Mjera i Integral
Vježbe

September 8, 2015

Chapter 1

σ-algebre

1.1 Osnovna svojstva i prvi primjeri

Najprije uvodimo pojmove algebre i σ-algebre[1] skupova. Za skup X, familiju svih njegovih podskupova zovemo partitivni skup od X i označavamo $\mathcal{P}(X)$.

Definicija 1. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je* algebra *na X ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ *(zatvorenost na komplementiranje);*
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ *(zatvorenost na konačne unije).*

Algebra $\mathcal{A}$ je σ-algebra *ako je zatvorena na prebrojive unije tj. ako za proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$ vrijedi da $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.*

Očito je svaka σ-algebra ujedno i algebra. Također, svaka σ-algebra sadrži X kao komplement praznog skupa $\emptyset$. Navedimo neke trivijalne primjere σ-algebri.

Primjer 1. *Neka je X neprazan skup. Tada su $\{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{P}(X)$ σ-algebre na X.*

Sada pokazujemo da je svaka σ-algebra zatvorena na prebrojive presjeke. Napomenimo da se analogno pokazuje da je svaka algebra zatvorena na konačne presjeke.

Zadatak 1. *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu $X \neq \emptyset$. Dokažite da za prozivoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$ vrijedi da $\cap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.*

[1]čitamo "sigma algebra"

Rj. Uzmimo proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo da $A_n^c \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz zatvorenosti σ-algebre na prebrojive unije zaključujemo da $\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A}$. Koristeći ponovno zatvorenost σ-algebre na komplemeniranje te de Morganovu formulu za komplement unije dobivamo da $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

Slijedeću konstrukciju (koja bi vam trebala biti dobro poznata iz teorije vjerojatnosti) ćemo često koristiti tokom kolegija.

Zadatak 2. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra i neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}$. Dokažite da postoji niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da:*

1. *$B_n \cap B_m = \emptyset$ za $n \neq m$.*
2. *$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.*

Rj. Definirajmo $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$, $n > 1$. Tada očito $B_n \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da su skupovi B_n međusobno disjunktni. Neka je $m \neq n$ i $x \in B_m \cap B_n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m < n$. Iz $x \in B_m$ slijedi da $x \in A_m$. Slično, iz $x \in B_n$ slijedi da $x \notin A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ pa $x \notin A_m$. Dakle, dobili smo kontradikciju. Prema tome, zaključujemo da su B_n i B_m disjunktni.

Dokažimo sada da $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Kako $B_n \subseteq A_n$ za sve n, imamo da $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Uzmimo sada $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako $x \in A_1$, onda $x \in B_1$ i $x \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ako $x \notin A_1$ onda možemo definirati $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ (uočimo da n_0 postoji jer $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$). Minimalnost od n_0 znači da je $x \in A_{n_0}$, ali $x \notin A_m$ za $m = 1, \ldots, n_0 - 1$. Sada očito imamo da $x \in B_{n_0}$ pa $x \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. $\square$

U slijedećih nekoliko zadataka dajemo neke netrivijalne primjere algebri i σ-algebri.

Zadatak 3. *Neka je X neprebrojiv[2] skup. Definirajmo*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ je prebrojiv ili je } A^c \text{ prebrojiv}\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ σ-algebra.

Rj. Pokazati ćemo da je $\mathcal{A}$ zatvorena na prebrojive unije. Ostala dva svojstva σ-algebre se trivijalno provjere. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}$. Imamo dvije mogućnosti:

1. A_n je prebrojiv skup za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $A_{n_0}^c$ prebrojiv skup.

[2] Skup je prebrojiv ako je konačan ili u bijekciji sa $\mathbb{N}$. Skup je neprebrojiv ako nije prebrojiv.

U prvom slučaju imamo da je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ prebrojiv skup (jer je prebrojiva unija prebrojivih skupova opet prebrojiv skup) pa $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Nadalje, uočimo da vrijedi $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$. Dakle, u drugome slučaju imamo da je $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ prebrojiv skup (podskup prebrojivog skupa je prebrojiv skup) pa prema tome $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

$\square$

Zadatak 4. *Neka je X beskonačan skup. Definirajmo*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ je konačan ili je } A^c \text{ konačan}\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{A}$ algebra. Da li je $\mathcal{A}$ σ-algebra?

Rj. Familija $\mathcal{A}$ sadrži $\emptyset$ i očito je zatvorena na komplementiranje. Pokažimo da je zatvorena i na konačne unije. Dovoljno je pokazati da je unija dva skupa iz $\mathcal{A}$ opet skup iz $\mathcal{A}$. Uzmimo $A, B \in \mathcal{A}$. Slično kao i u prethodnom zadatku imamo dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da su skupovi A i B konačni. U tom slučaju, skup $A \cup B$ je isto konačan skup pa $A \cup B \in \mathcal{A}$. Druga mogućnost je da je bar jedan od skupova A^c i B^c konačan skup. Tada je očito i skup $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ konačan (jer je podskup konačnog skupa opet konačan skup) pa opet dobivamo da $A \cup B \in \mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je algebra na X.

Kako je X beskonačan skup, zaključujemo da postoji $Y = \{y_1, y_2, \ldots\} \subseteq X$ takav da je Y u bijekciji sa $\mathbb{N}$. Definirajmo $A_n = \{y_{2n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Skupovi A_n su konačni pa imamo da $A_n \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. No kako je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{y_2, y_4, y_6, \ldots\}$ beskonačan, a njegov komplement također beskonačan jer sadrži $\{y_1, y_3, y_5, \ldots\}$, zaključujemo da $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ nije zatvorena na prebrojive unije pa nije σ-algebra. $\square$

Slijedeći zadatak pokazuje da je dana algebra $\mathcal{A}$ ujedno i σ-algebra ako i samo ako je zatvorena na prebrojive unije rastućih skupova.

Zadatak 5. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu $X \neq \emptyset$. Dokažite da je $\mathcal{A}$ σ-algebra ako i samo ako za proizvoljan niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.*

Rj. Nužnost uvjeta je očita i slijedi direktno iz zatvorenosti σ-algebre na prebrojive unije.

Uzmimo sada algebru $\mathcal{A}$ koja zadovoljava uvjet iz zadatka i pokažimo da je $\mathcal{A}$ σ-algebra. Moramo dokazati da je $\mathcal{A}$ zatvorena na prebrojive unije. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u $\mathcal{A}$. Definirajmo $E_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{A}$ algebra, imamo da $E_n \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, uočimo da vrijedi $E_1 \subseteq E_2 \subset E_3 \subseteq \ldots$. Po pretpostavci imamo da $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, što smo i htjeli pokazati. $\square$

1.2 Generiranje σ-algebri

Slijedeći zadatak (iako lagan) je vrlo važan.

Zadatak 6. *Neka je $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ prozivoljna familija σ-algebri na skupu $X \neq \emptyset$. Dokažite da je $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ σ-algebra.*

Rj. Kako su $\mathcal{A}_i$ σ-algebre, imamo da $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ za svaki $i \in I$ pa $\emptyset \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Uzmimo $A \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Imamo da $A \in \mathcal{A}_i$ za svaki i. Kako su $\mathcal{A}_i$ σ-algebre, $A^c \in \mathcal{A}_i$ za svaki $i \in I$. Dakle, $A^c \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Konačno, neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Za proizvoljan $i \in I$, imamo da $A_n \in \mathcal{A}_i$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako su $\mathcal{A}_i$ σ-algebre, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i$ za svaki $i \in I$. Dakle, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. □

Slijedeći primjer pokazuje da općenito unija σ-algebri nije σ-algebra.

Primjer 2. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Definirajmo $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, X\}$. Lagano se pokaže da $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ jesu σ-algebre na X dok $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ nije σ-algebra na X.*

Neka je X proizvoljan neprazan skup i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definirajmo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ kao presjek svih σ-algebri na X koje sadrže $\mathcal{E}$ ($\mathcal{P}(X)$ je bar jedna takva). Uočimo da iz prethodnog zadatka slijedi da je $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ σ-algebra na X. Štoviše, iz definicije imamo da je $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ najmanja σ-algebra na X koja sadrži $\mathcal{E}$ tj. ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X takva da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, onda $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Kažemo da je $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ σ-algebra *generirana* sa $\mathcal{E}$.

Tvrdnje slijedeće propozicije su direktna posljedica definicije σ-algebre generirane nekom familijom. Te tvrdnje ćemo koristiti često i to bez izravnog pozivanja na ovu propoziciju.

Propozicija 1. *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada vrijedi:*

1. *ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X takva da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, onda $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$;*
2. *ako $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, onda $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$;*
3. *$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}')$ ako i samo ako $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$.*

Dokaz. Prvu tvrdnju propozicije smo već komentirali. Dokažimo drugu tvrdnju. Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$. Tada je $\mathcal{M}(\mathcal{E}')$ σ-algebra na X koja sadrži $\mathcal{E}$, pa iz prve tvrdnje propozicije slijedi da $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$.

Dokažimo naposljetku treću tvrdnju propozicije. Prepostavimo da vrijedi $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}')$. Kako je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$, zaključujemo da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Obratno, pretpostavimo da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Iz prve tvrdnje propozicije zaključujemo da $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}')$ i $\mathcal{M}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Dakle, $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}')$. □

Neka je X prozivoljan topološki prostor. Označimo sa $\mathcal{T}$ familiju svih otvorenih skupova u X i definirajmo

$$\mathcal{B}_X := \mathcal{M}(\mathcal{T}).$$

B_X se naziva *Borelovom σ-algebrom* na X. Dakle, Borelova σ-algebra na topološkom prostoru X je σ-algebra generirana familijom otvorenih skupova.

Slijedeći zadatak pokazuje da Borelovu σ-algebru možemo generirati i familijom svih zatvorenih skupova.

Zadatak 7. *Neka je X proizvoljan topološki prostor. Dokažite:*

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{M}(\{F \subseteq X : F \textit{ je zatvoren u } X\}).$$

Rj. Neka $\mathcal{F}$ označava familiju svih zatvorenih podskupova prostora X. Želimo pokazati da vrijedi $\mathcal{M}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Neka je $U \subseteq X$ otvoren. Tada je U^c zatvoren pa $U^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, iz čega slijedi da $U = (U^c)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dakle, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Analogno se pokazuje da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{T})$. Primjenom posljednje tvrdnje Propozicije 1 zaključujemo da vrijedi $\mathcal{M}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$. □

U iduća dva zadatka fokusirati ćemo se na Borelovu σ-algebru na $\mathbb{R}$. Napomenimo da na $\mathbb{R}$ gledamo kao na topološki prostor sa standardnom euklidskom topologijom. Najprije pokazujemo da je Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana familijom svih otvorenih intervala.

Zadatak 8. *Dokažite:*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\langle a, b\rangle : a < b\}).$$

Rj. Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\{\langle a, b\rangle : a < b\})$. Otvoreni intervali $\langle a, b\rangle$ su otvoreni skupovi pa pripadaju Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ iz čega odmah zaključujemo da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan otvoren skup. Kako je U otvoren i kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, za svaki $x \in U$ možemo odabrati otvoreni interval I_x čija su oba kraja racionalni brojevi takav da $x \in I_x \subseteq U$. Sada očito imamo da vrijedi $U = \cup_{x \in U} I_x$. Nadalje, uočimo da je skup svih intervala čiji su krajevi racionalni brojevi prebrojiv skup (jer je $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prebrojiv). Dakle, prikazali smo U kao prebrojivu uniju otvorenih intervala, iz čega zaključujemo da $U \in \mathcal{A}$. Iz ovoga direktno slijedi da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$. □

Sada dajemo još nekoliko opisa σ-algebre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Zadatak 9. *Dokažite:*

1. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{[a, b\rangle : a < b\})$;
2. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\langle a, b] : a < b\})$;

3. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{[a, b] : a \leq b\})$;

4. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\langle -\infty, a\rangle : a \in \mathbb{R}\})$;

5. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\langle -\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$;

6. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{\langle a, +\infty\rangle : a \in \mathbb{R}\})$;

7. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\{[a, +\infty\rangle : a \in \mathbb{R}\})$.

