \\ l &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

koji u ovom zadatku daju desnu kosu asimptotu

$$y = 2x.$$

Lijeva beskonačnost ispituje se s ciljem da se provjeri postoji li lijeva asimptota

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = 2 \\ l &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-4)}{x^2-4} \\ l &= \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Asimptota kojoj se graf funkcije priljubljuje težeći u beskonačnost s lijeve strane je isti pravac

$$y = 2x.$$

Zadatak 7.21. *Odredite asimptote funkcije*

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}.$$

Rješenje. Domena funkcije dobiva se rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{x^3}{x+3} \geq 0.$$

Rješenja nejednadžbe nalaze se analizom predznaka izraza $\frac{x^3}{x+3}$ na brojevnom pravcu. Analiza se provodi nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika jer je za te x-eve nemoguće odrediti predznak razlomka

$$\begin{aligned} x^3 = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ x + 3 = 0 &\Rightarrow x_2 = -3. \end{aligned}$$

Analiza na brojevnom pravcu

$x:$	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$\frac{x^3}{x+4}$		$+$	!	$-$	0	$+$	

daje domenu kao uniju područja na kojim razlomak poprima pozitivne vrijednosti. Točka -3 isključuje se iz domene jer dijeljenje nulom nije definirano. Domena je tako:

$$< -\infty, -3 > \cup [0, +\infty > .$$

Vertikalna asimptota dobiva se ispitivanjem limesa:

$$\lim_{x\to -3} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{-27}{0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{0}{3}} = 0.$$

U ovom slučaju, jedina vertikalna asimptota je

$$x = -3.$$

Slijedi ispitivanje postojanja horizontalne asimptote:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} &= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x+3} : \frac{x^3}{x^3}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{0-0}} = +\infty \\
\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x3}{x+3}} &= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x+3} : \frac{x^3}{x^3}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{0-0}} = +\infty.
\end{aligned}$$

Kosa asimptota zahtijeva nalaženje koeficijenta smjera i odsječka na osi y:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+3}} : \sqrt{\frac{x}{x}} \\
k &= \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1 \\
l &= \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x \right) \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2(x+3)}{\sqrt{x^3(x+3)} + x(x+3)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3(x+3)} + x(x+3)} : \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{-3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3} \cdot (\frac{x}{x} + \frac{1}{x})} + 1 \cdot (1 + \frac{3}{x}} \\
&= \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Slijedi da je desna kosa asimptota

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

Lijeva asimptota dobiva se nakon slične analize. Koeficijent smjera dobiva se analogno

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x}{x+3}} : \sqrt{\frac{x}{x}}$$

$$/jer \quad je \quad x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}/$$

$$k = -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3}{x}}} = -1$$

Sličan račun za l

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x \right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^2(x+3)}{\sqrt{x^3(x+3)} - x(x+3)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3(x+3)} - x(x+3)} : \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3} \cdot (\frac{x}{x} + \frac{3}{x})} - 1 \cdot (1 + \frac{3}{x})} \\
&= \frac{-3}{1-1}
\end{aligned}$$

nažalost, ne uspijeva jer se u računanju javljaju nedefinirani izrazi poput $\sqrt{x^3}$ koji za $x \to -\infty$ ipak nije definiran. Stoga navedeno nema smisla, ali se malim trikom može izraz transformirati:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{-x^3}{-x+3}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}} - x \right)$$

Korektan račun za l:

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}-x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}-x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-3}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2(x-3)}{\sqrt{x^3(x-3)}+x(x-3)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt{x^3(x-3)}+x(x-3)}:\frac{x^2}{x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3}\cdot(\frac{x}{x}-\frac{3}{x})}+1\cdot(1-\frac{3}{x})}\\
&= \frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

pa je lijeva asimptota

$$y=-x+\frac{3}{2}.$$

7.5 Kvalitativni graf funkcije

Crtanje kvalitativnog grafa podrazumijeva grafički opis domene, intervala rasta, pada i ekstreme, konveksne, konkavne zakrivljenosti i točaka infleksije te konačno asimptota.

Zadatak 7.22. *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije*

$$y=x^2e^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje.

i Domenu funkcije čine svi brojevi osim 0, $D=R\setminus\{0\}$.

ii Analiza predznaka prve derivacije

$$y'=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

vodi na rješavanje jednadžbe

$$\begin{aligned}
y' &= 0\\
e^{\frac{1}{x}}\cdot(2x-1) &= 0\\
x_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

nakon koje slijedi ispitivanje monotonosti

$x:$	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	!	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	!	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	

Druga derivacija

$$y'' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (2x^2 - 2x + 1)$$

nema nultočku, a predznak ne mijenja ni u točki prekida pa je pozitivna na cijeloj domeni što znači da je graf konveksan.

iii Ispitivanje rubova domene:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^0 = \infty$$

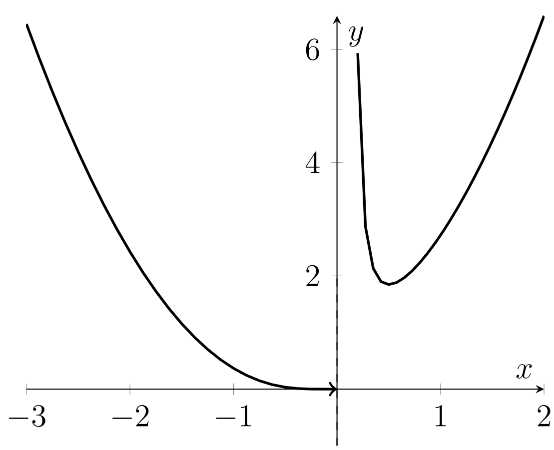
$$\lim_{x \to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{+\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = L'H = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = L'H = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} == e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^0 = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty$$



Slika 18: Graf $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Zadatak 7.23. *Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije*

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije

$$D = R \setminus \{-1\}.$$

Prva derivacija je

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

iz koje se očitavaju nultočke: $x_1 = 0$ i $x_2 = -3$ koje su potrebne u analizi rasta i pada funkcije:

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	!	$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$-\frac{27}{8}$	$\searrow$	!	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

iz koje je vidljiva točka maksimuma $(-3, -\frac{27}{8})$.
Druga derivacija

$$y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

ima nultočku u nuli. Analiza predznaka druge derivacije:

$x:$	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	0	$\cup$	

daje točku infleksije $(0, 0)$.
Vertikalnu asimptotu $x = -1$ pokazuje

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty.$$

Horizontalne asimptote nema, a kosa asimptota:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = -1$$

ima jednadžbu

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

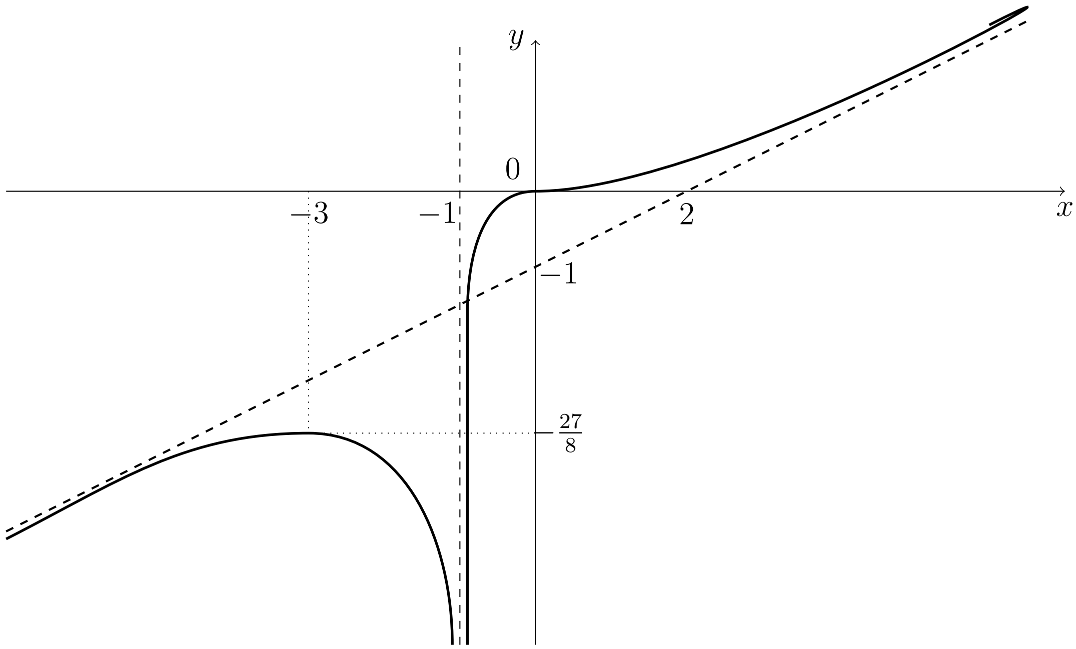
i asimptota je kojoj graf prijanja na obje strane prema beskonačnosti.

Zadaci.

1. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

   (a)

$$y = x^3 + \frac{x^4}{4}$$



Slika 19: Graf funkcije $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

(b)
$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

(c)
$$y = x + \frac{1}{x}$$

(d)
$$y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2+1}$$

(e)
$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

(f)
$$y = xe^{-x}$$

(g)
$$y = \frac{e^x}{x}$$

(h)
$$y = xe^{\frac{1}{x-2}}$$

(i)
$$y = x^2 \ln x$$

(j)
$$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$$

(k)
$$y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

2. Ispitajte tok funkcije i skicirajte graf sljedećih funkcija:

(a)
$$y = \frac{2x}{\ln^2 x}$$

(b)
$$y = \frac{e^{-3x}}{1 - x}$$

(c)
$$y = xe^{-\frac{1}{x}}$$

(d)
$$y = \arctan \frac{x}{x + 1}$$

(e)
$$y = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$$

(f)
$$y = \frac{(3x + 2)^2}{3x - 1}$$

(g)
$$y = x\sqrt{1 - x^2}$$

3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije
$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

4. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije
$$y = \arcsin \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije
$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}.$$

7.6 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Odredite domenu i klasificirajte lokalne ekstreme funkcije
$$y = x - 2\sin^2 x.$$

2. Odredite lokalne ekstreme funkcije
$$y = \frac{x^3}{x^2+3}.$$

3. Odredite intervale monotonosti funkcije
$$f(x) = \frac{\ln x - x}{x}.$$

4. Odredite točke infleksije funkcije $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

5. Odredite točke infleksije funkcije $y = \sin^3 x$.

6. Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite limes $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

7. Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite limes $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

8. Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite limes $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

9. Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite limes $\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\ln x}$

10. Odredite asimptote sljedećih krivulja:
    (a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$
    (b) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$
    (c) $y = \sqrt{x^2-4}$
    (d) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$
    (e) $y = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$
    (f) $y = xe^{\frac{1}{x}}$
    (g) $y = \ln(e + \frac{1}{x})^x$
    (h) $y = \frac{\sin x}{x}$
    (i) $y = 2x + \arctan \frac{x}{2}$

Rješenja.

1. Domena funkcije je R. Prva derivacija

$$y' = 1 - 4\sin x\cos x = 1 - 2\sin 2x$$

daje stacionarne točke

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 1 &= 2\sin 2x \\ 2x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{12} + k\pi \\ 2x_2 &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

Analiza predznaka y' najočitija je na trigonometrijskoj kružnici.

$x:$	$\frac{5\pi}{12} - \pi$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12} + \pi \equiv \frac{5\pi}{12} - \pi$
y'	0	+	0	−	0	+	0	−	0

Analiza klasificira

- lokalni maksimumi za $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$,
- lokalni minimumi za $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

2. Domena R. Iz

$$y' = \frac{3x^2(x^2+3) - 2x \cdot x^3}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2}$$

slijedi

$x:$	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	+	
y		$\nearrow$		$\nearrow$	

Derivacija je uvijek pozitivna pa funkcija raste na cijeloj domeni.

3. Domena

$$D = <0, +\infty> .$$

Prva derivacija

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{x} - 1)x - (\ln x - x)}{x^2} = \frac{1 - x - \ln x + x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

je negativna na intervalu $< e, +\infty >$, a pozitivna na $< 0, e >$ pa su to i intervali pada odnosno rasta.

4. Domena polinoma je R. Derivacije:

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 30x^2 + 24x + 12 \\ y'' &= 36x^2 - 60x + 24 \end{aligned}$$

daju točke infleksije jer je očito da za $x_1 = 1$ i za $x_2 = 2/3$ druga derivacija mijenja predznak, a graf funkcije zakrivljenost.