Rj. Dokazati ćemo prvu i četvrtu tvrdnju. Dokaz preostalih tvrdnji je sličan.

Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\{[a, b\rangle : a < b\})$. Uzmimo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Uočimo da $[a, b\rangle = \cap_{n=1}^{\infty}\langle a - \frac{1}{n}, b\rangle$. Kako skupovi $\langle a - \frac{1}{n}, b\rangle$ pripadaju Borelovoj σ-algebri i kako je σ-algebra zatvorena na prebrojive presjeke zaključujemo da $[a, b\rangle \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Odavde odmah dobivamo da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Da bi dokazali obrnutu inkluziju uzmimo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Uočimo da $\langle a, b\rangle = \cup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b\rangle$ iz čega zaključujemo da $\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}$. Koristeći prethodni zadatak dobivamo da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$. Time smo dokazali prvu tvrdnju.

Dokažimo sada četvrtu tvrdnju. Neka je $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\{\langle -\infty, a\rangle : a \in \mathbb{R}\})$. Skupovi $\langle -\infty, a\rangle$ pripadaju Borelovoj σ-algebri pa imamo da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Uzmimo sada $a, b \in \mathbb{R}$. Uočimo da vrijedi $[a, b\rangle = \langle -\infty, b\rangle \setminus \langle -\infty, a\rangle$. Odavde odmah dobivamo da $\mathcal{M}(\{[a, b\rangle : a < b\}) \subseteq \mathcal{B}$. Koristeći prvu tvrdnju zadatka dobivamo da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}$. Time smo dokazali četvrtu tvrdnju zadatka. $\square$

Zadatak 10. *Neka je X proizvoljan neprazan skup i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dokažite da je σ-algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ jednaka uniji σ-algebri $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, pri čemu je $\mathcal{F}$ prebrojiv podskup od $\mathcal{E}$.*

Rj. Neka je $\mathcal{A}$ unija σ-algebri $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, pri čemu je $\mathcal{F}$ prebrojiv podskup od $\mathcal{E}$. Mi želimo dokazati da vrijedi $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$ za svaki $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ prebrojiv, odmah dobivamo da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Sada pokazujemo suprotnu inkluziju. Najprije ćemo pokazati da je $\mathcal{A}$ σ-algebra. Očito, $\emptyset \in \mathcal{A}$. Neka je $A \in \mathcal{A}$. Tada postoji $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ prebrojiv takav da $A \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Kako je $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ σ-algebra, $A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ i zato $A^c \in \mathcal{A}$. Uzmimo sada niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{E}$ prebrojiv takav da $A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_n)$. Stavimo $\mathcal{F} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$. Tada je $\mathcal{F}$ prebrojiv podskup od $\mathcal{E}$. Nadalje, iz $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ dobivamo da $\mathcal{M}(\mathcal{F}_n) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da $A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ σ-algebra imamo da $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dakle, skup $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ se nalazi u σ-algebri generiranoj sa nekim prebrojivim podskupom od $\mathcal{E}$ iz čega slijedi da $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{A}$. Dokazali smo da je $\mathcal{A}$ σ-algebra.

Sada uočimo da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Naime, za svaki $A \in \mathcal{E}$ očito imamo da $A \in \mathcal{M}(\{A\})$, a kako je skup $\{A\}$ prebrojiv odmah dobivamo da $A \in \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ σ-algebra iz $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ odmah zaključujemo da $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Time je tvrdnja zadatka dokazana. $\square$

Slijedeći zadatak pokazuje da svaka σ-algebra na skupu X na prirodan način inducira σ-algebru na svakom podskupu od X.

Zadatak 11. *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na nepraznom skupu X. Uzmimo proizvoljan $E \subseteq X$ i definirajmo*

$$\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{A}_E$ σ-algebra na E.

Rj. Kako je $\emptyset \in \mathcal{A}$ imamo da $\emptyset = \emptyset \cap E \in \mathcal{A}_E$. Uzmimo $C \in \mathcal{A}_E$ i neka je $A \in \mathcal{A}$ takav da $C = A \cap E$. Sada se lagano provjeri da $E \setminus C = (X \setminus A) \cap E$. Kako je $\mathcal{A}$ σ-algebra, imamo da $X \setminus A \in \mathcal{A}$ pa $E \setminus C \in \mathcal{A}_E$. Neka je $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}_E$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $A_n \in \mathcal{A}$ takav da $C_n = A_n \cap E$. Kako je $\mathcal{A}$ σ-algebra, imamo da $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Nadalje, $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap E$ pa zaključujemo da $\cup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}_E$. $\square$

Idući zadatak pokazuje da svaka beskonačna σ-algebra ima bar continuum [3] mnogo elemenata. Specijalno, ne postoji beskonačna, prebrojiva σ-algebra.

Zadatak 12. *Neka je $\mathcal{A}$ beskonačna σ-algebra. Dokažite:*

1. *$\mathcal{A}$ sadrži beskonačan niz nepraznih međusobno disjunktnih skupova;*
2. *card $(\mathcal{A}) \geq c$.*

Rj. Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X. Odaberimo $E \in \mathcal{A}$ takav da $E \neq \emptyset$ i $E \neq X$. Pogledajmo σ-algebre $\mathcal{A}_E$ i $\mathcal{A}_{X\setminus E}$. Uočimo da su obje σ-algebre sadržane u σ-algebri $\mathcal{A}$ (jer $E, X \setminus E \in \mathcal{A}$). Nadalje, $A = (A \cap E) \cup (A \cap (X \setminus E))$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Dakle, svaki element σ-algebre $\mathcal{A}$ se može prikazati kao unija elementa σ-algebre $\mathcal{A}_E$ i elementa σ-algebre $\mathcal{A}_{X\setminus E}$. Kako je $\mathcal{A}$ beskonačna σ-algebra zaključujemo da je bar jedna od σ-algebri $\mathcal{A}_E$ i $\mathcal{A}_{X\setminus E}$ beskonačna. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je σ-algebra $\mathcal{A}_E$ beskonačna. Stavimo $E_1 := E$ i $\mathcal{B} = \mathcal{A}_E$. Kako je $\mathcal{B}$ beskonačna, postoji $F \in \mathcal{B}$ takav da $F \neq \emptyset$, $F \neq E$. Ponavljajući gornje argumente zaključujemo da su σ-algebre $\mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_{E\setminus F}$ sadržane u $\mathcal{A}$ i da je bar jedna od njih beskonačna. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}_F$ beskonačna. Stavimo $E_2 := F$ i nastavimo postupak. Dolazimo do niza $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ sa svojstvom da $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Definirajmo $G_1 = E_1 \setminus E_2$, $G_2 = E_2 \setminus E_3$ itd. Skupovi G_n su neprazni, međusobno disjunktni i pripadaju σ-algebri $\mathcal{A}$. Time smo dokazali prvu tvrdnju zadatka.

Da bi dokazali drugu tvrdnju zadatka, uzmimo niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{A}$. Definirajmo preslikavanje $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$ sa $f(I) = \cup_{n\in I} E_n$, $I \subseteq \mathbb{N}$. Lagano se pokaže da je preslikavanje f injektivno pa card $(\mathcal{A}) \geq$ card $(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$.

$\square$

[3] c=card $(\mathbb{R})$

Chapter 2

Mjere

Definicija 2. *Uređen par* $(X, \mathcal{M})$*, pri čemu je* X *neprazan skup i* $\mathcal{M}$ σ*-algebra na* X *naziva se* izmjerivim prostorom. *Elemente* σ*-algebre* $\mathcal{M}$ *nazivamo* izmjerivim skupovima.

Definicija 3. *Neka je* $(X, \mathcal{M})$ *izmjeriv prostor. Preslikavanje* $\mu \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *je* mjera *ako:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$*;*

2. *(*σ*-aditivnost) za proizvoljan niz* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *disjunktnih skupova u* $\mathcal{M}$ *vrijedi da* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$*.*

Uređena trojka $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *se naziva* prostor mjere.

Osnovna svojstva mjera su sadržana u slijedećem teoremu.

Teorem 1. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor mjere.*

1. *(monotonost) Ako su* $E, F \in \mathcal{M}$ *takvi da* $E \subseteq F$*, onda* $\mu(E) \leq \mu(F)$*.*

2. *(subaditivnost) Ako je* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz u* $\mathcal{M}$*, onda* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$*.*

3. *(neprekidnost odozdo) Ako je* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz u* $\mathcal{M}$ *takav da* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$*, tada* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$*.*

4. *(neprekidnost odozgo) Ako je* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz u* $\mathcal{M}$ *takav da* $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ *i* $\mu(E_{n_0}) < +\infty$ *za neki* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tada* $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$*.*

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Mjera μ je *konačna* ako $\mu(X) < +\infty$. Uočimo da u tom slučaju iz prve tvrdnje prethodnog teorema slijedi da $\mu(E) < +\infty$ za svaki $E \in \mathcal{M}$. Mjera μ je *vjerojatnosna* ako $\mu(X) = 1$. Dakle, vjerojatnosne mjere su specijalan slučaj konačnih mjera.

Mjera μ je σ*-konačna* ako postoji niz $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{M}$ takav da $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ i $\mu(E_n) < +\infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Očito je svaka konačna mjera ujedno i σ-konačna.

Nadalje, kažemo da je mjera μ je *polukonačna* ako za svaki $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = +\infty$, postoji $F \subseteq E$ takav da $0 < \mu(F) < +\infty$.

Navedimo sada nekoliko primjera mjeri.

Primjer 3. *1. Neka je X proizvoljan neprazan skup i $x \in X$. Za $E \subseteq X$ definirajmo*

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1; & \textit{ako } x \in E; \\ 0; & \textit{ako } x \notin E. \end{cases}$$

Lagano se pokaže da je δ_x mjera na $(X, \mathcal{P}(X))$. Mjera δ_x se naziva Diracova mjera *u točki x. Uočimo da je δ_x vjerojatnosna mjera.*

2. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za $E \subseteq X$ definirajmo

$$\mu(E) = \begin{cases} 0; & \textit{ako } E = \emptyset; \\ +\infty; & \textit{ako } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Tada je μ mjera na $(X, \mathcal{P}(X))$. Uočimo da μ nije σ-konačna mjera.

3. Za $E \subseteq \mathbb{N}$, neka $|E|$ označava broj elemenata skupa E ukoliko je E konačan. Definirajmo $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ sa

$$\mu(E) = \begin{cases} |E|; & \textit{ako je } E \textit{ konačan;} \\ +\infty; & \textit{ako je } E \textit{ beskonačan.} \end{cases}$$

Tada se lagano provjeri da je μ mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Uočimo da je μ σ-konačna mjera. Mjeru μ nazivamo brojeća mjera *na $\mathbb{N}$.*

Slijedeći primjer pokazuje da se pretpostavka u zadnjem dijelu (neprekidnost odozgo) Teorema 1 ne može eliminirati.

Primjer 4. *Pogledajmo prostor mjere $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, pri čemu je μ brojeća mjera. Neka je $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada očito $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ i $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Prema tome $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$, a $\lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = +\infty$.*

Zadatak 13. *Neka je X neprebrojiv skup i $\mathcal{A}$ σ-algebra iz Zadatka 3. Definirajmo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ sa*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & \textit{ako je } A \textit{ prebrojiv;} \\ +\infty; & \textit{ako je } A^c \textit{ prebrojiv.} \end{cases}$$

Dokažite da je μ mjera. Da li je μ σ-konačna?

Rj. Očito $\mu(\emptyset) = 0$. Uzmimo niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{A}$. Imamo dvije mogućnosti:

1. A_n je prebrojiv za sve $n \in \mathbb{N}$;

2. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $A_{n_0}^c$ prebrojiv.