5. Domena funkcije je R. Derivacije

$$\begin{aligned} y' &= 3\sin^2 x \cdot \cos x \\ y'' &= 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

ukazuju na nultočke druge derivacije

$$\begin{array}{cc} \sin x = 0 & 2\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ x = k\pi, \quad k \in Z & 2\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \\ & 3\cos^2 x = 1 \\ & \cos^2 x = \frac{1}{3} \\ & \cos x = \pm\frac{1}{3} \\ & x_1 = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi \\ & x_2 = \pm\arccos\frac{-1}{3} + 2k\pi \end{array}$$

Budući su sve nultočke druge derivacije jednostruke, točke infleksije funkcije su nultočke druge derivacije

$$\begin{array}{rr} (k\pi, 0), & k \in Z \\ (\pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2k\pi, \pm\dfrac{16\sqrt{2}}{27}), & k \in Z \\ (\arccos -\dfrac{1}{3} + 2k\pi, \dfrac{16\sqrt{2}}{27}), & k \in Z \\ (\arccos\dfrac{1}{3} + (2k+1)\pi, -\dfrac{16\sqrt{2}}{27}), & k \in Z \end{array}$$

6. ∞

7. 1

8. $\frac{1}{2}$

9. $-\infty$

10. (a) Vertikalne asimptote su $x = 1$ i $x = -1$, horizontalnih nema, kosa asomptota $y = x$.
    (b) Vertikalnih asimptota nema. Horizontalne asimptote su $y = 1$ i $y = -1$.
    (c) Vertikalnih i horizontalnih nema. Kose asimptote su $y = x$ za $x \to +\infty$ i $y = -x$ za $x \to -\infty$.

(d) Vertikalna asimptota je $x=-1$. Kosa asomptota je $y=\frac{1}{2}x-1$.

(e) Vertikalna asimptota je $x=2$. Horizontalne nema. Kosa asomptota je $y=x+\frac{1}{2}$.

(f) Vertikalna asimptota je $x=0$. Kosa asimptota je $y=x+1$. Račun:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= 0\cdot e^{+\infty}=0\cdot\infty = neodr.\\
\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to 0^+}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty\\
\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= 0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=0.\\
\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= \infty\cdot e^0=\infty\\
k=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1\\
l=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1.
\end{aligned}$$

(g) Vertikalna asimptota $ex+1=0$. Kosa asimptota je $y=x+\frac{1}{e}$.
Svojstvo logaritmiranja potencija daje zapis formule

$$y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right).$$

Domenu čine brojevi koji zadovoljavaju

$$e+\frac{1}{x}>0.$$

Nejednadžba se rješava analizom predznaka izraza

$$e+\frac{1}{x}$$

na brojevnom pravcu

$$\begin{aligned}
e+\frac{1}{x} &= 0\\
x &= -\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		$-1/e$		0		∞
$e+\frac{1}{x}$		$+$	0	$-$	$!$	$+$	

Domena je $D = < -\infty, -\frac{1}{e} > \cup < 0, +\infty >$. Ispitavanje rubova domene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1/e} x\cdot \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{e}\cdot(-\infty) = +\infty \\
\lim_{x\to 0} x\cdot \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) &= 0\cdot(-\infty) = neodr. \\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= L'H = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e+\frac{1}{x}} = 0 \\
\lim_{x\to \pm\infty} x\cdot \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) &= \pm\infty\cdot\ln e = \pm\infty
\end{aligned}
$$

Kosa asimptota:

$$
\begin{aligned}
k = \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x} &= 1 \\
l = \lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}} \\
L'H &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}-0}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

(h) Vertikalne asimptote nema. Horizontalna asimptota je os x.

(i) Vertikalne i horizontalne asimptote nema. Kosa asimptota je $y = 2x + \frac{\pi}{2}$:

$$
\begin{aligned}
k = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\arctan\frac{x}{2}}{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x}\right) = 2+\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \\
&= 2+0 = 2 \\
l = \lim_{x\to\infty}\left(2x+\arctan\frac{x}{2}-2x\right) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

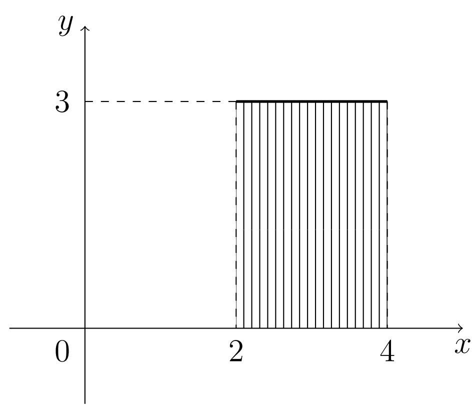
8 Integrali i primjene

Integralni račun rješava vrlo jednostavno izreciv, no i netrivijalno rješiv problem izračunavanja površine ravninskog lika. Osim u geometriji, integralima se rješavaju problemi gibanja, potrošnje energije pa i ekonomski problemi.

8.1 Definicija određenog i neodređenog integrala

Određeni integral ograničene funkcije $f : [a, b] \subset R \to R_0^+$ označava se s $\int_a^b f(x)dx$, a predstavlja površinu koju omeđuju graf funkcije f, os x i pravci $x = a$ i $x = b$. Brojeve a i b zovemo redom **donja** odnosno **gornja granica integracije**, a interval $[a, b]$ **intervalom integracije**.

Primjer 8.1. *Izračunajte površinu omeđenu u koordinatnoj ravnini vertikalama $x = 2$, $x = 4$, osi x i grafom funkcije $f(x) = 3$.*



Slika 20: Integral $\displaystyle\int_2^4 3dx = 6$.

Rješenje. Nakon crtanja jasno se vidi da je površina jednaka 6 kvadratnih jedinica.

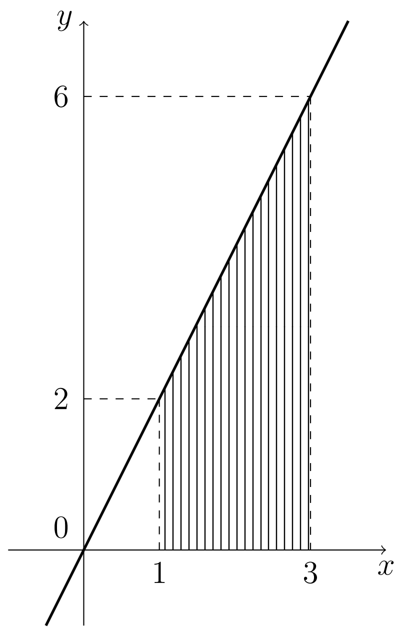
Određeni integral u oznaci

$$\int_2^4 3dx$$

predstavlja zadatak naveden u primjeru. Rješenje zadatka zapisuje se

$$\int_2^4 3dx = 6.$$

Zadatak 8.1. *Nacrtajte graf funkcije $y = 2x$. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = 2x$, koordinatnom osi x te vertikalom $x = 1$ i vertikalom $x = 3$, Zapišite zadatke pomoću oznake određenog integrala.*



Slika 21: Integral $\displaystyle\int_1^3 2xdx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2.$

Rješenje. Nakon crtanja, zadatak se svodi na računanje površine trapeza i dobiva se 8 kvadratnih jedinica. Zapisano integralom:

$$\int_1^3 2xdx = 8.$$

Uočite vezu formula $2x$ i x^2. Formula x^2 predstavlja antiderivaciju funkcije $2x$. Uočite da vrijedi:

$$\int_1^3 2xdx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

Definicija 8.1. *Neka je zadana funkcija $f : D \to R$, neka je $I \subseteq D$ i neka je $A \subseteq I$ konačan ili prebrojiv podskup.* ***Primitivna funkcija*** *funkcije f na intervalu I je svaka neprekidna funkcija $F : I \to R$ takva da je $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I \setminus A$.*

Teorem 8.1. *Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I, onda je i $F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I, $\forall C \in R$.*

Definicija 8.2. ***Neodređeni integral*** *funkcije f na intervalu I je skup svih primitivnih funkcija funckije f na intervalu I. Koristimo oznaku:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in R,$$

pri čemu je F neka primitivna funkcija funkcije f na intervalu I, x je ***varijabla integracije****, f je* ***podintegralna funkcija****, a C* ***konstanta integracije****.*

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1\\ \int \frac{1}{x}\cdot dx &= \ln|x|+c,\end{aligned}$$

gdje je || radi šire definicije podintegralne od primitivne funkcije.
Pravilo koje vrijedi prilikom integriranja je

$$\int(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx=\alpha\cdot\int f(x)dx+\beta\cdot\int g(x)dx.$$

Newton-Leibnitzova formula. Ako je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju F (funkciju takvu da je $F'=f$), onda je

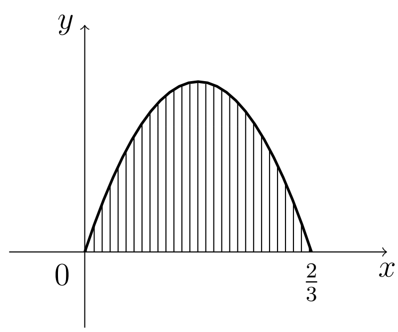
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Često umjesto $F(b)-F(a)$ pišemo skraćeno $F(x)|_a^b$ pa Newton-Leibnitzovu formulu možemo pisati u obliku

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b.$$

Zadatak 8.2. *Izračunajte površinu koju parabola $y=2x-3x^2$ zatvara s osi apscisa*

Rješenje. Tehnika rješavanja jedino nakon pogađanja formule čija je derivacija pod



Slika 22: Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}(2x-3x^2)dx=(x^2-x^3)\Big|_0^{\frac{2}{3}}$.

integralom: $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}(2x-3x^2)dx=(x^2-x^3)\Big|_0^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{4}{27}.$

Zadatak 8.3. *Odredite površinu omeđenu pravcem $y=2x+5$ odozgo, vertikalama $x=-2$ i $x=3$ slijeva i zdesna te osi x odozdo. Izrazite zadatak integralom.*

Rješenje. Nakon crtanja površina dobivenog trapeza jednaka je

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{11+1}{2} \cdot 5 = 30$$

kvadratnih jedinica. Zadatak iskazan integralom:

$$\int_{-2}^{3} (2x+5)dx = (x^2+5x)\Big|_{-2}^{3} = 30kv.$$

Zadatak 8.4. *Izračunajte*

$$\int_{0}^{5} (10-2x)dx.$$

Rješenje. U koordinatnoj ravnini nacrta se pravac $2x + y = 10$ i traženi integral upravo je površina pravokutnog trokuta i iznosi 25 kvadrata. Newton-Leibnitzovom formulom dobije se

$$\int_{0}^{5} (10-2x)dx = (10x-x^2)\Big|_{0}^{5} = 25kv$$

8.2 Neposredno integriranje

Jedini način rješavanja integrala je pogađanje formule koja derivirana daje podintegralnu formulu. Diferencijal dx ukazuje na varijablu u podintegralnoj funkciji. Ostali brojevi koji se javljaju ispod integrala su konstante. Integrirati se može samo po jednoj varijabli.

Tablica neodređenih integrala

1.
$$\int dx = x + c$$

2.
$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

3.
$$\int \frac{dx}{x} \cdot dx = \ln|x| + c$$

4.
$$\int e^x \cdot dx = e^x + c; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

5.
$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c; \qquad \int \cos x \cdot dx = \sin x + c$$

6.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot dx = tgx + c; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$$

7.
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + c$$

8.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln|\frac{x-a}{x+a}| + c$$

9.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + c$$

10.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

11.
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + c$$

12.
$$\int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \cdot \ln x + \sqrt{x^2 + A} + c$$

Ostali neodređeni integrali, ako su riješeni, možda se nalaze u nekom od priručnika namjenjenog inženjerima ili studentima. Valja napomenuti da nije svaki neodređeni integral rješiv. Određeni integral je moguće riješiti ako je funkcija $f : [a, b] \to R^+$ neprekidna.