U prvom slučaju imamo da je skup $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ prebrojiv, pa $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. U drugome slučaju imamo da je skup $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ prebrojiv (jer je $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$), pa $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$. Dokazali smo da je μ mjera. Mjera μ nije σ-konačna, jer se X ne može prikazati kao prebrojiva unija skupova konačne mjere (u našem slučaju to su prebrojivi podskupovi od X). □

Zadatak 14. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite da*

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$$

za prozivoljne $E, F \in \mathcal{M}$.

Rj. Uzmimo proizvoljne $E, F \in \mathcal{M}$. Uočimo da skupovi $E \setminus F$ i $E \cap F$ disjunktni i $E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$, što implicira da $\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F)$. Analogno, $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F)$. Dakle,

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F).$$

Nadalje, uočimo da su skupovi $E \setminus F$, $F \setminus E$ i $E \cap F$ međusobno disjunktni i da je njihova unija $E \cup F$. Prema tome,

$$\mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E) = \mu(E \cup F),$$

iz čega direktno slijedi tvrdnja zadatka. □

Zadatak 15. *Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ mjere na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{M})$ te neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativni realni brojevi. Dokažite da je $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ mjera na $(X, \mathcal{M})$.*

Rj. Imamo $(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i)(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(\emptyset) = 0$. Neka je $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{M}$. Kako su μ_i mjere, imamo da

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)(\cup_{m=1}^{\infty} E_m) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(\cup_{m=1}^{\infty} E_m) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{m=1}^{\infty} \mu_i(E_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(E_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)(E_m).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 16. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Za $E \in \mathcal{M}$ definirajmo preslikavanje $\mu_E \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ sa $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$, $A \in \mathcal{M}$. Dokažite da je μ_E mjera.*

Rj. Očito $\mu_E(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{M}$. Tada su očito i skupovi $A_n \cap E$, $n \in \mathbb{N}$ međusobno disjunktni, pa kako je μ mjera imamo da

$$\begin{aligned}\mu_E(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap E) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_E(A_n).\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 17. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{M}$. Definirajmo*

$$\limsup_n E_n := \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E_n \quad i \quad \liminf_n E_n := \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Dokažite:

1. $\mu(\liminf_n E_n) \leq \liminf_n \mu(E_n)$;

2. *ako* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$, *onda* $\mu(\limsup_n E_n) \geq \limsup_n \mu(E_n)$.

Rj. Dokažimo prvu tvrdnju zadatka.Uočimo da

$$\cap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \cap_{n=2}^{\infty} E_n \subseteq \cdots .$$

Iz neprekidnosti odozdo mjere μ, zaključujemo da vrijedi

$$\mu(\liminf_n E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(\cap_{n=k}^{\infty} E_n).$$

Odaberimo podniz $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{N}$ takav da $\liminf_n \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_{m_k})$. Za svaki k (zbog $m_k \geq k$) imamo da $\cap_{n=k}^{\infty} E_n \subseteq E_{m_k}$ pa

$$\begin{aligned}\mu(\liminf_n E_n) &= \lim_{k\to\infty} \mu(\cap_{n=k}^{\infty} E_n) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \mu(E_{m_k}) \\ &= \liminf_n \mu(E_n).\end{aligned}$$

Druga tvrdnja zadatka se dokazuje slično. $\square$

Zadatak 18. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor te $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ preslikavanje koje zadovoljava svojstva:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *ako su* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ *međusobno disjunktni, onda* $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$.

Dokažite da je μ mjera ako i samo ako je μ neprekidna odozdo.

Rj. Nužnost je direktna posljedica treće tvrdnje Teorema 1. Pretpostavimo sada da je μ odozdo neprekidna i dokažimo da je mjera. Uzmimo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{M}$. Definirajmo niz skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa $B_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada očito $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ i $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Koristeći neprekidnost odozdo funkcije μ kao i svojstvo 2., dobivamo da

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Dakle, μ je mjera. □

Zadatak 19. *Dokažite da je svaka σ-konačna mjera polukonačna.*

Rj. Neka je μ σ-konačna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{M})$. Dakle, postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{M}$ takav da $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu(A_n) < +\infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ (jer inače skupove A_n možemo zamijeniti skupovima $A_n' = A_1 \cup \ldots \cup A_n$). Uzmimo sada $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = +\infty$. Uočimo da $E = E \cap X = \cup_{n=1}^{\infty}(E \cap A_n)$, pa koristeći treće svojstvo iz Teorema 1, zaključujemo da $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap E)$. Očito postoji n takav da $\mu(E \cap A_n) > 0$. Nadalje, za taj n vrijedi i $E \cap A_n \subseteq E$ te $\mu(E \cap A_n) \leq \mu(A_n) < +\infty$. □

Slijedeći primjer pokazuje da obrat u prethodnom zadatku ne vrijedi.

Primjer 5. *Za $E \subseteq \mathbb{R}$, neka $|E|$ označava broj elemenata skupa E ukoliko je E konačan. Definirajmo $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ sa*

$$\mu(E) = \begin{cases} |E|; & \text{ako je } E \text{ konačan;} \\ +\infty; & \text{ako je } E \text{ beskonačan.} \end{cases}$$

Tada se lagano provjeri da je μ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Mjera μ je polukonačna ali nije σ-konačna.

Zadatak 20. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, pri čemu je μ polukonačna te neka je $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = +\infty$. Dokažite da za svaki $C > 0$ postoji $F \subseteq E$ takav da $C < \mu(F) < +\infty$.*

Rj. Uzmimo $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = +\infty$. Pokazati ćemo da vrijedi $\sup\{\mu(F) : F \subseteq E,\ \mu(F) < +\infty\} = +\infty$, iz čega očito slijedi tvrdnja zadatka. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $L = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E,\ \mu(F) < +\infty\} < +\infty$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo $F_n \subseteq E$ takav da $L - \frac{1}{n} < \mu(F_n) \leq L$. Ponovno, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$. Neka je $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Iz neprekidnosti odozdo mjere μ zaključujemo da $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = L$. Pogledajmo sada skup $E \setminus F$. Kako je $\mu(E) = +\infty$ i $\mu(F) = L < +\infty$, zaključujemo da $\mu(E \setminus F) = +\infty$. Dakle, postoji $G \subseteq E \setminus F$ takav da $0 < \mu(G) < +\infty$. Sada očito $F \cup G \subseteq E$ i $L < \mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G) < +\infty$, što je u kontradikciji sa definicijom broja L. $\square$

Chapter 3

Vanjske mjere

Najprije uvodimo pojam vanjske mjere.

Definicija 4. *Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ je* vanjska mjera *ako:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. *za* $A \subseteq B \subseteq X$ *vrijedi* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. *za proizvoljan niz* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \subseteq X$ *vrijedi*

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Slijedeća propozicija daje široku klasu primjera vanjskih mjera.

Propozicija 2. *Neka su $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\rho \colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ takvi da $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ i $\rho(\emptyset) = 0$. Definiramo*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \ i \ A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}, \quad A \subseteq X.$$

Tada je μ^* vanjska mjera na X.

Slijedeći primjer pokazuje da se ρ i μ^* općenito ne podudaraju na familiji $\mathcal{E}$.

Primjer 6. *Neka je $X = \mathbb{R}$ i*

$$\mathcal{E} = \{\langle a, b \rangle : -\infty \leq a < b \leq +\infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Nadalje, neka je $\rho \colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ preslikavanje definirano sa $\rho(\langle a, b \rangle) = (b - a)^2$ za $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i $\rho(\emptyset) = 0$. Označimo sa μ^* vanjsku mjeru na $\mathbb{R}$ generiranu sa ρ. Uzmimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ i definirajmo

$$A_1 = \langle 0, 1/N], \ A_2 = \langle 1/N, 2/N], \ldots, \ A_n = \langle (N-1)/N, 1].$$

Tada očito $\langle 0,1\rangle = \cup_{k=1}^N A_k$, *pa koristeći svojstva iz definicije vanjske mjere (opravdajte sve korake!) dobivamo da*

$$\begin{aligned}\mu^*(\langle 0,1\rangle) \leq \sum_{k=1}^N \mu^*(A_k) &= \sum_{k=1}^N \mu^*(\langle (k-1)/N, k/N\rangle)\\ &\leq \sum_{k=1}^N \rho(\langle (k-1)/N, k/N\rangle)\\ &= \sum_{k=1}^N 1/N^2 = 1/N.\end{aligned}$$

Pustimo li $N \to +\infty$, *dobivamo da* $\mu^*(\langle 0,1\rangle) = 0$. *S druge strane,* $\rho(\langle 0,1\rangle) = 1$.

Sada uvodimo krucijalan pojam izmjerivog skupa obzirom na vanjsku mjeru.

Definicija 5. *Neka je* μ^* *vanjska mjera na skupu* X. *Za* $A \subseteq X$ *kažemo da je* μ^**-izmjeriv ako za svaki* $E \subseteq X$ *vrijedi*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Napomena 1. *Iz svojstva vanjske mjere lagano vidimo da uvijek vrijedi*

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Dakle, $A \subseteq X$ *je* μ^**-izmjeriv ako i samo ako*

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

za svaki $E \subseteq X$.

Slijedeći teorem jedan je od najvažnijih u teoriji mjere.

Teorem 2. *Neka je* μ^* *vanjska mjera na skupu* X. *Definirajmo*

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X : E \text{ je } \mu^*\text{-izmjeriv}\}.$$

Tada vrijedi:

1. $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *je* σ*-algebra na* X*;*
2. *restrikcija vanjske mjere* μ^* *na* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *je mjera na izmjerivom prostoru* $(X, \mathcal{M}_{\mu^*})$.

Primjer 7. *Definirajmo preslikavanje* $\mu^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ *sa*

$$\mu^*(E) = \begin{cases} \sqrt{|E|}; & \text{ako } E \text{ konačan;} \\ +\infty; & \text{ako } E \text{ beskonačan.} \end{cases}$$

Koristeći nejednakost $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$*, lagano je pokazati da je* μ^* *vanjska mjera na* $\mathbb{N}$*. Uzmimo* $E \subseteq X$*,* $E \ne X$ *i* $E \ne \emptyset$*. Odaberimo* $a \in E$ *i* $b \in X \setminus E$ *te definirajmo* $A = \{a, b\}$*. Tada* $\mu^*(A) = \sqrt{2}$ *i* $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 1 + 1 = 2$*. Pokazali smo da*

$$\mu^*(A) \ne \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

iz čega zaključujemo da E *nije* μ^**-izmjeriv skup. Dakle, jedini* μ^**-izmjerivi skupovi su* $\emptyset$ *i* $\mathbb{N}$*.*

Prisjetimo se konstrukcije iz Propozicije 2. Slijedeći primjer pokazuje da elementi familije $\mathcal{E}$ nisu nu v zno μ^*-izmjerivi skupovi.

Primjer 8. *Neka je* $X = \mathbb{R}$ *i*

$$\mathcal{E} = \{\langle a, b\rangle : -\infty \le a < b \le +\infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Nadalje, neka je $\rho\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *preslikavanje definirano sa* $\rho(\langle a, b\rangle) = \sqrt{b-a}$ *za* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *i* $\rho(\emptyset) = 0$*. Označimo sa* μ^* *vanjsku mjeru na* $\mathbb{R}$ *generiranu sa* ρ *(u smislu Propozicije 2). Može se pokazati da vrijedi* $\mu^*(\langle a, b\rangle) = \sqrt{b-a}$ *za* $-\infty < a < b < +\infty$*. Uočimo da skup* $E = \langle 0, 1\rangle$ *nije* μ^**-izmjeriv. Naime, za* $A = \langle 0, 2\rangle$ *imamo da*

$$\sqrt{2} = \mu^*(A) \ne \mu^*(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = 1 + 1 = 2.$$

Zadatak 21. *Neka je* μ^* *vanjska mjera na skupu* X *i neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz međusobno disjunktnih* μ^**-izmjerivih skupova. Dokažite da vrijedi*

$$\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j),$$

za svaki $E \subseteq X$*.*

Rj. Definirajmo skupove $B_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$ i $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Koristeći μ^*-izmjerivost skupova A_n imamo:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \\ &= \ldots = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i). \end{aligned}$$

Koristeći μ^*-izmjerivost skupova B_n kao i skupa B, dobivamo

$$\begin{aligned}\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c) &= \mu^*(E)\\ &= \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c)\\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*(E\cap B^c).\end{aligned}$$

Pustimo li limes kada $n\to+\infty$ zaključujemo da

$$\mu^*(E\cap(\cup_{j=1}^{\infty}A_j))=\mu^*(E\cap B)\geq\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_j).$$

Suprotna nejednakost

$$\mu^*(E\cap(\cup_{j=1}^{\infty}A_j))=\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty}(E\cap A_j))\leq\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_j)$$

slijedi direktno iz svojstva 3 vanjske mjere. □

Zadatak 22. *Definirajmo preslikavanje* $\mu^*\colon\mathcal{P}(\mathbb{N})\to[0,+\infty]$ *sa*

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0; & \textit{ako } A=\emptyset;\\ 1; & \textit{ako je } A \textit{ konačan};\\ +\infty; & \textit{ako } A \textit{ beskonačan}.\end{cases}$$

Dokažite da je μ^* vanjska mjera na $\mathbb{N}$. Da li je skup $\{1,3,5,7,\ldots\}$ μ^*-izmjeriv?

Rj. Dokažite sami da je μ^* vanjska mjera. Skup $A=\{1,3,5,7,\ldots\}$ nije μ^*-izmjeriv jer za $E=\{1,2\}$ vrijedi:

$$\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=1+1=2\neq\mu^*(E)=1.$$

□

Sada uvodimo pojam premjere.

Definicija 6. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X. Preslikavanje $\mu\colon\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ je* premjera *ako:*

1. *$\mu(\emptyset)=0$;*
2. *ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova u $\mathcal{A}$ takvih da $\cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$, onda $\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.*

Neka je μ_0 premjera na algebri $\mathcal{A}$. Tada možemo definirati preslikavanje $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ sa

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \text{ i } E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \quad E \subseteq X. \tag{3.1}$$

Iz Propozicije 2 slijedi da je μ^* vanjska mjera na X.

Propozicija 3. *Vrijedi:*

1. $\mu^*|\mathcal{A} = \mu_0$;

2. *svaki skup iz $\mathcal{A}$ je μ^*-izmjeriv.*

Slijedeći teorem pokazuje da se svaka premjera može proširiti do mjere.

Teorem 3. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X i μ_0 premjera na $\mathcal{A}$. Označimo sa $\mathcal{M}$ σ-algebru generiranu sa $\mathcal{A}$. Tada postoji μ mjera na $\mathcal{M}$ takva da $\mu|\mathcal{A} = \mu_0$. Ako je μ_0 σ-konačna, onda je mjera μ sa tim svojstvima jedinstvena.*

Zadatak 23. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X, μ_0 premjera na $\mathcal{A}$ i μ^* inducirana vanjska mjera. Označimo sa $\mathcal{A}_\sigma$ skup svih podskupova od X koji se mogu prikazati kao prebrojiva unija skupova iz $\mathcal{A}$, te sa $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ skup svih podskupova od X koji se mogu prikazati kao prebrojiv presjek skupova iz $\mathcal{A}_\sigma$. Dokažite:*

1. *za svaki $E \subseteq X$ i $\epsilon > 0$, postoji $A \in \mathcal{A}_\sigma$ takav da $E \subseteq A$ i $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon$;*

2. *ako je $\mu^*(E) < +\infty$, tada je E μ^*-izmjeriv ako i samo ako postoji $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ takav da $E \subseteq B$ i $\mu^*(B \setminus E) = 0$.*

Rj. Dokažimo najprije prvu tvrdnju zadatka. Uzmimo $E \subseteq X$ i $\epsilon > 0$. Kako je μ^* vanjska mjera inducirana premjerom μ_0, imamo da postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Definirajmo $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada $A \in \mathcal{A}_\sigma$, $E \subseteq A$ i

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Dokažimo sada drugu tvrdnju zadatka. Uzmimo E takav da $\mu^*(E) < +\infty$ i pretpostavimo da je E μ^*-izmjeriv. Po prvome dijelu zadatka za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo odabrati $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ takav da $E \subseteq A_n$ i

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + 1/n. \tag{3.2}$$

Definirajmo $B = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Očito $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Nadalje, iz (3.2) i zbog $E \subseteq B$, imamo da $\mu^*(B) = \mu^*(E)$ te

$$\mu^*(B \setminus E) = \mu^*(B \cap E^c) = \mu^*(B) - \mu^*(E) = 0.$$

Obratno, neka je $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ takav da $E \subseteq B$ i $\mu^*(B \setminus E) = 0$. Dokažimo da je E μ^*-izmjeriv skup. Iz Propozicije 3 slijedi da je B μ^*-izmjeriv skup. Uzmimo proizvoljan $F \subseteq X$. Koristeći svojstva vanjske mjere imamo

$$\begin{aligned} \mu^*(F \cap E^c) &= \mu^*((F \cap B^c) \cup (F \cap (E^c \setminus B^c))) \\ &\leq \mu^*(F \cap B^c) + \mu^*(E^c \setminus B^c) \\ &= \mu^*(F \cap B^c) + \mu^*(B \setminus E) \\ &= \mu(F \cap B^c). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nadalje, iz $E \subseteq B$ dobivamo

$$\mu^*(F \cap E) \leq \mu^*(F \cap B). \tag{3.4}$$

Kako je B μ^*-izmjeriv skup, iz (3.3) i (3.4) zaključujemo da

$$\mu^*(F \cap E^c) + \mu^*(F \cap E) \leq \mu^*(F).$$

Skup $F \subseteq X$ je bio proizvoljan, pa zaključujemo da je E μ^*-izmjeriv skup. □

Zadatak 24. *Neka je μ^* vanjska mjera inducirana konačnom premjerom μ_0. Za $E \subseteq X$ definirajmo $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E)$. Dokažite da je E μ^*-izmjeriv ako i samo ako $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.*

Rj. Pretpostavimo prvo da je skup E μ^*-izmjeriv skup. Kako je μ^* mjera na familiji svih μ^* izmjerivih skupova i kako je $\mu^*|\mathcal{A} = \mu_0$[1] imamo

$$\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(X) = \mu_0(X),$$

iz čega direktno slijedi da $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo po prethodnom zadatku odabrati skupove $A_n, B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ takve da vrijedi $E \subseteq A_n$, $E^c \subseteq B_n$, te

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \mu^*(B_n) \leq \mu^*(E^c) + \frac{1}{n}.$$

Iz Propozicije 3 slijedi da su skupovi A_n i B_n μ^*-izmjerivi. Koristeći Zadatak 8 dobivamo da (uočite da iz $E \subseteq A_n$ i $E^c \subseteq B_n$ slijedi da $A_n \cup B_n = X$)

$$\begin{aligned} \mu^*(A_n \cap B_n) &= \mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n \cup B_n) \\ &\leq \mu^*(E) + \mu^*(E^c) - \mu^*(X) + \frac{2}{n} \\ &= \mu^*E) - \mu_*(E) + \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

[1] $\mathcal{A}$ je algebra na kojoj je definirana premjera μ_0

Neka je i $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ i $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Tada $A, B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Nadalje, pustimo li limes kada $n \to +\infty$ u nejednakosti 3.5, dobivamo $\mu^*(A \cap B) = 0$. Kako je $E^c \subseteq B$, iz monotonosti vanjske mjere zaključujemo da vrijedi

$$\mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A \cap B) = 0.$$

Dakle, $A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $E \subseteq A$ i $\mu^*(A \setminus E) = 0$. Iz prethodnog zadatka zaključujemo da je E μ^*-izmjeriv skup. $\square$

Slijedeći zadatak pokazuje da bez pretpostavke o σ-konačnosti premjere nemamo jedinstvenost proširenja (vidi Teorem 3).

Zadatak 25. *Neka je $\mathcal{A}$ kolekcija svih konačnih unija skupova $\langle a, b] \cap \mathbb{Q}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Može se pokazati da je $\mathcal{A}$ algebra skupova na $\mathbb{Q}$.* [2]

1. *Dokažite da je σ-algebra generirana sa $\mathcal{A}$ jednaka $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.*
2. *Definirajmo $\mu_0 \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ na $\mathcal{A}$ sa $\mu_0(\emptyset) = 0$ i $\mu_0(A) = +\infty$ za $A \neq \emptyset$. Dokažite da je μ_0 premjera i da postoji više od jedne mjere na $\mathbb{Q}$ čija je restrikcija na $\mathcal{A}$ jednaka μ_0.*

Rj. Dokažimo najprije prvu tvrdnju zadatka. Označimo sa $\mathcal{M}$ σ-algebru na $\mathbb{Q}$ generiranu sa $\mathcal{A}$. Uočimo da za svaki $q \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\langle q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q} \right).$$

Dakle, $\{q\}$ je moguće prikazati kao prebrojiv presjek elemenata iz $\mathcal{A}$, iz čega zaključujemo da $\{q\} \in \mathcal{M}$. Uzmimo sada prozivoljan $A \subseteq \mathbb{Q}$. Uočimo da A možemo zapisati u obliku $A = \cup_{q \in A} \{q\}$, iz čega slijedi da $A \in \mathcal{M}$. Dakle, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju zadatka. Lagano se pokaže da je μ_0 doista premjera. Za prozivoljan $A \subseteq \mathbb{Q}$ definirajmo

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & \text{ako } A = \emptyset; \\ +\infty; & \text{ako } A \neq \emptyset. \end{cases} \quad \text{i} \quad \nu(A) = \begin{cases} |A|; & \text{ako je } A \text{ konačan}; \\ +\infty; & \text{ako je } A \text{ beskonačan}. \end{cases}$$

Lagano je pokazati da su μ i ν mjere na $\mathbb{Q}$ i da je njihova restrikcija na $\mathcal{A}$ upravo premjera μ_0. $\square$

[2] Uz pomoć Propozicije 1.7 iz Follanda

Chapter 4

Borelove mjere na $\mathbb{R}$

U ovom poglavlju opisati ćemo sve mjere na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ koje su konačne na svim ograničenim Borelovim skupovima.

Najprije uvodimo potrebnu terminologiju. Skupove oblika $\langle a, b]$ ili $\langle a, +\infty\rangle$ ili $\emptyset$, pri čemu je $-\infty \leq a < b < +\infty$ nazivamo h-intervalima. Uočimo da je presjek dva h-intervala opet h-interval te da je komplement h-intervala ili h-interval ili disjunktna unija dva h-intervala. Neka je $\mathcal{A}$ familija svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji se mogu napisati kao konačna unija disjunktnih h-intervala. Koristeći Propoziciju 1.7. iz Follanda lagano dobijemo da je $\mathcal{A}$ algebra na $\mathbb{R}$. Iz Zadatka 9 zaključujemo da je σ-algebra generirana sa $\mathcal{A}$ jednaka $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Propozicija 4. *Neka je $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Za $\langle a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ disjunktne h-intervale definirajmo*

$$\mu_0(\cup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)). \tag{4.1}$$

Također, neka je $\mu_0(\emptyset) = 0$. Tada je μ_0 premjera na $\mathcal{A}$.

Slijedeći teorem direktna je posljedica Teorema 3.

Teorem 4. *Neka je F rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Tada postoji jedinstvena mjera μ_F na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ takva da*

$$\mu_F(\langle a, b]) = F(b) - F(a), \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

Nadalje, ako je G neka druga takva funkcija, onda $\mu_F = \mu_G$ ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da $G = F + c$.

Slijedeći zadatak pokazuje da vrijedi i obrat prethodnog teorema.

Zadatak 26. *Neka je μ mjera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ koja je konačna na svim ograničenim Borelovim skupovima. Definirajmo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa*

$$F(x) = \begin{cases} \mu(\langle 0, x]) & \text{ako } x > 0, \\ 0 & \text{ako } x = 0. \\ -\mu(\langle x, 0]) & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Dokažite da je F rastuća i zdesna neprekidna funkcija te da vrijedi $\mu_F = \mu$.