Zadatak 8.5. *Odredite*

$$\int \sqrt{2px}dx.$$

Rješenje. U podintegralnoj funkciji p je konstanta pa zbog linearnosti operatora integriranja imamo:

$$\int \sqrt{2px}dx = \int \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}dx = \sqrt{2p} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2p}}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

Zadatak 8.6. *Odredite*

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx &= \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= \int \left(x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{-2}{3}}\right)dx \\
&= \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c \\
&= \frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.7. *Odredite*

$$\int \frac{dx}{x^2+7}.$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}} + c.$$

Zadatak 8.8. *Riješite*

$$\int tg^2 x dx.$$

Rješenje. Pomoću osnovnih trigonometrijskih identiteta podintegralna funkcija poprima oblik pogodan za integriranje:

$$\begin{aligned}
\int tg^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + c
\end{aligned}$$

Zadatak 8.9. *Integrirajte*

$$\int \frac{dx}{3x^2+5}.$$

Rješenje. Izlučivanjem 3 u nazivniku dobiva se

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} arctg \frac{x}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} x + c.$$

Zadatak 8.10. *Odredite*

$$\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx &= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx - 2\int dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x - 2x + \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^x\end{aligned}$$

Zadatak 8.11. *Izračunajte*

$$\int_0^1 3^x e^x dx.$$

Rješenje. Računanje određenog integrala izvodi se po Newton-Leibnitzovoj formuli i sastoji se od nalaženja primitivne funkcije za podintegralnu funkciju. Pravilom o potenciranju potencija jednakih baza, moguće je podintegralnu funkciju svesti na oblik iz tablice:

$$\begin{aligned}\int_0^1 3^x e^x dx &= \int_0^1 (3e)^x dx = \left.\frac{(3e)^x}{\ln 3e}\right|_0^1 \\ &= \frac{3e}{\ln 3e} - \frac{1}{\ln 3e} = 3.40932\end{aligned}$$

Zadatak 8.12. *Odredite vrijednost određenog integrala*

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x^3} dx.$$

Rješenje. Algebarskom transformacijom

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right) dx$$

integral se svodi na dva integrala općih potencija

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2} dx - 2\int_{-2}^{-1} x^{-3} dx.$$

Primjenom tablice po Newton-Leibnitzovoj formuli dobiva se

$$\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-2}^{-1} - 2\left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_{-2}^{-1} = 1 - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-8}\right) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{-3}{8} = \frac{5}{4}.$$

Zadatak 8.13. *Izračunajte*

$$\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \left[\frac{1}{x(1-\sqrt{x})} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\right] dx.$$

Rješenje. Svođenjem podintegralnog izraza na zajednički nazivnik dobiva se

$$\begin{aligned}\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{x(1-x)}dx &= \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1-x}{x(1-x)}dx \\ &= \ln x|_{e/2}^{3e/2} = \ln\frac{3e}{2} - \ln\frac{e}{2} = \ln 3.\end{aligned}$$

Zadaci. Primjenom tablice i pravila odredite formule u sljedećim zadacima.

1. Neposredno integrirajte:

   (a)
   $$\int (\frac{1-x}{x})^2 dx$$

   (b)
   $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

   (c)
   $$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$$

   (d)
   $$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$$

2. Odredite vrijednost određenih integrala:

   (a)
   $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

   (b)
   $$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} tg^2 x dx$$

3. Izračunajte vrijednosti određenih integrala:

   (a)
   $$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}dx$$

(b)

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Rješenja.

1. (a) $-1/x - 2\ln x + x + c$

   (b) $\frac{2\sqrt{x}}{3}(x+3) + c$

   (c)

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} \quad dx = \int \frac{\sqrt{x^4+\frac{1}{x^4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x^8+1+2x^4}{x^4}}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{(x^4+1)^2}{x^2}}}{x^3}dx =$$
$$\int \frac{x^4+1}{x^5}dx = \int \left(\frac{1}{x}+x^{-5}\right)dx = \ln x + \frac{x^{-4}}{-4} + c = \ln x - \frac{1}{4x^4} + c$$

   (d)

$$\int \sqrt{1-\sin 2x} \quad dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx =$$
$$\int |\sin x - \cos x|dx = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \in [-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi], \quad k \in Z \\ \cos x - \sin x, & x \in [\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi], \quad k \in Z \end{cases}$$

2. a) 0.693, b) 0.7386.

3. a) 11.25, b) 0.32.

8.3 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije sastoji se u zamjeni dijela izraza u podintegralnoj funkciji koja ovisi o x, zapisanog kao $k(x)$, funkcijom koja će ovisiti o novoj varijabli t

$$k(x) = \varphi(t).$$

Izbor $k(x)$ mora biti takav da je moguće potpuno uvesti varijablu t pod integral:

$$\begin{aligned} k(x) &= \varphi(t) \\ x &= k^{-1}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Potrebno je zamijeniti i diferencijal dx sa dt. Preslikavanje

$$x \longrightarrow k(x)$$

mora biti bijektivno definirana funkcija.

Zadatak 8.14. *Supstitucijom odredite*

$$\int \sqrt[3]{5-6x}dx.$$

Rješenje. Nema pravila koji dio podintegralne funkcije zamijeniti i koju funkciju izabrati za zamjenu. U ovom slučaju mudro je uzeti

$$\begin{aligned} 5-6x &= t^3 \\ -6dx &= 3t^2dt \\ dx &= -\frac{t^2}{2}dt \end{aligned}$$

jer nakon uvrštavanja se dobiva prepoznatljiva podintegralna funkcija.

$$\int \sqrt[3]{t^3} \cdot \frac{-t^2dt}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\int t^3dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + c$$

Budući zadatak traži nalaženje primitivne funkcije za $\sqrt[3]{5-6x}$, u rezultat se mora vratiti varijabla x

$$t = \sqrt[3]{5-6x}$$

pa je tražena primitivna funkcija

$$\int \sqrt[3]{5-6x}dx = -\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{5-6x}\right)^4 + c.$$

Zadatak 8.15. *Odredite*

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx.$$

Rješenje. Ovaj integral posebno je značajan jer je u **brojniku** sadržana derivacija nazivnika. Cijeli nazivnik može se zamijeniti novom varijablom

$$\begin{aligned} x^2-5x+7 &= t \\ (2x-5)dx &= dt \end{aligned}$$

jer je tada integral po novoj varijabli bitno jednostavniji

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2-5x+7| + c.$$

Zadatak 8.16. *Odredite*

$$\int x^2e^{x^3}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3} dx &= /x^3 = t \\ & \quad 3x^2 dx = dt/ \\ &= \int x^2 \cdot e^t \cdot \frac{dt}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + c\end{aligned}$$

Zadatak 8.17. *Riješite*

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\ 2xdx &= dt \\ \int \frac{x\frac{dt}{2x}}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin t + c = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + c\end{aligned}$$

Zadatak 8.18. *Riješite*

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}e^x - 1 &= t \\ e^x dx &= dt \\ \int \frac{e^x}{e^x-1}dx &= \int \frac{e^x}{t} \cdot \frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c \\ &= \ln|e^t - 1| + c\end{aligned}$$

Zadatak 8.19. *Odredite*

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$$

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx &= / \arcsin x = t \\
& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt \\
& dx = \sqrt{1-x^2}dt / \\
&= \int \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}dt \\
&= \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}
$$

Zadatak 8.20. *Riješite neodređeni integral*

$$\int \frac{x - \sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx.$$

Rješenje. Prije supstitucije integral se rastavi i dobije se

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x - \sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx &= \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx \\
& \left/ \begin{array}{cc} 1+4x^2 = t & arctg 2x = s \\ 8x dx = dt & \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2dx = ds \\ dx = \frac{dt}{8x} & dx = \frac{(1+4x^2)ds}{2} \end{array} \right/ \\
&= \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{8x} - \int \frac{\sqrt{s}}{1+4x^2} \cdot \frac{(1+4x^2)ds}{2} \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int s^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{1}{8} \ln(1+4x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (arctg 2x)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}
$$

Zadatak 8.21. *Odredite*

$$\int a \cdot e^{-mx} dx.$$

Rješenje. Supstitucija $-mx = t$ daje

$$\int a \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-m} = -\frac{a}{m}e^t + c = -\frac{a}{m}e^{-mx} + c.$$

Zadatak 8.22. *Odredite*

$$\int (\cos x + \sin x)^2 dx.$$

Rješenje. Nakon kvadriranja dobije se

$$\begin{aligned}
\int (\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x)dx &= \int dx + \int \sin 2x dx \\
&= /2x = t, \quad dx = \frac{dt}{2} \\
&= x + \int \sin t \cdot \frac{dt}{2} = x + \frac{1}{2} \cdot (-\cos t) + c \\
&= x - \frac{1}{2}\cos 2x + c
\end{aligned}$$

Zadatak 8.23. *Odredite*

$$\int tgx dx.$$

Rješenje. Definicija tangensa i činjenica da je sinus derivacija kosinusa

$$\begin{aligned}
\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \Bigg/ \\
&= \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} \\
&= -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + c \\
&= -\ln \cos x + c
\end{aligned}$$

Zadatak 8.24. *Odredite*

$$\int \sin^2 x \cos x dx.$$

Rješenje.

$$\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array}$$

daje

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Zadatak 8.25. *Odredite*

$$\int \cos^2 x dx.$$

Rješenje. Koristiti identitet

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

i supstituciju

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx \\
&= 2x = t, \quad 2dx = dt \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos t \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \sin t \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c
\end{aligned}$$

Kod rješavanja neodređenog integrala rezultat nije jednoznačan. Točnost primitivne funkcije dovoljno je provjeriti deriviranjem. Derivacija mora biti jednaka podintegralnoj funkciji.

Zadaci.

1. Zamjenom varijabli integrirajte:

   (a)
   $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

   (b)
   $$\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$$

   (c)
   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (1+x)}$$

   (d)
   $$\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$$

   (e)
   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

   (f)
   $$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

   (g)
   $$\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$$

   (h)
   $$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$$

(i)

$$\int e^x \sqrt{a - be^x} dx$$

(j)

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

Rješenja.

1. (a)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} 1 - x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{-tdt}{t} = -t = -\sqrt{1-x^2} + c$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx &= \left\{ \begin{array}{c} 1 + x^3 = t^2 \\ 3x^2 dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int x^2 \cdot t \cdot \frac{2tdt}{3x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{3} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{(1+x^3)^3} \end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (1+x)} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2arctg\sqrt{x} + c$$

(d)

$$\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ \frac{-1}{x^2} dx = dt \end{array} \right\} = \int \sin t \cdot \frac{-x^2 dt}{x^2} = \cos \frac{1}{x} + c$$

(e)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t \cdot \sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + c$$

(f)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} &= \left\{ \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{xdt}{x \cdot t \cdot \ln t} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \ln t = s \\ \frac{1}{t} dt = ds \end{array} \right\} = \int \frac{tds}{t \cdot s} = \ln(\ln(\ln x)) + c \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} \int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{c} arctg\frac{x}{2} = t \\ \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} dx = dt \\ dx = \frac{4+x^2}{2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{4+x^2} \cdot \frac{4+x^2}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{1}{4} arctg^2 \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

(h)

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ \frac{-1}{x^2}dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{e^t}{x^2} \cdot (-x^2)dt = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

(i)

$$\begin{aligned} \int e^x \sqrt{a - be^x}dx &= \left\{ \begin{array}{c} a - be^x = t^2 \\ -be^x dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int e^x \cdot t \cdot \frac{2tdt}{-be^x} = -\frac{2}{b} \cdot \frac{t^3}{3} \\ &= -\frac{2}{3b} \left(\sqrt{a - be^x} \right)^3 + c \end{aligned}$$

(j)

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \quad dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{1}{6} \sin^6 x + c$$

8.4 Integral racionalne funkcije

Racionalne su funkcije omjeri polinoma. Racionalne funkcije jedine su koje možemo računati pomoću četiri osnovne računske operacije. Racionalne funkcije se mogu u potpunosti integrirati. Integriranje se provodi direktno ili metodom supstitucije.