Rj. Prije svega uočimo da vrijedi $F(x) \leq 0$ za $x \leq 0$ i $F(x) \geq 0$ za $x \geq 0$. Prema tome, da bi dokazali da je F rastuća funkcija dovoljno je pokazati da je F rastuća na $\mathbb{R}^-$ i na $\mathbb{R}^+$. Uzmimo $x_1 \leq x_2 < 0$. Uočimo da vrijedi $\langle x_2, 0] \subseteq \langle x_1, 0]$, iz čega slijedi da $\mu(\langle x_2, 0]) \leq \mu(\langle x_1, 0])$. Dakle, $F(x_1) \leq F(x_2)$, pa imamo da je F rastuća na $\mathbb{R}^-$. Analogno se pokazuje da je F rastuća na $\mathbb{R}^+$.

Dokažimo da je F zdesna neprekidna u svakoj točki. Neka je $x \geq 0$ i neka je $(x_n)_n$ niz takav da $x_n \searrow x$. Tada očito vrijedi $\langle 0, x_1] \supseteq \langle 0, x_2] \supseteq \ldots$ i $\cap_{n=1}^{\infty} \langle 0, x_n] = \langle 0, x]$. Koristeći neprekidnost odozgo mjere μ zaključujemo da vrijedi $F(x_n) \to F(x)$. Dakle, F je zdesna neprekidna u svakoj točki $x \geq 0$. Analogno se pokazuje da je F zdesna neprekidna u svakoj točki $x < 0$.

Konačno, lagano je provjeriti da vrijedi

$$\mu(\langle a, b]) = F(b) - F(a), \quad a < b.$$

Doista, za npr. $a < 0 < b$ imamo

$$\mu(\langle a, b]) = \mu(\langle a, 0]) + \mu(\langle 0, b]) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a).$$

Sada iz prethodnog teorema zaključujemo da vrijedi $\mu = \mu_F$. $\square$

Zadatak 27. *Neka je $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Dokažite da vrijedi $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a, b\rangle) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$ i $\mu_F(\langle a, b\rangle) = F(b-) - F(a)$.*[1]

Rj. Uočimo da vrijedi $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} \langle a - 1/n, a]$, pa koristeći neprekidnost odozgo mjere μ_F dobivamo

$$\begin{aligned} \mu_F(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(\langle a - 1/n, a]) &= \lim_{n\to\infty} (F(a) - F(a - 1/n)) \\ &= F(a) - F(a-). \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \mu_F([a, b]) = \mu_F(\langle a, b]) + \mu_F(\{a\}) &= F(b) - F(a) + F(a) - F(a-) \\ &= F(b) - F(a-). \end{aligned}$$

[1] $F(a-)$ označava limes slijeva funkcije F u točki a.

Također,

$$\mu_F([a,b\rangle) = \mu_F([a,b]) - \mu_F(\{b\}) = F(b) - F(a-) - F(b) + F(b-)$$
$$= F(b-) - F(a-),$$

te konačno

$$\mu_F(\langle a,b\rangle) = \mu_F([a,b\rangle) - \mu_F(\{a\}) = F(b-) - F(a-) - F(a) + F(a-)$$
$$= F(b-) - F(a).$$

□

Istaknimo nekoliko vrlo važnih stvari. Neka je F rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Neka je μ_0 premjera definirana sa (4.1). Njoj možemo pridružiti vanjsku mjeru μ_F^* na $\mathbb{R}$ definiranu sa (3.1). Neka je $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ σ-algebra svih μ_F^*-izmjerivih skupova. Iz Propozicije 3 slijedi da $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu_F^*}$. Također, iz Propozicije 3 i Teorema 4 slijedi da $\mu_F^*|\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mu_F$. Ispada da je sigma algebra $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ "puno veća" od σ-algebre $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Preciznije, vrijedi card $\mathcal{M}_{\mu_F^*} = 2^c$ i card $\mathcal{B}_\mathbb{R} = c$. Prisjetimo li se da je restrikcija vanjske mjere na σ-algebru izmjerivih podskupova mjera, zaključujemo da je mjeru μ_F moguće proširiti do mjere na σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ koja je puno veća od σ-algebre $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. To proširenje ćemo također označavati sa μ_F. Mjera μ_F se naziva *Lebesgue-Stieltjesova mjera* generirana sa F.

Iz prethodne diskusije imamo da za svaki $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ vrijedi

$$\mu_F(E) = \mu_F^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(\langle a_n, b_n]) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n]\right\}.$$

Slijedeća propozicija kaže da u gornjoj jednakosti h-intervale možemo zamijeniti sa otvorenim intervalima.

Propozicija 5. *Za proizvoljan $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ vrijedi*

$$\mu_F(E) = \mu_F^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(\langle a_n, b_n\rangle) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle\right\}.$$

Teorem 5. *Za proizvoljan $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ vrijedi*

$$\mu_F(E) = \inf\{\mu_F(U) : U \supseteq E \text{ i } U \text{ je otvoren}\}$$
$$= \sup\{\mu_F(K) : K \subseteq E \text{ i } K \text{ je kompaktan}\}.$$

Slijedeći teorem daje karakterizaciju skupova koji pripadaju σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$.

Teorem 6. *Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$. Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$;

2. $E = V \setminus N_1$*, pri čemu je* V G_δ*-skup*[2] *i* $\mu_F^*(N_1) = 0$*;*

3. $E = H \cup N_2$*, pri čemu je* H F_δ*-skup*[3] *i* $\mu_F^*(N_2) = 0$*.*

Zadatak 28. *Neka je* $E \in \mathcal{M}_{\mu_F^*}$ *takav da* $\mu_F(E) < +\infty$*. Dokažite da za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* A *koji je konačna unija otvorenih intervala takav da* $\mu_F(E \triangle A) < \epsilon$*.*

Rj. Iz Teorema 5 slijedi da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoje U otvoren i K kompaktan takvi da $K \subseteq E \subseteq U$ i

$$\mu_F(U) - \epsilon/2 \leq \mu_F(E) \leq \mu_F(K) + \epsilon/2.$$

Za svaki $x \in K$ možemo odabrati otvoreni interval I_x takav da $x \in I_x \subseteq U$. Tada očito $K \subseteq \cup_{x \in K} I_x$. Kako je K kompaktan, postoje $x_1, \ldots, x_n \in K$ takvi da $K \subseteq I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_n}$. Definirajmo

$$A = I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_n}.$$

Imamo

$$\mu_F(A \setminus E) \leq \mu_F(U \setminus E) = \mu_F(U) - \mu_F(E) \leq \epsilon/2$$

i

$$\mu_F(E \setminus A) \leq \mu_F(E \setminus K) = \mu_F(E) - \mu_F(K) \leq \epsilon/2.$$

Sada dobivamo

$$\mu_F(A \triangle E) \leq \mu_F(A \setminus E) + \mu_F(E \setminus A) \leq \epsilon.$$

□

Sada ćemo se koncentrirati na najvažniju mjeru na $\mathbb{R}$. Definirajmo preslikavanje $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $F(x) = x$. Uočimo da je funkcija F rastuća i zdesna neprekidna (štoviše ona je neprekidna), pa inducira mjeru μ_F. Ta mjera se naziva *Lebesgueova mjera* na $\mathbb{R}$ i od sada ćemo ju označavati sa m. Također σ-algebru $\mathcal{M}_{\mu_F^*}$ označavamo sa $\mathcal{L}$.

Slijedeći teorem pokazuje da se Lebesgueova mjera ponaša dobro obzirom na translacije i dilatacije. Najprije uvodimo neke oznake. Za $E \subseteq \mathbb{R}$ te $r, s \in \mathbb{R}$ definiramo

$$E + s := \{x + s : x \in E\} \quad \text{i} \quad rE := \{rx : x \in E\}.$$

Teorem 7. *Za* $E \in \mathcal{L}$ *te* $r, s \in \mathbb{R}$ *imamo da* $E + s \in \mathcal{L}$ *i* $rE \in \mathcal{L}$*. Nadalje,*

$$m(E + s) = m(E) \quad \textit{i} \quad m(rE) = |r| m(E).$$

[2] prebrojiv presjek otvorenih skupova
[3] prebrojiva unija kompaktnih skupova

Prisjetimo se da σ-algebra $\mathcal{L}$ ima 2^c elemenata, dakle onoliko koliko ima podskupova od $\mathbb{R}$. Međutim $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sada ćemo konstruirati primjer skupa koji se ne nalazi u $\mathcal{L}$.

Primjer 9. *Na skupu $\mathbb{R}$ definiramo relaciju $\sim$ sa: $x \sim y$ ako $x - y \in \mathbb{Q}$. Lagano se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Označimo sa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ kvocijentni skup koji se sastoji od svih klasa ekvivalencije. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $y \in [0, 1\rangle$ takav da $x \sim y$. Dakle, svaka klasa iz $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ima svog predstavnika u segmentu $[0, 1]$. Koristeći aksiom izbora zaključujemo da možemo odabrati $V \subseteq [0, 1]$ sa svojstvom da V sadrži točno jednog predstavnika svake klase iz $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Tvrdimo da $V \notin \mathcal{L}$. Neka je $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Definirajmo $V_k = V + q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Nije teško provjeriti (učinite to!) da vrijede slijedeće tvrdnje:*

1. *skupovi V_k su disjunktni;*
2. $[0, 1] \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} V_k \subseteq [-1, 2]$.

Pretpostavimo da $V \in \mathcal{L}$. Iz gornjih svojstava i Teorema 7 slijedi

$$1 = m([0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(V_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(V) \leq m([-1, 2]) = 3,$$

što je očito nemoguće.

Napomena 2. *Prisjetimo se da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}$. Također smo napomenuli da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{L}$. Kasnije u toku kolegija ćemo dati eksplicitan primjer skupa koji se nalazi u $\mathcal{L}$ a koji nije Borelov.*

Zadatak 29. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Dokažite da vrijedi $m(A) = 0$.*

Rj. Iz Zadatka 27 slijedi da $m(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Koristeći σ-aditivnost mjere m lagano dobijemo tvrdnju zadatka. $\square$

Prirodno je postaviti pitanje postoji li neprebrojiv skup Lebesgueove mjere nula. Odgovor je potvrdan.

Primjer 10. *Krenimo od segmenta $C_0 = [0, 1]$. Podijelimo C_0 na tri jednaka dijela te definirajmo $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ (dakle izbacili smo srednji dio). C_1 se sastoji od dva segmenta. Podijelimo li svaki od njih na tri jednaka dijela i izbacimo li srednji dio dobivamo*

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Nastavimo li ovaj postupak dolazimo do skupova C_n, $n \in \mathbb{N}$. Svaki C_n je unija od 2^n segmenata. Definirajmo $C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$.[4]. Može se pokazati da vrijedi $m(C) = 0$ i card $C = c$ (vidi Folland str. 38).

[4] skup C se naziva Cantorov skup

Zadatak 30. *Dokažite:*

1. *za svaki $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}$ otvoren vrijedi $m(U) > 0$;*
2. *za svaki $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan vrijedi $m(K) < +\infty$.*

Rj. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ prozivoljan otvoren i neprazan skup. Uzmimo $x \in U$ i odaberimo $r > 0$ takav da $\langle x - r, x + r\rangle \subseteq U$. Imamo

$$m(U) \geq m(\langle x - r, x + r\rangle) = 2r > 0.$$

Neka je sada $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan. Tada je K ograničen pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $K \subseteq [a, b]$. Sada imamo

$$m(K) \leq m([a, b]) = b - a < +\infty.$$

□

Zadatak 31. *Neka je $E \in \mathcal{L}$ i $m(E) > 0$. Dokažite da za svaki $\alpha < 1$ postoji otvoreni interval I takav da $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.*

Rj. Neka je E kao u iskazu zadatka i takav da $m(E) < +\infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha < 1$ takav da za svaki I otvoreni interval vrijedi $m(E \cap I) \leq \alpha m(I)$. Neka je $(\langle a_k, b_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ niz otvorenih intervala takav da $E \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}\langle a_k, b_k\rangle$. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} m(E) &= m(E \cap (\cup_{k=1}^{\infty}\langle a_k, b_k\rangle)) \\ &= m(\cup_{k=1}^{\infty}(E \cap \langle a_k, b_k\rangle)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap \langle a_k, b_k\rangle) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha m(\langle a_k, b_k\rangle) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k). \end{aligned}$$

Uzmemo li infimum po svim nizovima otvorenih intervala $(\langle a_k, b_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ sa svojstvom $E \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}\langle a_k, b_k\rangle$ dobijemo (koristeći Propoziciju 5)

$$m(E) \leq \alpha m(E) < m(E),$$

što je očito nemoguće.

Promotrimo sada situaciju kada je $m(E) = +\infty$. Neka je J interval takav da $0 < m(E \cap J) < +\infty$. Po dokazanome postoji otvoreni interval I takav da $m((E \cap J) \cap I) > \alpha m(I)$. Sada imamo

$$\alpha m(I) < m((E \cap J) \cap I) \leq m(E \cap I),$$

pa tvrdnja zadatka vrijedi i u ovom slučaju. □

Zadatak 32. *Neka je $E \in \mathcal{L}$ i $m(E) > 0$. Dokažite da skup $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ sadrži otvoreni interval sa središtem u točki 0.*

Rj. Odaberimo $\alpha \in \langle 3/4, 1\rangle$. Iz prethodnog zadatka imamo da postoji otvoreni interval I takav da $m(E \cap I) > \alpha m(I)$. Sada tvrdimo da vrijedi

$$\langle -1/2m(I), 1/2m(I)\rangle \subseteq E - E. \tag{4.2}$$

Uočimo da (4.2) implicira tvrdnju zadatka. Uzmimo $z \in \langle -1/2m(I), 1/2m(I)\rangle$ i definirajmo skupove

$$A = E \cap I \quad \text{i} \quad B = (E \cap I) + z.$$

Pretpostavimo da su skupovi A i B disjunktni. Tada imamo da $m(A \cup B) = m(A) + m(B) = 2m(A) > \frac{3}{2}m(I)$. S druge strane, $A \cup B \subseteq I \cup (I + z)$, a lagano se vidi da $m(I \cup (I + z)) \leq \frac{3}{2}m(I)$. Dakle, skupovi A i B nisu disjunktni, pa postoji $y \in A \cap B$, iz čega lagano slijedi da $z \in E - E$. $\square$

Zadatak 33. *Dokažite da postoji $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ takav da $m(E) < +\infty$ i da za sve $a < b$ vrijedi $m(E \cap \langle a, b\rangle) > 0$.*

Rj. Neka je $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Definirajmo

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}\rangle.$$

Imamo

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} < +\infty.$$

Lagano je pokazati da E zadovoljava uvjete zadatka. $\square$

Chapter 5

Izmjerive funkcije

Neka su X i Y skupovi te $f\colon X \to Y$ proizvoljna funkcija. Prisjetimo se da sa $f^{-1}(E)$ označavamo *prasliku* skupa $E \subseteq Y$ po funkciji f. Dakle,

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}.$$

Zadatak 34. *Neka su X, Y skupovi, $f\colon X \to Y$ funkcija te E, F, E_i, $i \in I$ podskupovi od Y. Dokažite:*

1. $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$;
2. $f^{-1}(\cap_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(E_i)$;
3. $f^{-1}(\cup_{i\in I} E_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$;

Rj. Dokazati ćemo samo zadnju tvrdnju zadatka. Dokazi ostalih tvdnji su analogni. Uzmimo $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} E_i)$. Tada $f(x) \in \cup_{i\in I} E_i$ pa postoji $i_0 \in I$ takav da $f(x) \in E_{i_0}$, tj. $x \in f^{-1}(E_{i_0})$. Dakle, $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$. Zaključujemo da vrijedi $f^{-1}(\cup_{i\in I} E_i) \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$. Suprotnu inkluziju dobijemo na način da ponovimo gornje argumente u suprotnom smjeru. □

Uvedimo pojam izmjerive funkcije.

Definicija 7. *Neka su $(X, \mathcal{M})$ te $(Y, \mathcal{N})$ izmjerivi prostori. Funkcija $f\colon X \to Y$ je* izmjeriva *(obzirom na par σ-algebri $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$) ako za svaki $E \in \mathcal{N}$ vrijedi da $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.*

Tvrdnja slijedećeg zadatka je vrlo korisna u primjenama.

Zadatak 35. *Pretpostavimo da je σ-algebra $\mathcal{N}$ generirana sa $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Tada je funkcija $f\colon X \to Y$ izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ako i samo ako $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.*

Rj. Nužnost uvjeta slijedi direktno iz definicije izmjerive funkcije. Pretpostavimo sada da $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$ i definirajmo

$$\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{N} : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Uočimo da vrijedi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Nadalje, koristeći Zadatak 34 lagano se pokaže da je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Kako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ i kako je $\mathcal{N}$ generirana sa $\mathcal{E}$ zaključujemo da vrijedi $\mathcal{F} = \mathcal{N}$, iz čega direktno slijedi da je f izmjeriva funkcija. $\square$

Slijedeći zadatak daje široku klasu primjera izmjerivih funkcija.

Zadatak 36. *Neka su X i Y topološki prostori i $f: X \to Y$ neprekidna funkcija. Dokažite da je f izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$.*

Rj. Kako je f neprekidna funkcija, za proizvoljan $U \subseteq Y$ otvoren imamo da je $f^{-1}(U)$ otvoren skup u X, pa specijalno $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}_X$. Kako otvoreni skupovi u Y generiraju σ-algebru $\mathcal{B}_X$, tvrdnja zadatka slijedi direktno iz Zadatka 35. $\square$

Zadatak 37. *Neka su $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ i $(Z, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori te $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ izmjerive funkcije. Dokažite da je $g \circ f: X \to Z$ izmjeriva funkcija.*

Rj. Lagano se pokaže (učinite to!) da za proizvoljan $G \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(E)).$$

Kako je g izmjeriva funkcija imamo da $g^{-1}(E) \in \mathcal{N}$. Koristeći izmjerivost funkcije f zaključujemo da $f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathcal{M}$. $\square$

Neka je X skup i $A \subseteq X$. Sa χ_A označavati ćemo karakterističnu funkciju skupa A. Ona je definirana sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A; \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Zadatak 38. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor te $A \subseteq X$. Dokažite da je funkcija χ_A izmjeriva ako i samo ako $A \in \mathcal{M}$.*

Rj. Pretpostavimo prvo da je funkcija χ_A izmjeriva. Kako je $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ i kako je $\{1\}$ Borelov skup, zaključujemo da $A \in \mathcal{M}$.

Pretpostavimo sada da $A \in \mathcal{M}$. Za proizvoljan $B \subseteq \mathbb{R}$ Borelov imamo

$$\chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset; & 0, 1 \notin B \\ A; & 1 \in B, 0 \notin B \\ A^c; & 1 \notin B, 0 \in B \\ X; & 0, 1 \in B, \end{cases}$$

iz čega slijedi da $\chi_A^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Dakle, χ_A je izmjeriva funkcija. $\square$

Napomena 3. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor i $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcija. Reći ćemo da je f izmjeriva ako je izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Dakle, ukoliko ne naglasimo drukčije, na $\mathbb{R}$ ćemo gledati Borelovu σ-algebru. Općenitije, ukoliko ne naglasimo drukčije, na $\mathbb{R}^n$ ćemo gledati kao na izmjeriv prostor obzirom na Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.*

Zadatak 39. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor i $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcija. Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *f je izmjeriva;*
2. *$f^{-1}(\langle a, +\infty\rangle) \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$;*
3. *$f^{-1}([a, +\infty\rangle) \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$;*
4. *$f^{-1}(\langle -\infty, a\rangle) \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$;*
5. *$f^{-1}(\langle -\infty, a]) \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.*

Rj. Tvrdnja zadatka slijedi direktno iz Zadataka 9 i 35. □

Zadatak 40. *Dokažite da je svaka monotona funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva.*

Rj. Dokažimo tvrdnju u slučaju kada je f rastuća funkcija. Iz prethodnog zadatka slijedi da je dovoljno pokazati da je skup $f^{-1}([a, +\infty\rangle)$ Borelov za svaki $a \in \mathbb{R}$. Neka je

$$b = \inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\},$$

pri čemu dogovorno uzimamo da $\inf \emptyset = +\infty$. Sada imamo nekoliko mogućnosti. Ako $b = +\infty$, onda $f^{-1}([a, +\infty\rangle) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Također, ako $b = -\infty$ onda $f^{-1}([a, +\infty\rangle) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Dakle, možemo pretpostaviti da $b \in \mathbb{R}$. Ukoliko $f(b) \geq a$, onda $f^{-1}([a, +\infty\rangle) = [b, +\infty\rangle \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. S druge strane, ako $f(b) < a$ onda $f^{-1}([a, +\infty\rangle) = \langle b, +\infty\rangle \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

U idućem zadatku ćemo koristiti slijedeći rezultat.

Propozicija 6. *$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ je generirana skupovima oblika $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, pri čemu su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

Zadatak 41. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor te $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije. Definiramo $h\colon X \to \mathbb{R}^2$ sa*

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Dokažite da je h izmjeriva funkcija.

Rj. Neka su $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Imamo

$$\begin{aligned} h^{-1}(A \times B) &= \{x \in X : h(x) \in A \times B\} \\ &= \{x \in X : (f(x), g(x)) \in A \times B\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in A \text{ i } g(x) \in B\} \\ &= f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B). \end{aligned}$$

Kako su f i g izmjerive funkcije imamo da $h^{-1}(A \times B) \in \mathcal{M}$. Tvrdnja zadatka slijedi iz prethodne propozicije i Zadatka 35. $\square$

Zadatak 42. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor te $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije. Dokažite da su $f + g$ i $f \cdot g$ također izmjerive funkcije.*

Rj. Definirajmo $S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa $S(x, y) = x + y$. Funkcija S je neprekidna pa je i izmjeriva. Neka je h izmjeriva funkcija iz prethodnog zadatka. Uočimo da vrijedi $f + g = S \circ h$, iz čega slijedi da je $f + g$ također neprekidna funkcija. Analogno se pokazuje da je $f \cdot g$ neprekidna funkcija. $\square$

U uvom kolegiju baviti ćemo se i sa funkcijama koje poprimaju vrijednosti u $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Da bi govorili o izmjerivim funkcijama $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ moramo najprije reći koju σ-algebru gledamo na $\overline{\mathbb{R}}$. Definiramo

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Lagano se pokaže da je $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ je σ-algebra i ukoliko ne naglasimo drukčije na $\overline{\mathbb{R}}$ gledamo kao na izmjeriv prostor obzirom na σ-algebru $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Nadalje, nije teško pokazati da je $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ generirana skupovima $[a, +\infty]$ ili $[-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Isto vrijedi i za skupove oblika $\langle a, +\infty]$ odnosno $[-\infty, a\rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 43. *Neka je $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ takva da $f^{-1}(\langle r, +\infty]) \in \mathcal{M}$ za svaki $r \in \mathbb{Q}$. Dokažite da je f izmjeriva funkcija.*

Rj. Uzmimo $a \in \mathbb{R}$ i neka je $(r_n)_n$ niz u $\mathbb{Q}$ takav da $r_n \searrow a$. Imamo

$$f^{-1}(\langle a, +\infty]) = f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} \langle r_n, +\infty]) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\langle r_n, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

Kako skupovi $\langle a, +\infty]$ generiraju $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tvrdnja zadatka slijedi iz Zadatka 35. $\square$

Propozicija 7. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor te neka je $(f_n)_n$ niz izmjerivih funkcija $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tada su funkcije*

$$g_1(x) = \sup_n f_n(x), \quad g_2(x) = \inf_n f_n(x)$$

te

$$g_3(x) = \limsup_n f_n(x), \quad g_4(x) = \liminf_n f_n(x)$$

također izmjerive.

Slijedeći primjer pokazuje da supremum neprebrojive familije izmjerivih funkcija ne mora biti izmjeriva funkcija.