Primjer 8.2. *Dokažite neodređeni integral iz tablice*

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$$

Rješenje. Racionalnu funkciju potrebno je rastaviti na parcijalne razlomke

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - a^2} &= \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} \quad | \cdot (x - a)(x + a) \\ 1 &= A(x + a) + B(x - a) \\ x = a \Rightarrow & \quad \frac{1}{2a} = A \\ x = -a \Rightarrow & \quad \frac{1}{-2a} = B \\ \frac{1}{x^2 - a^2} &= \frac{\frac{1}{2a}}{x - a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x + a} \end{aligned}$$

nakon čega je integriranje lagano supstitucijom

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} \\ &= \frac{1}{2a} (\ln |x - a| - \ln |x + a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c. \end{aligned}$$

Zadatak 8.26. *Integrirajte*

$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Rješenje. Potrebno je rastaviti racionalnu funkciju u jednostavnije racionalne funkcije

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad | \cdot (x^3+1)\\
1 &= A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)\\
x=-1 \quad &: \quad \begin{array}{c} 1 = A\cdot 3\\ A = \frac{1}{3}\end{array}\\
x=0 \quad &: \quad \begin{array}{c} 1 = \frac{1}{3} + C\\ C = -\frac{2}{3}\end{array}\\
x=1 \quad &: \quad \begin{array}{c} 1 = \frac{1}{3} + 2B + \frac{4}{3}\\ B = -\frac{1}{3}\end{array}
\end{aligned}$$

nakon čega integriranje postaje jednostavnije

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx\\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx\\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-x+1}\\
&= \left\{ \begin{array}{cc} x^2-x+1=t & x-\frac{1}{2}=s\\ (2x-1)dx=dt & dx=ds\\ & x^2-1+\frac{1}{4}=s^2 \end{array} \right\}\\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{ds}{s^2+\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

Zadatak 8.27. *Odredite*

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Rješenje. Brojnik ima stupanj jednak nazivniku. Moguće je dijeljenje brojnika i nazivnika:

$$\begin{array}{rcl}
(x^3+1) & : & (x^3-5x^2+6x) = 1\\
\underline{-x^3+5x^2-6x} & & \\
5x^2-6x+1 & & \\
\dfrac{x^3+1}{x^3-5x+6x} & = & 1 + \dfrac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}
\end{array}$$

Zadatak je sada jednostavniji:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x+6x}dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Integral racionalne funkcije zahtijeva faktorizaciju nazivnika:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x^2-3x-2x+6) = x(x-3)(x-2).$$

Racionalna funkcija rastavlja se na parcijalne razlomke

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \quad | \cdot (x^3-5x^2+6x) \\
5x^2-6x+1 &= A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2) \\
x=0 &: \frac{1}{6}=A \\
x=3 &: -\frac{9}{2}=B \\
x=2 &: \frac{28}{3}=C
\end{aligned}$$

i integral sada glasi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx &= \int dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{x}dx + \int \frac{-\frac{9}{2}}{x-2}dx + \int \frac{\frac{28}{3}}{x-3}dx \\
&= x+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{28}{3}\ln|x-3|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+c.
\end{aligned}$$

Supstitucijom se velik broj integrala svodi na integrale racionalnih funkcija.

Zadatak 8.28. *Odredite primitivnu funkciju za*

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}.$$

Rješenje. Supstitucija $e^x=t$, $e^x dx = dt$ daje

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{dt}{t}}{t^2-t} &= \int \frac{dt}{t^2(t-1)} \\
\frac{1}{t^2(t-1)} &= \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1} \quad | \cdot t^2(t-1) \\
1 &= At(t-1)+B(t-1)+Ct^2 \\
t=0 &: B=-1 \\
t=1 &: C=1 \\
t=2 &: A=-1 \\
\int \frac{dt}{t^2(t-1)} &= -\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t-1} \\
&= -\ln|t|+\frac{1}{t}+\ln|t-1| \\
&= -x+e^{-x}+\ln|e^x-1|+c
\end{aligned}$$

8.5 Zamjena varijabli u određenom integralu

Rezultat određenog integrala je broj. Promjena varijable integriranja povlači i promjenu granica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt; \qquad \begin{array}{c} \varphi(a)=\alpha \\ \varphi(b)=\beta \end{array}$$

Primjer 8.3. *Izračunajte*

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Rješenje. U ovom zadatku pogodna je trigonometrijska supstitucija:

$$\begin{aligned} x &= a\sin t \\ dx &= a\cos t dt \\ t &= \arcsin\frac{x}{a} \\ \alpha &= \arcsin 0 = 0 \\ \beta &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nakon supstitucije i promjene granica dobije se

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\cdot\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\cdot a^2\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t dt \\ & \quad \Bigg/ \begin{array}{cc} \sin t = s & s_D = \sin 0 = 0 \\ \cos t dt = ds & s_G = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \Bigg/ \\ &= a\int_0^1 s^2 ds = a\cdot\frac{s^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Zadatak 8.29. *Izračunajte*

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$$

Rješenje. Supstitucija mijenja granice

$$\begin{gathered} e^x-1=t^2 \\ e^x dx = 2tdt \\ e^x+3=t^2+4 \\ t_D=\sqrt{e^0-1}=0 \\ t_G=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2 \end{gathered}$$

i novi integral glasi

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{e^x \cdot t}{t^2+4} \cdot \frac{2tdt}{e^x} &= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt \\
&= 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 dt - 8\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} \\
&= 2t|_0^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2}|_0^2 \\
&= 4 - 4(\frac{\pi}{4} - 0) = 4 - \pi
\end{aligned}$$

Zadatak 8.30. *Izračunajte*

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

Rješenje. Supstitucija

$$\begin{gathered}
3x+1 = t^2 \\
3dx = 2tdt \\
dx = \tfrac{2}{3}tdt \\
x = \tfrac{t^2-1}{3} \\
t = \sqrt{3x+1} \\
t_D = 1 \\
t_G = 4
\end{gathered}$$

daje integral racionalne funkcije

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{\frac{2}{3}tdt}{2 \cdot \frac{t^2-1}{3} + t} &= \int_1^4 \frac{tdt}{t^2-1+\frac{3}{2}t} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2t+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{t^2-1+\frac{3}{2}t} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2t+\frac{3}{2}}{t^2-1+\frac{3}{2}t}dt - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int_1^4 \frac{dt}{(t+\frac{3}{4})^2 - \frac{25}{16}} \\
&= \begin{array}{cc} t^2-1+\frac{3}{2}t = v & t+\frac{3}{4} = s \\ (2t+\frac{3}{2})dt = dv & dt = ds \\ v_D = \frac{3}{2} & s_D = \frac{7}{4} \\ v_G = 21 & s_G = \frac{19}{4} \end{array} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{21} \frac{dv}{v} - \frac{3}{4}\int_{\frac{7}{4}}^{\frac{19}{4}} \frac{ds}{s^2 - \frac{25}{16}} \\
&= \frac{1}{2}\ln v|_{\frac{3}{2}}^{21} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\cdot \ln\left|\frac{s-\frac{5}{4}}{s+\frac{5}{4}}\right| |_{\frac{7}{4}}^{\frac{19}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 21 - \ln\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{10}\left(\ln\frac{\frac{7}{2}}{6} - \ln\frac{\frac{1}{2}}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{3}{10}\ln\frac{7}{2} \approx 0.94
\end{aligned}$$

Zadaci. Izračunajte vrijednosti određenih integrala:

1. $$\int_5^9 x^2\sqrt{x-5}dx$$

2. $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$$

3. $$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

Rješenje.

1. $\frac{6256}{21}$
2. $2-\frac{\pi}{2}$
3. $8/3$

8.6 Integral trigonometrijskih funkcija

Integrali trigonometrijskih funkcija rješavaju se neposredno primjenom iz srednje škole naučenih trigonometrijskih identiteta.

Primjer 8.4. *Izračunajte*

$$\int_0^1 \sin(2t+3)\cos(3t-1)dt.$$

Ovakav zadatak rješava se primjenom formula za pretvaranje produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj:

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(2t+3)\cos(3t-1)dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(5t+2)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(4-t)dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(5t+2)}{5}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(4-t)}{-1}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{10}(\cos 7-\cos 2)+\frac{1}{2}(\cos 3-\cos 4) \approx -0.285
\end{aligned}$$

Zadaci. Izračunajte primjenom formula za pretvaranje umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

1.
$$\int_0^{2\pi} 3\sin(2x-\pi)\cdot 6\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2})dx$$

2.
$$\int_0^{1} -3\cos(2\pi\varphi+\frac{\pi}{2})\cdot 3\cos(-3\pi\varphi-\frac{\pi}{4})d\varphi$$

3.
$$\int_0^{\pi/6} \sin 5x\cos x dx$$

4.
$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}dx$$

Rješenje.

1. -14
2. $\frac{-9\sqrt{2}}{2\pi}$
3. $\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{16}$
4. 0.1729

Integrali tipa
$$\int \sin^m x\cos^n x dx$$
trivijalni su ako je bar jedan od cijelih brojeva m ili n neparan. Primjerice, za $m=2k+1$ integral prelazi u
$$\int \sin^{2k}\cdot\cos^n x\cdot\sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k\cos^n x d(\cos x)$$
koji supstitucijom $\cos x = t$ prelazi u rješivi integral polinoma
$$\int (1-t^2)^k\cdot t^n dt.$$
Analogno u slučaju da je $n=2k+1$ neparan broj.

Primjer 8.5.
$$\begin{aligned}
\int \sin^6 x\cdot\cos^9 x dx &= \int \sin^6 x\cdot\cos^8 x\cdot\cos x dx\\
&= \int \sin^6 x(1-\sin^2 x)^4\cdot d(\sin x) = /\sin x = t/\\
&= \int t^6(1-t^2)^4 dt = \int t^6(1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8)dt\\
&= \frac{t^7}{7}-4\frac{t^9}{9}+6\frac{t^{11}}{11}-4\frac{t^{13}}{13}+\frac{t^{15}}{15}+c\\
&= \frac{\sin^7 x}{7}-4\frac{\sin^9 x}{9}+6\frac{\sin^{11} x}{11}-4\frac{\sin^{13} x}{13}+\frac{\sin^{15} x}{15}+c
\end{aligned}$$

Integrali tipa

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

u kojim su potencije parne rješavaju se identitetima

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$

Primjer 8.6.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \cdot \sin^2 3x dx \\
&= \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 12x)dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cdot \frac{1}{6} d(\sin 6x) \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin 12x}{12} - \frac{1}{48} \frac{\sin^3 6x}{3} + c
\end{aligned}$$

U rješavanju se primjenjuje i posebna, trigonometrijska, supstitucija

$$\begin{aligned}
tg\frac{x}{2} &= t \\
dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

kojom trigonometrijski integral prelazi u integral racionalne funkcije koji je uvijek moguće razriješiti.

Primjer 8.7. *Riješite*

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

Rješenje. Univerzalna supstitucija daje

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln|1 + tg\frac{x}{2}| + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.31. *Univerzalnom trigonometrijskom supstitucijom integrirajte*

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \\
&= \int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} \\
&= \arctan(t+1) = arctg(1 + tg\frac{x}{2}) + c
\end{aligned}$$

Primjer 8.8. *Integrirajte*

$$\int \frac{1+2\cos x}{\sin x(3-\cos x)}dx.$$

Rješenje. Integral se rješava supstitucijom

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+2\cos x}{\sin x(3-\cos x)}dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \Bigg/ = \int \frac{1+2t}{\sin x(3-t)} \cdot \frac{dx}{-\sin x} = \\
&= \int \frac{1+2t}{(1-t^2)(t-3)}dt \\
rastav: & \\
\frac{1+2t}{(1-t)(1+t)(t-3)} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t-3} \\
1+2t &= A(1+t)(t-3) + B(1-t)(t-3) + C(1-t)(1+t) \\
t = 1 \quad &: \quad A = -\frac{3}{4} \\
t = 3 \quad &: \quad C = -\frac{7}{8} \\
t = -1 \quad &: \quad B = \frac{1}{8} \\
integral: & \\
\int \frac{1+2t}{(1-t^2)(t-3)}dt &= -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{7}{8}\int \frac{dt}{t-3} \\
&= \frac{3}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{8}\ln|1+t| - \frac{7}{8}\ln|t-3| \\
&= \frac{3}{4}\ln|1-\cos x| + \frac{1}{8}\ln|1+\cos x| - \frac{7}{8}\ln|\cos x - 3| + c.
\end{aligned}$$

Zadaci.

1. Integrirajte primjenom univerzalne trigonometrijske supstitucije

   (a)

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$$

(b)

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(c)

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$$

2. Integrirajte

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

3. Supstitucijom $t = tgx$ riješite

(a)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$$

(b)

$$\int_0^\pi 2\frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$$

8.7 Integrali iracionalnih funkcija

Funkcije u kojima se javljaju kombinacije korijena integriraju se supstitucijama. Ruski matematičar Čebišev otkrio je uvjete pod kojima postoje primitivne funkcije iracionalnih funkcija, no to prelazi okvire ovog kolegija.