Primjer 11. *Odaberimo $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da $A \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Uočimo da vrijedi*

$$\chi_A = \sup_{x \in A} \chi_{\{x\}}.$$

Funkcije $\chi_{\{x\}}$, $x \in A$ jesu izmjerive, a χ_A nije (vidi Zadatak 38).

Kao direktnu posljedicu prethodne propozicije dobivamo slijedeći korolar.

Korolar 1. *Ako su $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjerive funkcije, tada su i $\max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$ također izmjerive funkcije.*

Zadatak 44. *Neka je $(f_n)_n$ niz izmjerivih funkcija $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dokažite da je skup*

$$A = \left\{ x \in X : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ postoji} \right\}$$

izmjeriv skup. Nadalje, dokažite da je funkcija $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f_n(x), & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

izmjeriva.

Rj. Neka su funkcije g_3 i g_4 definirane kao u Propoziciji 7. Uočimo da vrijedi

$$A = \{x \in X : g_3(x) = g_4(x)\}.$$

Označimo li sa h razliku $g_3 - g_4$, zaključujemo da $A = h^{-1}(\{0\})$. Iz izmjerivosti funkcije h i skupa $\{0\}$ imamo da je A izmjeriv. Nadalje, uočimo da vrijedi $f = g_3 \cdot \chi_A$, iz čega zaključujemo da je f izmjeriva funkcija. $\square$

Chapter 6

Lebesgueov integral

6.1 Integracija nenegativnih funkcija

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Uvedimo oznaku

$$L^+ = \{f\colon X \to [0, +\infty] : f \text{ je izmjeriva}\}.$$

U ovom poglavlju naučiti ćemo integrirati funkcije iz L^+. Najprije započinjemo sa tzv. jednostavnim funkcijama.

Definicija 8. *Funkcija $f \in L^+$ je jednostavna ako je njen skup vrijednosti konačan skup.*

Neka je f jednostavna funkcija i neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup vrijednosti od f. Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiramo

$$E_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}.$$

Skupovi E_i pripadaju σ-algebri $\mathcal{M}$ (jer je f izmjeriva) i vrijedi

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \tag{6.1}$$

Zapis (6.1) nazivamo *standardnom reprezentacijom* jednostavne funkcije f. Važnost jednostavnih funkcija očituje se u slijedećem rezultatu.

Propozicija 8. *Za svaku funkciju $f \in L^+$ postoji niz jednostavnih funkcija $(\phi_n)_n$ sa slijedećim svojstvima:*

1. $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \ldots \le f$;
2. $\phi_n(x) \to f(x)$ *za svaki* $x \in X$;
3. $\phi_n \to f$ *uniformno na svakom skupu na kojem je* f *ograničena.*

Neka je f jednostavna funkcija i neka je standardna reprezentacija od f dana sa (6.1). Definiramo *integral* od f obzirom na mjeru μ sa

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i). \tag{6.2}$$

Napomena 4. *Uočimo da neki od sumanada u izrazu* (6.2) *mogu biti neodređeni oblik* $0 \cdot \infty$. *Naime, moguće je da* $a_i = 0$ *i* $\mu(E_i) = +\infty$ *ili* $a_i = +\infty$ *i* $\mu(E_i) = 0$. *Mi dogovorno uzimamo da je* $0 \cdot \infty = 0$.

Sada želimo definiciju integrala proširiti na funkcije iz L^+. Uzmimo $f \in L^+$ i definirajmo

$$\int_X f d\,\mu = \sup\left\{ \int_X \phi\, d\mu : \phi \text{ je jednostavna i } 0 \leq \phi \leq f \right\}. \tag{6.3}$$

Napomena 5. *Nije teško pokazati da se za* f *jednostavnu funkciju izrazi* (6.2) *i* (6.3) *podudaraju. Dakle,* (6.3) *doista proširuje* (6.2).

Osnovna svojstva integrala su dana u idućem teoremu.

Teorem 8. *Za* $f, g \in L^+$ *i* $c \geq 0$ *vrijedi:*

1. $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;
2. $\int_X (cf)\,d\mu = c\int_X f d\,\mu$;
3. *ako* $f \leq g$, *onda* $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

Slijedeći teorem jedan je od najvažnijih u teoriji integracije.

Teorem 9. *(Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji) Neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* L^+ *takav da* $f_n \leq f_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Neka je* $f = \lim_n f_n$ [1]. *Tada vrijedi*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Zadatak 45. *Neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* L^+. *Dokažite da vrijedi*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Rj. Definirajmo niz funkcija $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u L^+ sa

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[1] Uočimo da je za svaki $x \in X$ niz $(f_n(x))_n$ rastući pa konvergira u $[0, +\infty]$. Dakle, f je dobro definirana

Očito $g_n \leq g_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, $g_n(x) \to f(x)$ za svaki $x \in X$, pri čemu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Koristeći Teoreme 8 i 9 dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_X f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\,d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.
\end{aligned}$$

□

Neka je $f \in L^+$ te $E \in \mathcal{M}$. Tada definiramo

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f \cdot \chi_E\,d\mu.$$

Zadatak 46. *Neka je $f \in L^+$. Za $E \in \mathcal{M}$ definiramo $\lambda(E) = \int_E f\,d\mu$. Dokažite:*

1. *λ je mjera na $(X, \mathcal{M})$;*
2. *$\int_X g\,d\lambda = \int_X fg\,d\mu$ za svaku $g \in L^+$.*

Rj. Očito vrijedi $\lambda(\emptyset) = 0$. Uzmimo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova u $\mathcal{M}$. Koristeći prethodni zadatak imamo

$$\begin{aligned}
\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \int_X f \cdot \chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}\,d\mu \\
&= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{E_n} \right) d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \cdot \chi_{E_n}\,d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).
\end{aligned}$$

Time je dokazana prva tvrdnja zadatka. Pokažimo da vrijedi druga tvrdnja zadatka. Uzmimo najprije $g \in L^+$ jednostavnu funkciju i neka je $g =$

$\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ njena standardna reprezentacija. Imamo

$$\begin{aligned}\int_X g \, d\lambda &= \sum_{i=1}^n a_i \lambda(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_X f \cdot \chi_{E_i} \, d\mu \\ &= \int_X f \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right) d\mu \\ &= \int_X fg \, d\mu.\end{aligned}$$

Uzmimo sada proizvoljnu $g \in L^+$. Po Propoziciji 8 postoji niz jednostavnih funkcija $(\phi_n)_n$ takav da $\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq g$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i takav da $\phi_n(x) \to g(x)$ za svaki $x \in X$. Tada očito vrijedi $f\phi_n \leq f\phi_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $(f\phi_n)(x) \to (fg)(x)$ za svaki $x \in X$. Koristeći Teorem 9 i dokazano zaključujemo da

$$\int_X fg \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\phi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \, d\lambda = \int_X g \, d\lambda.$$

□

Koristan će biti i slijedeći rezultat.

Teorem 10. *(Fatou) Neka je $(f_n)_n$ niz funkcija u L^+. Tada vrijedi*

$$\int_X (\liminf_n f_n) \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Zadatak 47. *Dokažite da u Teoremu 10 općenito nemamo jednakost.*

Rj. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere sa svojstvom da postoji $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) > 0$ i $\mu(E^c) > 0$. Definirajmo niz funkcija $(f_n)_n$ sa

$$f_n = \begin{cases} \chi_E; & n \text{ je paran} \\ \chi_{E^c}; & n \text{ je neparan.} \end{cases}$$

Očito $\liminf_n f_n = 0$ pa $\int_X (\liminf_n f_n) \, d\mu = 0$. S druge strane

$$\liminf_n \int_X f_n \, d\mu = \min\{\mu(E), \mu(E^c)\} > 0.$$

□

Zadatak 48. *Neka je $(f_n)_n$ niz u L^+ takav da $f_n(x) \to f(x)$ za svaki $x \in X$. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu < +\infty.$$

Dokažite da

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu,$$

za svaki $E \in \mathcal{M}$.

Rj. Koristeći Teorem 10 imamo

$$\begin{aligned}
\int_E f\,d\mu = \int_X f\cdot\chi_E\,d\mu &= \int_X (\lim_n f_n)\cdot\chi_E\,d\mu \\
&= \int_X \liminf_n (f_n\cdot\chi_E)\,d\mu \\
&\le \liminf_n \int_X f_n\cdot\chi_E\,d\mu \\
&= \liminf_n \int_E f_n\,d\mu.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int_E f\,d\mu \le \liminf_n \int_E f_n\,d\mu. \tag{6.4}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}
\limsup_n \int_E f_n\,d\mu &= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\,d\mu - \int_{E^c} f_n\,d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n\,d\mu \\
&= \int_X f\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n\,d\mu \\
&\le \int_X f\,d\mu - \int_{E^c} f\,d\mu,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili (6.4) ali za E^c umjesto E. Dakle,

$$\limsup_n \int_E f_n \le \int_E f\,d\mu. \tag{6.5}$$

Tvrdnja zadatka slijedi direktno iz (6.4) i (6.5). $\square$

Zadatak 49. *Neka je $f \in L^+$ takva da $\int_X f\,d\mu < +\infty$. Dokažite:*

1. *skup $\{x \in X : f(x) > 0\}$ je σ-konačan;*

2. $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.

Rj. Neka je $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$E_n = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Očito $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Koristeći posljednju tvrdnju Teorema 8 imamo

$$+\infty > \int_X f \, d\mu \geq \int_X f \cdot \chi_{E_n} \, d\mu \geq \int_X \frac{1}{n} \chi_{E_n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n),$$

iz čega zaključujemo da $\mu(E_n) < +\infty$ za svaki n. Dakle, E je σ-konačan skup. Drugu tvrdnju zadatka dokažite sami. □

Napomena 6. *Napomenimo sada vrlo važnu stvar vezanu uz terminologiju koju ćemo koristiti tokom ovog kolegija. U teoriji mjere skupovi mjere nula ne igraju bitnu ulogu i zato je korisno uvesti termin* gotovo svuda *(mi ćemo koristiti skraćenicu* a.e. *koja dolazi od engleskog termina* almost everywhere*)*[2]*. U grubo, ako je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, onda je neka tvrdnja o točkama $x \in X$ istinita gotovo sigurno ako je istinita za sve točke koje ne pripadaju nekom skupu mjere nula.*

Konkretno pogledajmo Teorem 9. Tamo smo zahtjevali da vrijedi $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za svaki $x \in X$. Ispada da možemo oslabiti tu pretpostavku (vidi Folland, Korolar 2.17) i zahtjevati da vrijedi $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za a.e. $x \in X$, što u ovom slučaju znači da postoji $N \in \mathcal{M}$ skup mjere nula takav da $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za sve $x \in N^c$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Od sada na dalje, kada se budemo pozivali na Teorem 9 misliti ćemo na ovu generaliziranu verziju opisanu u ovoj napomeni.

Slijedeći rezultat je očekivan.

Propozicija 9. *Neka $f \in L^+$. Tada $\int_X f \, d\mu = 0$ ako i samo ako $f = 0$ a.e.*

Zadatak 50. *Neka je $f \in L^+$ takva da $\int_X f \, d\mu < +\infty$. Dokažite da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) < +\infty$ i*

$$\int_E f \, d\mu > \int_X f \, d\mu - \epsilon.$$

Rj. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$E_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \quad \text{i} \quad f_n = f \cdot \chi_{E_n}.$$

Sada se lagano vidi da $f_n \leq f_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $f_n(x) \to f(x)$ za sve $x \in X$. Naime, ako vrijedi $f(x) > 0$, onda $x \in E_n$ za sve n počeši od nekog n_0 iz čega slijedi da $f_n(x) = f(x)$ za sve $n \geq n_0$. S druge strane, ako

[2] verzija popularna u teoriji vjerojatnosti je *gotovo sigurno* (almost surely)

$f(x) = 0$ onda $x \notin E_n$ za sve n i prema tome $f_n(x) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. U oba slučaja zaključujemo da $f_n(x) \to f(x)$. Koristeći Teorem 9 zaključujemo da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Nadalje, iz prethodnog zadatka slijedi da skupovi E_n imaju konačnu mjeru pa tvrdnja zadatka vrijedi. □

6.2 Integracija općenitih funkcija

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. U ovom poglavlju želimo naučiti integrirati izmjerive funkcije $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Za svaku takvu funkciju definiramo

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{i} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Uočimo da iz Korolara 1 slijedi da su f^+ i f^- izmjerive funkcije. Nadalje, očito $f^+(x) \geq 0$ i $f^-(x) \geq 0$ za sve $x \in X$. Dakle, $f^+, f^- \in L^+$. Funkciju f^+ nazivamo *pozitivni dio* funkcije f, a f^- nazivamo *negativni dio* funkcije f.