Primjer 8.9. *Riješite*

$$\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x^2}+1=z^2 \\ -\frac{2}{x^3}dx = 2zdz \\ \frac{1+x^2}{x^2} = z^2 \\ 1+x^2 = x^2z^2 \end{array} \right\} = \int \frac{-zx^3dz}{x^4\cdot xz} = -\int \frac{dz}{x^2} \\
&= -\int (z^2-1)dz = z - \frac{z^3}{3} + c \\
&= \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2}\right) + c
\end{aligned}$$

Primjer 8.10. *Integrirajte*

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} &= \left\{ \begin{array}{c} 1+2x^2=z^2 \\ 4xdx=2zdz \end{array} \right\} = \int \frac{x^3 \cdot \frac{zdz}{2x}}{z^3} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{z^2-1}{2}\cdot dz}{z^2} = \frac{1}{4}\int dz - \frac{1}{4}\int z^{-2}dz \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{4\sqrt{1+2x^2}} + c
\end{aligned}$$

Zadatak 8.32. *Integrirajte*

$$\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx &= \left\{ \begin{array}{cc} x=t^6 & t_D=1 \\ dx=6t^5dt & t_G=2 \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{t^2\cdot 6t^5dt}{t^6(t^3+t^2)} = 6\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} \\
\frac{1}{t(t+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \\
1 &= A(t+1)+Bt \\
t=0 & \quad A=1 \\
t=-1 & \quad B=-1 \\
\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx &= 6\int_1^2 \frac{1}{t}dt - 6\int_1^2 \frac{1}{t+1}dt \\
&= 6\ln t - \ln(t+1)|_1^2 \approx 1.73
\end{aligned}$$

Integrali koje je Čebišev proučavao imaju zapis

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \qquad m,n,p \in Q$$

i rješivi su u tri slučaja:

- $p \in Z$
- $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj, supstitucija

$$a+bx^n = z^q, \qquad p = \frac{s}{q}.$$

- $\frac{m+1}{n} + p$ cjelobrojno, supstitucija

$$ax^{-n}+b = z^q.$$

8.7.1 Trigonometrijska supstitucija

Iako nisu uvijek pogodne, moguće je primijeniti ih u situacijama ako integral sadrži iracionalnosti:

$$\begin{array}{cc} \sqrt{a^2-x^2} & x = a\sin t, \\ \sqrt{x^2-a^2} & x = \frac{a}{\cos t}, \\ \sqrt{x^2+a^2} & x = a\tan t. \end{array}$$

Tada se podintegralna funkcija svodi na trigonometrijsku, trigonometrijska na racionalnu, a racionalna se funkcija može integrirati.

Primjer 8.11.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4} \cdot 2\sin t \cos t \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

Primjer 8.12.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left\{ \begin{array}{c} x = a\tan t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{(a^2\tan^2 t + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{a^3}\int \frac{adt}{\cos^2 t \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^3 t}} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c = \Big/ \sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{a\tan t}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2 t}} \Big/ \\ &= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + c \end{aligned}$$

Primjer 8.13.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{\cos t} \\ dx = \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos t}dt \end{array} \Bigg/ = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\sqrt{\frac{2}{\cos^2 t}-2}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos^2 t}dt \\
&= \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{2dt}{\cos^3 t} \\
&= \int \frac{2\cos t dt}{\cos^4 t} = / \sin t = s \quad \cos t dt = ds / = 2\int \frac{ds}{(1-s^2)^2} \\
\frac{1}{(1-s)^2(1+s)^2} &= \frac{A}{1-s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{(1-s)^2} + \frac{D}{(1+s)^2} \quad | \cdot (1-s^2)^2 \\
1 &= A(1-s)(1+s)^2 + B(1+s)(1-s)^2 + C(1+s)^2 + D(1-s)^2 \\
s = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}, & \quad\quad s = -1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\
s = 0 \Rightarrow A + B = \frac{1}{2}, & \quad\quad s = 2 \Rightarrow 3A - B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = B = \frac{1}{4} \\
2\int \frac{ds}{(1-s^2)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{ds}{1-s} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{1+s} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{(1-s)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{(1+s)^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\ln|1-s| + \ln|1+s|\right) + \frac{1}{4(1-s)} - \frac{1}{4(1+s)} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\right| + \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\frac{4}{x^2}} + c
\end{aligned}$$

8.8 Parcijalna integracija

Parcijalna integracija se primjenjuje kada je moguće u podintegralnoj funkciji razlučiti dva faktora:

$$\int f(x) = \int u(x) \cdot dv(x),$$

gdje je

$$dv(x) = v'(x) \cdot dx.$$

Metoda parcijalne integracije ne nalazi primitivnu funkciju odmah, već nalaženje prebacuje na drugi faktor podintegralne funkcije

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x).$$

Primjer 8.14. *Integrirajte*

$$\int x \ln x dx.$$

Rješenje. Funkciju $u(x)$ treba izabrati tako da se deriviranjem funkcija pojednostavni. Faktor koji ostaje $dv(x)$ treba biti moguće integrirati. Budući je ovo jedini univerzalni naputak, odabir je prepušten rješavaču. Pogreške nema, jedino nije poželjno dobiti složeniju podintegralnu funkciju od prethodne. Odluka

$$\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

prebacuje integraciju na jednostavniju funkciju:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

Primjer 8.15. *Odredite*

$$\int \arcsin x dx.$$

Rješenje.

$$\begin{array}{cc} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v = x \end{array}$$

Primjenom parcijalne integracije dobiva se

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 1 - x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \end{array} \right\} = x \arcsin x - \int \frac{x \frac{tdt}{-x}}{t} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

Zadatak 8.33. *Integrirajte*

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) & dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx & v = x \end{array} \right\} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 1 + x^2 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \end{array} \right\} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{tdt}{t} \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + x + c \end{aligned}$$

Zadatak 8.34. *Izračunajte*

$$\int e^x \cos x dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u=\cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} u=\sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

Početak i završetak daju neodređeni integral kao rješenje jednadžbe s jednom nepoznanicom:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ \int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}\end{aligned}$$

Zadatak 8.35. *Izračunajte*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Rješenje. Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{\sin x} \end{array} \right\} \\ &= -\frac{x}{\sin x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \cos x = t & t_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin x dx = dt & t_G = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dt}{-\sin x} \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right| - \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right| \right) \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \ln \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3} \approx -5.7469\end{aligned}$$

Zadatak 8.36. *Izračunajte*

$$\int_1^e \sin \ln x dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \sin\ln x dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \sin\ln x & dv = dx \\ du = \cos\ln x \cdot \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right\} = x \sin\ln x|_1^e - \int_1^e \cos\ln x dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = \cos\ln x & dv = dx \\ du = -\sin\ln x \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right\} = e\sin 1 - (x\cos\ln x|_1^e + \int_1^e \sin\ln x dx) \\
2\int_1^e \sin\ln x dx &= e\sin 1 - e\cos 1 + 1 \\
\int_1^e \sin\ln x dx &\approx 0.9
\end{aligned}$$

Zadaci.

1. Parcijalnom integracijom integrirajte:

   (a)
   $$\int (\frac{\ln x}{x})^2 dx$$

   (b)
   $$\int x^2 \sin 2x dx$$

   (c)
   $$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

   (d)
   $$\int x \sin^2 x dx$$

   (e)
   $$\int x arctgx dx$$

   (f)
   $$\int \cos^2 \ln x dx$$

Zadatak 8.37. *Odredite*

$$\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} t = arctgx \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{array} \Bigg/ = \int \frac{e^t}{\sqrt{1+tg^2t}}dt = \Bigg/ \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}} \Bigg/ \\
\int e^t \cos t dt &= \left\{ \begin{array}{cc} u = e^t & dv = \cos t dt \\ du = e^t dt & v = \sin t \end{array} \right\} = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^t & dv = \sin t dt \\ du = e^t dt & v = -\cos t dt \end{array} \right\} \\
&= e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \\
\int e^t \cos t dt &= \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) = \frac{e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}(x+1) + c.
\end{aligned}$$

8.9 Primjene neodređenog integrala

Diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj se pojavljuje funkcija i njene derivacije. Riješiti diferencijalnu jednadžbu znači odrediti nepoznatu funkciju koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

Gibanje je promjena položaja u odnosu na fiksiranu točku prostora 0. Jednadžba gibanja je funkcija koja računa položaj tijela $s(t)$ u odnosu na zadani trenutak t. Brzina gibanja u trenutku t računa se po formuli $v(t) = \dot{s}(t)$ za proizvoljni trenutak t. Akceleracija u trenutku t:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Često je poznatom silom ili impulsom određena akceleracija tijela.

Zadatak 8.38. *Tijelo se giba pravocrtno s ubrzanjem koje se mijenja po formuli*

$$a = 6t - 12.$$

U početnom je trenutku $t = 0$ *imalo početnu brzinu* $v_0 = 9m/s$ *i nalazilo se na* $s_0 = 10m$ *desetom metru od točke orijentira. Odredite:*

a) brzinu i zakon gibanja točke,

b) iznos ubrzanja, brzine i položaj točke u 2. sekundi gibanja,

c) trenutak u kojem je brzina najmanja.

Rješenje.

a) brzina je rješenje diferincijalne jednadžbe po varijabli t

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 6t - 12 \quad | \int \quad dt \\
v &= \int (6t-12)dt \\
v &= 3t^2 - 12t + c
\end{aligned}$$

gdje je c konstanta koja se nalazi iz takozvanog početnog uvjeta

$$\begin{aligned}
v_0 = v(t_0) &= 9\\
3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + c &= 9\\
c &= 9
\end{aligned}$$

pa je formula za računanje trenutačne brzine

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

Jednadžba gibanja koja računa trenutačan položaj tijela na pravcu u odnosu na točku orijentira rješenje je jednadžbe

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= 3t^2 - 12t + 9 \quad \left| \int \quad dt \right.\\
s(t) &= t^3 - 6t^2 + 9t + c\\
s_0 = s(0) &= c = 10\\
s(t) &= t^3 - 6t^2 + 9t + 10
\end{aligned}$$

b) vrijednosti ubrzanja, brzine i položaj tijela u drugoj sekundi ubrzanja jesu redom

$$\begin{aligned}
a(2) &= 0\\
v(2) &= -3m/s\\
s(2) &= 12m
\end{aligned}$$

c) nužan uvjet lokalnog ekstrema funkcije $v = v(t)$ je

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 0\\
6t - 12 &= 0\\
t &= 2
\end{aligned}$$

pa je u drugoj sekundi brzina najmanja. Ovdje se radi o brzini suprotnoj od smjera akceleracije jer se do druge sekunde tijelo usporava, ali sve blaže i blaže. Nakon druge sekunde tijelo se počinje ubrzavati.

Zadatak 8.39. *Na visini od 30 metara izbačen je kamen vertikalno brzinom od* $20m/s$. *Odredite formulu za računanje trenutne brzine i visine leta u polju sile teže s* $g = 9.81m/s^2$. *Izračunajte najveću visinu leta i vrijeme za koje će pasti. Otpor zraka zanemarite.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
a(t) &= g = -9.81 \\
v(t) &= \int a dt = \int -g dt = -gt + c \\
v(0) &= 20m/s = -g \cdot 0 + c \\
v(t) &= -gt + 20 \\
h(t) = s(t) &= \int (-gt + 20) dt = -g\frac{t^2}{2} + 20t + c \\
h(0) &= 30 = -g \cdot 0 + 20 \cdot 0 + c \\
h(t) &= -g\frac{t^2}{2} + 20t + 30
\end{aligned}$$

Najveći domet je maksimum funkcije $h(t)$. Nužan uvjet maksimuma daje mogući trenutak t:

$$\begin{aligned}
\dot{h}(t) = 0 &= -gt + 20 \Rightarrow t = \frac{20}{g} \approx 2.04s, \\
h(2) &= -g\frac{4}{2} + 20 \cdot 2 + 30 = 50.38m.
\end{aligned}$$

Iz jednadžbe gibanja moguće je izračunati trenutak t u kojem će tijelo biti na visini $h(t) = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= -g\frac{t^2}{2} + 20t + 30 \\
t_{1,2} &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 588.6}}{-9.81} = \frac{-20 \pm \sqrt{988.6}}{-9.815} = -1.17; 5.24.
\end{aligned}$$

Let će trajati malo više od 5 sekundi.

U slučaju da se tijelo ne giba pravocrtno nastoji se gibanje rastaviti na komponente i odrediti jednadžba gibanja za svaku komponentu.

Primjer 8.16. *Projektil je ispaljen početnom brzinom v_0 pod kutom φ prema horizontali. Odredite gibanje projektila.*

Rješenje. Gibanje se rastavlja u komponentu visine $h(t)$ na kojoj je granata i komponentu horizontalne udaljenosti od mjesta lansiranja $s(t)$. Visina u trenutku t jednaka je

$$h(t) = v_0 t \sin\varphi - \frac{g}{2}t^2,$$

dok se udaljenost od mjesta ispaljivanja računa po formuli

$$s = v_0 t \cos\varphi.$$

Dobivene jednadžbe predstavljaju parabolu u hs koordinatnom sustavu, a parabola se dobiva eliminacijom parametra t:

$$\begin{aligned} t &= \frac{s}{v_0 \cos\varphi} \\ h &= v_0 \frac{s}{v_0\cos\varphi}\sin\varphi - \frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2\cos^2\varphi} \\ h &= s\tan\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}s^2 \end{aligned}$$

Zadatak 8.40. *Izračunajte za koji kut se pri istoj brzini granate ostvaruje najveći domet?*

Rješenje. Domet je druga nultočka jednadžbe parabole u (h, s) koordinatnom sustavu:

$$s_2 = D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi$$

i najveći je za $\varphi = 45^o$.

8.10 Primjene određenog integrala

Određeni integrali primjenjuju se za izračunavanje površina nepravilnih likova.

8.10.1 Primjene određenog integrala u geometriji

Newton-Leibnitzova formula primjenjuje se i u slučaju da je površina u $x0y$ ravnini omeđena vertikalama $x = a$ i $x = b$ slijeva i zdesna, grafom funkcije $y = f(x)$ s gornje, a grafom funkcije $y = g(x)$ s donje strane

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Ako se dio ravnine nalazi između horizontala $y = c$ i $y = d$, a lijeva i desna krivulja imaju implicitne jednadžbe $x = \varphi(y)$ i $x = \psi(y)$, onda se površina tog dijela ravnine može računati formulom

$$P = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))dy.$$

Primjer 8.17. *Površina koju zatvaraju $y = x^3$, pravac $y = 8$ i os y računa se integralom*

$$P = \int_0^8 \sqrt[3]{y}dy = \left.\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^8 = 12.$$

Primjer 8.18. *Dio ravnine omeđen hiperbolom*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i pravcem $x = 2a$ ima površinu koja se rješava integralom:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{b}{a}\int_a^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx = \left\{\begin{array}{cc} x = \frac{a}{\cos t} & a = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow t = 0 \\ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t} & 2a = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow t = \pi/3 \end{array}\right\} \\
&= \frac{b}{a}\int_0^{\pi/3} a\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = ab\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt \\
&= \left\{\begin{array}{cc} \sin t = s & \sin 0 = 0 \\ \cos t dt = ds & \sin\pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} = 2ab\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{s^2}{(1-s^2)^2} \\
\frac{s^2}{(1-s^2)^2} &= \frac{A}{1-s}+\frac{B}{1+s}+\frac{C}{(1-s)^2}+\frac{D}{(1+s)^2} \quad /\cdot(1-s^2)^2 \\
s^2 &= A(1+s)^2(1-s)+B(1-s)^2(1+s)+C(1+s)^2+D(1-s)^2 \\
s = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}, &\qquad s = -1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\
s = 0 \Rightarrow A + B = -\frac{1}{2}, &\qquad s = 2 \Rightarrow 3A - B = -\frac{1}{2}; \qquad A = B = -\frac{1}{4} \\
&= \frac{ab}{2}\left(\ln(1-s)-\ln(1+s)+\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1+s}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Zadatak 8.41. *Izračunajte površinu obaju dijela na koje parabola $y^2 = 2x$ dijeli krug $x^2 + y^2 \leq 8$.*

Rješenje. Točke u kojim se sijeku parabola i kružnica

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} y^2 = 2x \\ x^2+y^2 = 8 \end{array}\right. \Rightarrow x^2+2x-8 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm 6}{2} = 2, -4 \\
y &= \pm 2
\end{aligned}$$

su $(2, -2)$ i $(2, -2)$.
Radi očite simetričnosti, računa se površina omeđena parabolom, kružnicom i osi x

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy = \left\{\begin{array}{cc} y = 2\sqrt{2}\sin t & 0 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow t = 0 \\ dy = 2\sqrt{2}\cos t dt & 2 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow t = \pi/4 \end{array}\right\} \\
&= 8\int_0^{\pi/4}\cos^2 t dt - \frac{1}{2}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 = 4\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt - \frac{8}{6} = \pi + 2 - \frac{4}{3} \\
&= \pi + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Traženi dio ima duplo veću površinu od prethodno izračunate i iznosi

$$P_1 = 2\pi + \frac{4}{3},$$

dok je površina drugog, većeg dijela dopuna do površine čitavog kruga

$$2\pi - \frac{4}{3}.$$

Zadatak 8.42. *Izračunajte površinu zatvorenu pravcem $y = 2x$ između parabola $y = x^2$ i $y = \frac{x^2}{2}$.*

Rješenje. Iz crteža je jasno da se površina računa u dva dijela

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (2x - x^2)dx + \int_2^4 (2x - \frac{x^2}{2})dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 + (x^2 - \frac{x^3}{6})\Big|_2^4 \\ &= 4 - \frac{8}{3} + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} = 4. \end{aligned}$$

Zadaci.

1. Izračunajte površine koje su omeđene:
   (a) parabolom $y = 4x - x^2$ i osi x.
   (b) grafom funkcije $y = \ln x$, osi x i pravcem $x = e$.
   (c) lukom krivulje $y = tgx$, $x = \frac{\pi}{4}$ i osi x.
   (d) dijelom grafa $y = x^3 - 3x + 2$, osi x i vertikalama u točkama ekstrema funkcije.
2. Izračunajte površinu ograničenu krivuljama:
   (a) $y = \sin x$, $y = \cos x$ osi x i pravcem $2x = \pi$.
   (b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i pravcem $x = 1$.
   (c) $y = \frac{1}{1+x^2}$ i $y = \frac{x^2}{2}$.
3. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^2$ i pravcem $y = 4$.
4. Izračunajte veličinu površine koju omeđuje os y i grafovi funkcija $y = tgx$ i $y = \frac{2}{3}\cos x$.
5. Izračunajte veličinu površine omeđene pravcima $x = 0$, $y = e$, lukom hiperbole $xy = 4$ i normalom u točki $(1, 4)$ zadane hiperbole. Normala je okomica na tangentu u diralištu.
6. Izračunajte veličinu površine koju određuju grafovi funkcija $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.
7. Izračunajte površinu između hiperbole $xy = 2$ i pravca $2y + x = 5$.
8. Odredite površinu omeđenu krivuljom
$$y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$$
   i pravcima $y = 1$ i $x = 0$.

9. Odredite površinu omeđenu:

   (a) parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $x + y = 0$.
   (b) grafom $y = 2^x$, horizontalom $y = 2$ i osi y.

10. Odredite površinu omeđenu:

   (a) grafom funkcije $y = |\log x|$ i osi x od $x = 0.1$ do $x = 10$.
   (b) krivuljama $y = (x + 1)^2$ i $y = \sin(\pi x)$ i osi apscisa $y = 0$ za $0 \leq y \leq 1$.
   (c) krivuljama $2x = y^2$ i $2y = x^2$.

Rješenja.

1. (a) 10.67
   (b) 1
   (c) 0.35
   (d) 4
2. (a) 0.6
   (b) 1.1
   (c) 1.57
3. $10\frac{2}{3}$
4. 1.03
5. 1.42
6. 0.3
7. 0.98
8. 0.36
9. (a) 4.5
   (b) 0.56
10. (a) 6.4
    (b) 0.97
    (c) 4/3

Zadatak 8.43. *Izračunajte površinu omeđenu krivuljom* $x = y^2 - 2y + 2$ *i pravcem* $2x + y = 9$.

Rješenje. Krivulja je parabola okrenuta, zbog pozitivnosti y^2, prema pozitivnom dijelu osi x. Jednadžba $y^2 - 2y + 2 = 0$ nema rješenja pa parabola ne presijeca os y. Iz modificirane jednadžbe $x = (y-1)^2 + 1$ dobiva se tjeme u $(1,1)$. Sjecišta pravca i elipse su:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x = y^2 - 2y + 2 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{9-y}{2} &= y^2 - 2y + 2 \\
2y^2 - 3y - 5 &= 0 \\
y_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = -1; \frac{5}{2} \\
x_1 = 5; \qquad & x_2 = \frac{13}{4} \\
T_1 = (-1, 5) \quad T_2 = (\frac{5}{2}, \frac{13}{4})
\end{aligned}$$

Iz ovih podataka moguće je nacrtati pravac i parabolu. Traženu površinu lakše je dobiti integralom duž osi y:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{5/2} \left(\frac{9-y}{2} - (y^2 - 2y + 2) \right) dy = \int_{-1}^{5/2} \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}y - y^2 \right) dy \\
&= \left(\frac{5}{2}y + \frac{3}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{5/2} \\
&= \frac{25}{4} + \frac{3}{2}\frac{25}{8} - \frac{125}{24} - \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) \\
&= 7\frac{7}{48}
\end{aligned}$$

Zadatak 8.44. *Izračunajte površinu koja je omeđena krivuljama $y^2 = 2x + 1$ i $x = y + 1$.*

Rješenje. Za $x = 0$ u jednadžbi parabole dobivaju se sjecišta s osi y: $(0,1)$ i $(0,-1)$. Sjecišta s pravcem su $(0,-1)$ i $(4,3)$.

$$P = \int_{-1}^{3} (y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}) dy = \frac{32}{6}$$

8.10.2 Volumen rotacionog tijela

Rotaciono tijelo nastaje rotacijom određene površine oko neke istaknute osi.
Ako se površina u koordinatnoj ravnini nalazi s jedne strane osi x, ako je slijeva i zdesna omeđena vertikalama $x = a$, $x = b$, ako se gornja granica može opisati jednadžbom $y = f(x)$, a donja $y = g(x)$, onda se volumen tijela koje nastaje rotacijom površine oko osi x računa integralom

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx.$$

Primjer 8.19. *Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x površine omeđene krivuljama $y = |x^3|$ i $y = -x^2 + 2$.*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \left((-x^2+2)^2 - x^6\right) dx = 2\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4 - x^6)dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{x^7}{7}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{572}{105}\pi jed^3 \end{aligned}$$

Zadatak 8.45. *Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x površine omeđene krivuljama $4y = x^2$ i $y^2 = 4x$.*

Rješenje. Nakon nalaženja sjecišta

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{x^2}{4} \\ \frac{x^4}{16} = 4x \\ x(x^3 - 4^3) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 4 \quad y = 16 \Rightarrow \qquad T(4,16)$$

i crtanja parabola, volumen je jednak

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{4x})^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right] dx = \pi \left(4\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4 \\ &= \frac{96}{5}\pi \end{aligned}$$

Površina koja rotira može biti smještena u potpunosti s desne strane osi y i biti određena s

$$0 \le a \le x \le b$$

i

$$g(x) \le y \le f(x).$$

Ako takva površina rotira oko osi y, volumen kroz koji površina u prostoru prolazi računa se po formuli

$$V = 2\pi \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

8.10.3 Duljina luka krivulje

Duljina krivulje grafa $y = f(x)$ od točke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$ jednak je

$$l_{a,b} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Primjer 8.20. *Odredite duljinu krivulje $y = \arcsin e^{-x}$ od točke $x = 0$ do točke $x = 1$.*

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-2x}}}dx = \left\{ \begin{array}{c} 1 - e^{-2x} = t^2 \\ 2e^{-2x}dx = 2tdt \end{array} \right. \\ &= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{tdt}{e^{-2x}t} = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Bigg|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} = \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}) \end{aligned}$$

Zadaci.

1. Odredite duljinu luka grafa funkcije
$$y = x^{3/2}$$
između nultočke i točke s apscisom $x = 4$.

2. Izračunajte duljinu grafa eksponencijalne funkcije
$$y = e^x$$
za $-1 \leq x \leq 3$.

Rješenje.

1. $\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = 9.07$.

2. $\int_{-1}^3 \sqrt{1 + e^{2x}}dx = /1 + e^{2x} = t^2/ = 20.72$.

Parametarski zadanoj krivulji duljina se računa po formuli
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt,$$
gdje su $x(t)$ i $y(t)$ funkcije kojima je krivulja zadana parametarski.

Primjer 8.21. *Odredite duljinu cikloide*
$$\begin{aligned} x &= 2(t - \sin t) \\ y &= 2(1 - \cos t) \end{aligned}$$
između točke s parametrom 0 i točke s parametrom 2π.

Rješenje.
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(1 - \cos t) \\ \dot{y} &= 2\sin t \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 4(2 - 2\cos t) \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{8(1 - \cos t)}dt = \Big/ \frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2} \Big/ \\ s &= 4\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}dt = 4 \left. \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_0^{2\pi} = 16 \end{aligned}$$

8.11 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Izračunajte površinu koju omeđuju graf funkcije
$$y = x^2,$$
vertikalni pravci $x = 1$ i $x = 3$ i os x $y = 0$.

2. Izračunajte površinu koju omeđuju parabola $xy = 12$, os x i vertikale $x = 2$ i $x = 6$.

3. Odredite veličinu jednog od dijelova koje parabola
$$y = 4x^3 - 16x$$
zatvara s koordinatnom osi x. Kolika je površina obaju dijelova?

4. Odredite veličinu površine ispod grafa funkcije
$$y = \sqrt{x}$$
koja se duž osi x proteže od 0 do 9.

5. Koliko je velika jedna od površina koju sinusoida $y = \sin x$ zatvara s osi x?

6. Integrirajte

$a)\quad \int (3 - x^2)^3 dx$	$b)\quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$
$c)\quad \int (1 - x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$	$d)\ \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx$
$e)\quad \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$	$f)\quad \int ctg^2 x dx$
$g)\quad \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$	$h)\quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

7. Izračunajte

$a)\quad \int_0^1 x\sqrt[3]{x}dx$	$b)\quad \int_1^{256} \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$
$c)\quad \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3}$	$d)\quad \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
$e)\quad \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$	$f)\quad \int_2^0 (2 + x^2)^3 dx$
$g)\quad \int_{-1}^{-3} \frac{x^3 - 2x + 4}{x}dx$	$h)\quad \int_3^4 \frac{x^2}{1-x^2}dx$
$i)\quad \int_0^{2\pi} (2\sin x + 3\cos x)dx$	$j)\quad \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3)dx$

8. Izračunajte
a) $\int_0^1 (3^x - 4^x)dx$ b) $\int_{-1}^1 5^x 3^{-x} dx$

9. Supstitucijom integrirajte:

(a)
$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$
(b)
$$\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$
(c)
$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$
(d)
$$\int x \cdot ctg(x^2 + 1) dx$$
(e)
$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$
(f)
$$\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}$$
(g)
$$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$
(h)
$$\int \frac{e^{arctgx} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} dx$$

10. Integrirajte sljedeće racionalne funkcije:

(a)
$$\int \frac{5x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$
(b)
$$\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$$
(c)
$$\int \frac{x^4}{x^3 - 1} dx$$
(d)
$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

(e)
$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} dx$$

(f)
$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$$

11. Integrirajte
$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

12. Izračunajte određene integrale sljedećih racionalnih funkcija:

(a)
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x}$$

(b)
$$\int_3^4 \frac{x^2}{x^2-3x+2} dx$$

(c)
$$\int_{-2}^0 \frac{2x-3}{(x-2)^2} dx$$

(d)
$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2+x+1} dx$$

(e)
$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^6}{x^2-1} dx$$

(f)
$$\int_2^3 \frac{x^3+x^2}{x^3-3x+2} dx$$

(g)
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+3} dx$$

13. Integrirajte

(a) $\int_3^4 x(x^2-13)^{23} dx$

(b) $\int_{-2}^0 (5-2x)^9 dx$

(c) $\int_2^6 \sqrt{2x-3} dx$

(d) $\int_2^{10} \frac{x}{\sqrt{2x+5}} dx$

(e) $\int_{-1}^{0} \frac{2x-3}{1-x} dx$

(f) $\int_{0}^{2} e^{-\frac{5}{2}x} dx$

(g) $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x dx$

(h) $\int_{0}^{3} \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$

(i) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$

(j) $\int_{-2}^{1} \frac{2x+5}{x^2+5x+4} dx$

(k) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x dx$

(l) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx$

14. Izračunajte

(a) $\int_{0}^{1} \sin^5 x dx$

(b) $\int_{2}^{\pi} \sin^4 x \cos^3 x dx$

(c) $\int_{2}^{4.5} \frac{dx}{\cos x}$

(d) $\int_{1}^{2\pi} \sin^4 5x \cos^6 5x dx$

15. Izračunajte

(a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(b) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{5+4x}$

(c) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$

(d) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

16. Riješite supstitucijom

(a) $\int x(3x^2-1)^6 dx$,

(b) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$,

(c) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$,

(d) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$,

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$,

(f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

17. Izračunajte vrijednost određenog integrala primjenom parcijalne integracije:

(a) $\int_{e}^{e^2} \ln x dx$

(b) $\int_{e}^{2e} x \ln x dx$

(c) $\int_{1}^{e} \ln^2 x dx$

(d) $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx$

(e) $\int_{0}^{1} \frac{x^2 \arctan x}{x^2+1} dx$

(f) $\int_{0}^{\pi/2} x \sin x dx$

(g) $\int_{0}^{\pi} e^{-x} \cos x dx$

18. Svemirski brod ubrzava po formuli $a = 12t^2 + 6t$. Sekundu nakon početka ubrzavanja brod je imao brzinu $8m/s$ i nalazio se na 6. metru od točke orijentira. Odredite jednadžbu gibanja broda i izračunajte brzinu i položaj u trenutku ubrzavanja. Izračunajte brzinu i položaj 5 sekundi od početka ubrzavanja. Koliki je put brod prešao u 5. sekundi od početka ubrzavanja?

19. Tijelo je izbačeno u zrak brzinom v_0. Odredite formulu za računanje trenutne brzine i visine.

20. Odredite površinu omeđenu krivuljama $y^2 = x$, $xy = 1$, $x = 3$ i osi x.

21. Odredite površinu omeđenu krivuljama $y = 1 - x^2$, $y = 3 + 2x - x^2$ i osi x.

22. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = \sqrt{x+2}$ i $y = \frac{1}{2}x + 1$.

23. Izračunajte duljinu luka parabole $y^2 = 5x - x^2$ između nultočaka.

24. Izračunajte duljinu lančanice $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ oko točke s apscisom $x = 0$ do točke u kojoj je $x = a$.

25. Odredite opseg astroide
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

26. Izračunajte duljinu luka krivulje
$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$$
od $y = 1$ do $y = e$.

27. Izračunajte duljinu krivulje
$$y = \ln \sin x$$
između točaka $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{2\pi}{3}$.

Rješenja.

1. $P = 26/3$

2. $P = 12 \ln 3$

3. $P = 16$

4. $P = 18$

5. $P=2$

6. a) $27x-9x^3+\frac{9x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+c$, b) $a\ln x-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+c$, c) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{15}x^3\sqrt[4]{x^3}+c$, d)$\frac{2}{-5^x\ln 5}+\frac{1}{5\cdot 2^x\ln 2}+c$, e) $\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+x+c$, f) $-ctgx-x+c$, g) $x-arctgx+c$, h)$\ln|x+\sqrt{x-1}|+\ln|x-\sqrt{x-1}|+c$.

7. a) $\frac{3}{7}$, b) $\frac{8}{15}(2^{15}-1)$, c) $-\frac{4}{9}$, d) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{16})$, e) $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$, f) $-104\frac{24}{35}$, g) $-\frac{14}{3}+4\ln 3$, h) -1.09, i) 0, j) $-10\frac{2}{3}$.

8. a) $\frac{2}{\ln 3}$, b)$\frac{16}{15(\ln 5-\ln 3)}$.

9. (a)

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \left\{\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right\} = \int\frac{\sin t}{x}\cdot xdt=-\cos\ln x+c$$

(b)

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx &= \int\frac{1}{\cos^2 3x}dx+\int\frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx\\ &= \left\{\begin{array}{cc}3x=t & \cos 3x=s\\ 3dx=dt & -\sin 3x\cdot 3dx=ds\end{array}\right\}\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 t}dt+\int\frac{\sin 3x}{s^2}\cdot\frac{ds}{-3\sin 3x}\\ &= \frac{1}{3}tg3x-\frac{1}{3}\cdot\frac{s^{-1}}{-1}=\frac{1}{3}tg3x+\frac{1}{3\cos 3x}+c\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx &= \left\{\begin{array}{c}\sin x+\cos x=t\\ (\cos x-\sin x)dx=dt\end{array}\right\}\\ &= \int\frac{\sin x-\cos x}{t}\cdot\frac{dt}{\cos x-\sin x}=-\ln|\sin x+\cos x|+c\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int x\cdot ctg(x^2+1)dx &= \left\{\begin{array}{c}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\end{array}\right\}=\int x\cdot ctgt\cdot\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\sin t}dt\\ &= \left\{\begin{array}{c}\sin t=s\\ \cos tdt=ds\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s}=\ln|\sin(x^2+1)|+c\end{aligned}$$

(e)

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx = \left\{\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{x\cdot t}\cdot xdt=\ln(\ln x)+c$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)} &= \left\{ \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{xdt}{x(4-t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}\right| + c\end{aligned}$$

(g)

$$\int e^{\sin^2 x}\cdot \sin 2x dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 x = t \\ 2\sin x\cos x dx = dt \\ \sin 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^{\sin^2 x} + c$$

(h)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{arctgx} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}dx &= \int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} arctgx = t & \ln(1+x^2) = s \\ \frac{1}{1+x^2}dx = dt & \frac{1}{1+x^2}2xdx = ds \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{e^t}{1+x^2}\cdot(1+x^2)dt + \int \frac{x\cdot s}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)ds}{2x} + arctgx \\ &= e^{arctgx} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{2} + arctgx \\ &= e^{arctgx} + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + arctgx + c\end{aligned}$$

10. (a) $-2\ln x + 2\ln(x-2) - \frac{1}{x-2} + c$
    (b) $\ln(x-2)(x+5) + c$
    (c) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$
    (d) $x - 15\ln|x-2| + 20\ln|x-3| + c$
    (e) $\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + c$
    (f) $\frac{5}{4}\ln(x^2+4) + \frac{25}{18}\arctan\frac{x}{2} - \frac{5}{24}\ln(x^2+1) + \frac{11}{36}\arctan x + c$

11. $\frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|$

12. (a) $\frac{1}{5}\ln\frac{12}{7}$
    (b) $3.5 + 13\ln 2 - 5\ln 3$
    (c) $\frac{1}{4} - 2\ln 2$
    (d) $-\frac{3}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
    (e) $-0,0014$
    (f) 2.23

(g) 2.77

13. (a) $-5.86 \cdot 10^{12}$
(b) $1.73 \cdot 10^{9}$
(c) $8\frac{2}{3}$
(d) $22\frac{2}{3}$
(e) -2.69
(f) 0.4
(g) 1
(h) $\ln 0.8$
(i) $\frac{1}{2}$
(j) $\ln 5$
(k) $\frac{11}{24}$
(l) $\frac{21}{128}$.

14. (a) -1.911
(b) -0.0509
(c) -3.76
(d) $\frac{3\pi}{2^7}$.

15. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
(b) 0.0877
(c) $1 + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$
(d) $-4(-\frac{3+6\sqrt{2}}{8} \ln 2 + \frac{243\sqrt{2}+216}{1024}\pi + \frac{2+\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

16. (a) $\frac{1}{42}(3x^2 - 1)^7 + c$
(b) $\ln|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}| + c$
(c) $\frac{2}{3}(1 + \sqrt{x})^3 - 3(1 + \sqrt{x})^2 + 8(1 + \sqrt{x}) - 4\ln(1 + \sqrt{x}) + c$
(d) $\ln 2x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 2x + \ln 2| + c$
(e) $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right| + c$
(f) $\arccos \frac{1}{x} + c$.

17. (a) e^2
(b) $\frac{1}{4}e^2(8\ln 2 + 3)$
(c) 0.718
(d) $e - \frac{5}{e}$
(e) -0.08

(f) 1

(g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2e^{\pi}}$

18. $s=t^4+t^3+t+3$, $v=4t^3+3t^2+1$, $s(0)=3$, $v_0=1pc/s$, $v(5)=576m/s$, $s(5)=758m$, put u 5. sekundi je $758-305=453m$

19. $v(t)=-gt+v_0$, $s=-\frac{g}{2}t^2+v_0t$.

20. 1.765

21. 16

22. 4/3

23. 8.23

24. $\frac{e^{2a}-1}{2e^a}$

25. $6a$

26. $\frac{e^2+1}{4}$

27. $\ln 3$

9 Nepravi integrali

Definicija 9.1. ***Nepravi integral*** *je poopćenje određenog integrala kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (na primjer, ima vertikalnu asimptotu).*

Neprave integrale rješavamo pomoću limesa. Ako je nepravi integral konačan, kažemo da je **konvergentan** ili da **konvergira**, u protivnom je **divergentan** odnosno **divergira**.

Primjer 9.1. *Izračunajte integral*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx.$$

Rješenje. Kako funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nije u točki $x = 0$ definirana, a niti ograničena, to će biti

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left| -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0} \left| -\frac{1}{x} \right|_{\epsilon}^{1} = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + \lim_{\epsilon \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty \end{aligned}$$

Primjer 9.2. *Izračunajte*

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Ovdje funkcija nije definirana na rubu intervala.

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^{1} = \\ &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\epsilon} \right) = 2 \end{aligned}$$

Zadatak 9.1. *Izračunajte*

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rješenje. Podintegralna funkcija nije definirana u gornjoj granici.

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \arcsin x \Big|_{0}^{1-\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} (\arcsin(1 - \epsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Zadatak 9.2. *Odredite vrijednost površine*

$$\int_{0}^{1} \ln x dx.$$

Rješenje. Radi nedefiniranosti funkcije u donjoj granici

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \ln x dx.$$

Parcijalnom integracijom dobiva se

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} (x \ln x - x)_\epsilon^1 &= \lim_{\epsilon \to 0} (1 \cdot \ln 1 - 1 - \epsilon \cdot \ln \epsilon + \epsilon) = \\
&= -1 - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}} = \\
& \quad L'Hospital \\
&= -1
\end{aligned}$$

Primjer 9.3. *Odredite*

$$\int_0^\infty \sin x dx.$$

Rješenje. Po definiciji nepravog integrala

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin x dx &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \to \infty} (-\cos x)_0^b = \\
&= \lim_{b \to \infty} (-\cos b + \cos 0) = -\lim_{b \to \infty} \cos b + 1
\end{aligned}$$

Kada $b \to \infty$, $\cos b$ oscilira od vrijednosti -1 do 1. Granične vrijednosti nema, integral divergira.

Zadatak 9.3. *Odredite integral*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Rješenje. Za $c \in R$ moguće je odabrati bilo koji realan broj. Uputno je odabrati $c = 0$ radi lakoće računanja vrijednosti funkcija u nuli.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= \lim_{a \to -\infty} arctg|_a^0 + \lim_{b \to \infty} arctgx|_0^b = \\
&= \lim_{a \to -\infty} (arctg0 - arctga) + \lim_{b \to \infty} (arctgb - arctg0) = \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi
\end{aligned}$$

Supstitucija prilikom rješavanja nepravih integrala provodi se uobičajeno.

Zadatak 9.4. *Izračunajte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx.$

Rješenje. Budući podintegralna funkcija nije definirana za $x = 0$, račun ide preko limesa:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} ctgx dx = \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \ln \sin x |_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\ln \sin \frac{\pi}{2} - \ln \sin \epsilon \right) = \\
&= 0 - \lim_{\epsilon \to 0} \ln \sin \epsilon = \infty
\end{aligned}$$

10 Ogledni primjerci ispitnih zadataka

Matematika

1. Odredite najveći kut u trokutu u kojem su vrhovi točke

$$A = (2, 3, 4), \quad B = (5, 9, 8), \quad C = (3, 6, -1).$$

2. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije zadane formulom

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$

3. Nacrtajte tangentu povučenu na graf funkcije

$$y = e^{x^2+x-2}$$

   u točki s apcisom $x = 1$. Odredite duljinu dijela tangente između njenih sjecišta s koordinatnim osima.

4. Izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx.$$

5. Kolika je površina koju omeđuju krivulje $x^2 + y^2 = 2$ i $y = x^2$?

Matematika

1. Zadane su točke $A(2,3,1)$ i $B(0,-2,-3)$. Zadan je i vektor
$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$
Izračunajte
$$((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{a}) - \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{AB}.$$

2. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti kao i točke infleksije funkcije
$$y = \ln^2 x.$$

3. Nacrtajte tangentu na krivulju
$$y + \ln(3 - 2x) = 4$$
u točki s koordinatom $x = 1$. Koliko iznosi površina koju s koordinatnim osima zatvara tangenta?

4. Izračunajte i rezultat zaokružite na stotinku
$$\int_0^3 x^2 e^{-x} dx.$$

5. Kolika je jedna od površina koju sinusoida
$$y = 2\sin(3x - \pi)$$
zatvara s koordinatnom osi x?

Matematika

1. Izračunajte volumen i oplošje tetraedra čiji su vrhovi određeni točkama

$$O(0,0,0), A(2,3,-1), B(3,3,3) i C(-1,-2,4).$$

2. Nacrtajte tangente na graf funkcije

$$y = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 6x - 6$$

u točkama infleksije grafa.

3. Izračunajte

$$\int_2^4 \ln \frac{1}{2x-3} dx.$$

Rezultat zaokružite na desetinku.

4. Kolika je površina koju omeđuju $x + y = 8$ i $xy = 12$?

5. Odredite domenu, ispitajte monotonost i zakrivljenost grafa, ponašanje na rubovima domene i nacrtajte graf funkcije

$$y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Matematika

1. Neka je $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Odredite
   (a) $\vec{a} \times \vec{b}$,
   (b) $|\vec{a}|$,
   (c) kut između $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
2. Napišite jednadžbu tangente i nacrtajte tangentu na graf funkcije $y = x^2 - \ln x$ u točki s $x = 1$. Odredite koordinate sjecišta tangente i osi x.
3. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije
$$y = x \cdot e^{x-x^2}.$$
4. Izračunajte i rezultat zaokružite na stotinku
$$\int_{-1}^{1} (1 + \frac{x}{2})^3 dx.$$
5. Kolika je površina jednog od likova omeđenog krivuljama $y = \cos x$ i $y = \sin x$?

Matematika

1. Točke $A(3,0,2)$, $B(-1,0,1)$, $C(2,0,3)$ i $D(0,-5,0)$ određuju tetraedar. Odredite volumen tetraedra i njegovu visinu ako on leži na trokutu ABC.

2. Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije
$$y = e^{2x} + e^x + 1$$
u točki s apscisom $x = 0$. Odredite površinu koju tangenta zatvara s koordinatnim osima.

3. Nacrtajte graf funkcije
$$y = x\sqrt{1-x^2}$$
tako da ispitate domenu, monotonost, zakrivljenost i ponašanje na krajevima domene.

4. Izračunajte i zaokružite do na stotinku
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

5. Koliku površinu zatvaraju graf funkcije
$$y = 2\sin(3x+\pi)$$
i krivulja $3(x^2+y) = \pi x$?

Matematika

1. Točke $A(3, 0, 5), B(0, 1, 0)$ i $O(0, 0, 0)$ određuju ravninu u kojoj se nalaze. Odredite bar jedan vektor okomit na ravninu. Odredite bar jedan kut u trokutu OAB.

2. Izračunajte površinu trokuta kojeg s koordinatnim ravninama zavara tangenta na

$$y = \sin^2 x$$

   u točki za čiju apscisu vrijedi

$$tgx = 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Odredite domenu, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$y = \ln \frac{2x - 3}{x - 1}.$$

4. Rezultat zaokružite na desetinku

$$\int_4^7 x\sqrt{x^2 - 13}dx.$$

5. Odredite površinu omeđenu krivuljama $y = e^x, y = e^{-x}$ i $y = e$.

Matematika

1. Za zadane točke $A(2,3,0), B(3,2,1)$ i $C(4,4,1)$ izračunajte

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{CA}.$$

2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$$

u točki s apscisom $x = 4$. Koliku duljinu na tangenti odsijecaju njena sjecišta s koordinatnim osima?

3. Izračunajte i zaokružite na stotinku

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{1 - 2\sin x} dx.$$

4. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

5. Odredite površinu koju zatvaraju grafovi funkcija zadanih sa $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.

11 Algebarski dodatak

11.1 Potenciranje binoma

Kvadrat binoma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kub binoma:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Nadalje, vrijedi

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Proučavanjem koeficijenata, Pascal je dobio "trokut" koji daje koeficijente za sljedeću potenciju:

$$\begin{array}{llllllll}
(a+b)^1 & \Rightarrow & 1 & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & \Rightarrow & 1 & 2 & 1 & & & \\
(a+b)^3 & \Rightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
(a+b)^4 & \Rightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
(a+b)^5 & \Rightarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
(a+b)^6 & \Rightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \quad 1 \\
 & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Zadatak 11.1. *Nastavite trokut.*

Rješenje. Prvi koeficijent u rastavu $(a+b)^7$ bit će 1. sljedeći će biti jednak zbroju prvog i drugog u rastavu $(a+b)^6$ i iznosi 7. Treći koeficijent rastava $(a+b)^7$ jednak je zbroju drugog i trećeg koeficijenta u prethodnom rastavu $(a+b)^6$ i iznosi 21. Četvrti koeficijent u 7. redu jednak je zbroju trećeg i četvrtog koeficijenta u 6. redu, što iznosi 35. Za njim slijedi na petom mjestu ponovo 35 kao zbroj četvrtog i petog člana u redu iznad. Potom opet 21 pa 7 i na kraju 1:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Prvi i posljednji koeficijent uvijek su 1.
Drugi i pretposljednji koeficijent uvijek je n. Treći i pretpretposljednji koeficijenti su rezultati

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Četvrti gledani s obiju strana su

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Zanimljivo je da se koeficijenti podudaraju s brojevima kombinacija na lotu. Tako je broj kombinacija pri izvlačenju 3 različite kuglice iz bubnja sa 7 različitih kuglica:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Primjer 11.1. *Broj kombinacija na izvlačenju lota 6/45 bio bi*

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

dok bi na lotu 7/39 bio

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}.$$

Binomni koeficijent

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

koji se čita n povrh k predstavlja broj kombinacija na lotu k/n.

11.2 Potenciranje

Potenciranje prirodnim eksponentom definira se induktivno:

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^n &= x \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

Množiti i dijeliti mogu se potencije jednakih baza

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad x^m : x^n = x^{m-n}$$

i jednakih eksponenata

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n \quad x^n : y^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

Potenciranje **negativnim** eksponentom

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

prirodno je proširenje množenja i dijeljenja potencija, kao na primjeru

$$x^3 : x^7 = x^{-4} = \frac{1}{x^4}.$$

Korjenovanje m-tim korijenom može se zapisati kao

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}.$$

11.3 Trigonometrijski identiteti

Trigonometrijski identiteti izvode se iz definicija:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ctgx \cdot tgx = 1,$$

a mogu biti posljedica Pitagorina poučka:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Slijedi izvod

$$\begin{aligned}
tg^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \\
\cos^2 x \cdot tg^2 x &= 1 - \cos^2 x \\
\cos^2 x (tg^2 x + 1) &= 1 \\
\cos^2 x &= \frac{1}{tg^2 x + 1} \\
\sin^2 x &= \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1}.
\end{aligned}$$

Literatura

[1] Danko P.E., Popov A.G., Kozhevnikova T.YA.: Higher mathematics in problems and exercises, Mir Publishers, Moscow, 1983.

[2] Horvatić K.: Linearna algebra I, II, III, Matematički odjel PMF-a Sveučilišta u Zagrebu i HMD, Zagreb, 1995.

[3] Kovač Striko E.: Matematika II, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 1999.

[4] Kurepa S.: Matematička analiza, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[5] Marušić S.: Matematka I: udžbenik s riješenim primjerima, FPZ, Zagreb, 2003.

[6] Pavković-Svrtan-Veljan: Matematika - zbirka zadataka s uputama i rješenjima. Školska knjiga, Zagreb, 1983.

[7] Skok S., Brkić-Mikulić D.: Zbirka zadataka iz matematike: upute, riješeni primjeri, zadaci za samostalno rješavanje, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb 1998.