Zadatak 51. *Dokažite da $f = f^+ - f^-$ i $|f| = f^+ + f^-$.*

Rj. Uzmimo prozivoljan $x \in X$. Ako $f(x) \geq 0$, onda $f^+(x) = f(x)$ i $f^-(x) = 0$, iz čega slijedi da $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Analogno, ako vrijedi $f(x) < 0$, tada $f^+(x) = 0$ i $f^-(x) = -f(x)$, pa opet imamo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Time smo dokazali prvu tvrdnju zadatka. Druga tvrdnja se dokazuje analogno. □

Definicija 9. *Funkcija $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ je* integrabilna *ako $\int_X f^+ \, d\mu < +\infty$ i $\int_X f^- \, d\mu < +\infty$. U tom slučaju definiramo*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu. \tag{6.6}$$

Napomena 7. *Moguće je promatrati i tzv. integrabilnost u širem smislu. Kažemo da je f integrabilna u širem smislu ako je bar jedan od integrala $\int_X f^+ \, d\mu$ i $\int_X f \, d\mu$ konačan i u tom slučaju $\int_X f \, d\mu$ opet definiramo izrazom (6.6). Uočimo da sada taj izraz može poprimiti vrijednost $+\infty$ ili $-\infty$. Nadalje, uočimo da ne možemo dopustiti da oba integrala $\int_X f^+ \, d\mu$ i $\int_X f \, d\mu$ budu jednaka $+\infty$ jer u tom slučaju izraz na desnoj strani u (6.6) nema smisla.* [3]

Slijedeći teorem daje osnovna svojstva integrala.

[3] $\infty - \infty$ je neodređen oblik

Teorem 11. *Neka su $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilne funkcije te $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

1. *$f + g$ je integrabilna i $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;*
2. *cf je integrabilna i $\int_X (cf)\,d\mu = c\int_X f\,d\mu$;*
3. *ako $f \le g$ a.e., onda $\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.*

Zadatak 52. *Dokažite da je $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna.*

Rj. Pretpostavimo da je $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna. Iz definicije slijedi da $\int_X f^+\,d\mu < +\infty$ i $\int_X f^-\,d\mu < +\infty$. Iz druge tvrdnje Zadatka 51 slijedi da

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu < +\infty.$$

Dakle, $|f|$ je integrabilna.

Pretpostavimo sada da je $|f|$ je integrabilna. Iz $f^+ \le |f|$ i $f^- \le |f|$, zaključujemo da

$$\int_X f^+\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu < +\infty \quad \text{i} \quad \int_X f^-\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu < +\infty,$$

iz čega slijedi da je f integrabilna. □

Zadatak 53. *Neka je μ brojeća mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ te neka je $f \colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ proizvoljna funkcija. Diskutirajte izmjerivost, egzistenciju integrala i integrabilnost funkcije f. Čemu je jednako $\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu$?*

Rj. Uočimo da je svaka funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva. Nadalje, uočimo da za svaku funkciju f vrijedi $|f| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|\chi_{\{n\}}$. Koristeći Zadatak 45 dobivamo

$$\int_{\mathbb{N}} |f|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{n\}}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|\mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|. \tag{6.7}$$

Iz prethodnog zadatka slijedi da je f integrabilna ako i samo ako $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$. Uzmimo sada $f \colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjerivu. Iz (6.7) slijedi da

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = \int_{\mathbb{N}} f^+\,d\mu - \int_{\mathbb{N}} f^-\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(n) - \sum_{n=1}^{\infty} f^-(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

□

Zadatak 54. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor, $p \in X$ te δ_p Diracova mjera u točki p. Dokažite da je proizvoljna izmjeriva funkcija $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna ako i samo ako $f(p) \in \mathbb{R}$ i da u tom slučaju vrijedi*

$$\int_X f\,d\delta_p = f(p).$$

Rj. Pretpostavimo prvo da je f jednostavna funkcija i neka je $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ njena standardna reprezentacija. Imamo

$$\int_X f\, d\delta_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_p(E_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(p) = f(p).$$

Uzmimo sada proizvoljnu $f \in L^+$ i neka je $(s_n)_n$ niz jednostavnih funkcija takav da $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ i $s_n(x) \to f(x)$ za svaki $x \in X$. Koristeći Teorem 9 i dokazano imamo

$$\int_X f\, d\delta_p = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\delta_p = \lim_{n\to\infty} s_n(p) = f(p).$$

Funkcija f je integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna, a iz gornje jednakosti vidimo da to vrijedi ako i samo ako $|f(p)| < +\infty$, tj. $f(p) \in \mathbb{R}$.

Neka je sada f proizvoljna integrabilna funkcija. Uočimo da vrijedi

$$\int_X f\, d\delta_p = \int_X f^+\, d\delta_p - \int_X f^-\, d\delta_p = f^+(p) - f^-(p) = f(p).$$

Tvrdnja zadatka je dokazana. $\square$

Zadatak 55. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor i neka su μ, ν dvije mjere na $(X, \mathcal{M})$. Neka je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija integrabilna obzirom na obje mjere. Dokažite da je f integrabilna obzirom na mjeru $\mu + \nu$ i da vrijedi*

$$\int_X f\, d(\mu+\nu) = \int_X f\, d\mu + \int_X f\, d\nu.$$

Rj. Pretpostavimo prvo da je f jednostavna funkcija i neka je $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ njena standardna reprezentacija. Imamo

$$\begin{aligned}\int_X f\, d(\mu+\nu) = \sum_{i=1}^{k} a_i (\mu+\nu)(E_i) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{k} a_i \nu(E_i) \\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X f\, d\nu.\end{aligned}$$

Uzmimo sada $f \in L^+$ i neka je $(s_n)_n$ niz jednostavnih funkcija takav da $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ i $s_n(x) \to f(x)$ za svaki $x \in X$. Koristeći Teorem 9 i dokazano imamo

$$\begin{aligned}\int_X f\, d(\mu+\nu) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d(\mu+\nu) &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\nu \\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X f\, d\nu.\end{aligned}$$

Neka je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija integrabilna obzirom na obje mjere. Iz dokazanog i Zadatka 52 zaključujemo da je f integrabilna obzirom na $\mu + \nu$. Štoviše,

$$\begin{aligned}\int_X f\,d(\mu+\nu) &= \int_X f^+\,d(\mu+\nu) - \int_X f^-\,d(\mu+\nu)\\ &= \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^+\,d\nu - \int_X f^-\,d\mu - \int_X f^-\,d\nu\\ &= \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\nu.\end{aligned}$$

$\square$

Slijedeći zadatak je vrlo sličan prethodnome i prepušten je vama za samostalno rješavanje.

Zadatak 56. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor, μ mjera na $(X, \mathcal{M})$ te $c \geq 0$. Neka je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija integrabilna obzirom na μ. Dokažite da je f integrabilna obzirom na mjeru $c\mu$ i da vrijedi*

$$\int_X f\,d(c\mu) = c\int_X f\,d\mu.$$

Slijedeći fundamentalan teorem ćemo često koristiti.

Teorem 12. *(Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) Neka je $(f_n)_n$ niz integrabilnih funkcija takvih da:*

1. *$f_n \to f$ a.e.;*
2. *postoji $g \in L^+$ integrabilna takva da $|f_n| \leq g$ a.e. za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Tada je f integrabilna i

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Zadatak 57. *Izračunajte:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(mn)}{2^{mn}}.$$

Rj. Neka je μ brojeća mjera na $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$, pri čemu $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$f_n(m) = \frac{\cos(mn)}{2^{mn}}.$$

Imamo

$$|f_n(m)| \leq \frac{1}{2^m} =: g(m),$$

za $m \in \mathbb{N}_0$ i $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da je g integrabilna obzirom na μ. Doista, iz Zadatka 53 slijedi

$$\int_{\mathbb{N}_0} g \, d\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2 < +\infty.$$

Lagano se provjeri da

$$\lim_{n \to \infty} f_n(m) = \chi_{\{0\}}(m)$$

za svaki $m \in \mathbb{N}_0$. Iz Zadatka 53 i Teorema 12 slijedi da

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(mn)}{2^{mn}} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}_0} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}_0} \chi_{\{0\}} \, d\mu = \mu(\{0\}) = 1.$$

□

Sada ćemo se fokusirati na integraciju obzirom na Lebesgueovu mjeru m. Prirodno je pitati se koja je veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala. Odgovor na to pitanje djelom je dan u idućem teoremu.

Teorem 13. *Neka je $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Tada vrijedi:*

1. *ako je f Riemann integrabilna, onda je f integrabilna obzirom na m i $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, dm$;*
2. *f je Riemann integrabilna ako i samo ako je skup*

$$\{x \in [a, b] : f \text{ ima prekid u točki } x\}$$

skup Lebesgueove mjere nula.

Idući primjer pokazuje da obrat u prvoj tvrdnji prethodnog teorema ne vrijedi.

Primjer 12. *Definiramo funkciju $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funkcija f ima prekid u svakoj točki, pa iz druge tvrdnje prethodnog teorema slijedi da f nije Riemann integrabilna funkcija. S druge strane, f je jednostavna funkcija sa standardnom reprezentacijom $f = \chi_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}$. Kako $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ ima mjeru nula, zaključujemo da je f integrabilna obzirom na m i $\int_{[a,b]} f \, dm = 0$.

Slijedeći primjer pokazuje da općenito Riemann integrabilnost na neograničenom intervalu ne implicira Lebesgue integrabilnost.

Primjer 13. *Definirajmo funkciju $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ sa*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \chi_{\langle n, n+1]}.$$

Lagano se pokaže da $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)dx$ postoji [4] *pa je f Riemann integrabilna na $[0,+\infty\rangle$.* [5] *S druge strane,*

$$\int_{[0,+\infty\rangle} |f|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} m(\langle n, n+1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

pa f nije Lebesgue integrabilna.

Zadatak 58. *Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = e^x + x$. Izračunajte:*

$$\int_{[0,1]} f\, d(m + \delta_{1/2}).$$

Rj. Koristeći Zadatke 54, 55 i Teorem 13 imamo

$$\int_{[0,1]} f\, d(m + \delta_{1/2}) = \int_0^1 f(x)dx + f(1/2) = \dots.^6$$

□

Zadatak 59. *Izračunajte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Rj. Definirajmo

$$f_n(x) = \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći nejednakost $|\sin x| \le |x|$ dobivamo

$$|f_n(x)| \le \frac{n|\frac{x}{n}|}{x(1+x^2)} = \frac{x}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} =: g(x)$$

za svaki $x \ge 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Funkcija g je integrabilna i

$$\int_0^{\infty} g(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

---

[4] red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergira

[5] nepravi integral...

[6] Dovršite račun

Nadalje,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}}{1+x^2} = g(x).$$

Koristeći Teorem 12 dobivamo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\, dx = \int_0^\infty g(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Slijedećo zadatak riješite sami. [7]

Zadatak 60. *Neka je* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija i* $c \in \mathbb{R}$. *Dokažite da*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+c)\, dx$$

u smislu da ako postoji jedan od integrala da onda postoji i drugi i vrijednosti su mu jednake.

[7]Uputa: koristite invarijantnost mjere m obzirom na translacije

Chapter 7

Načini konvergencije

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Sa $L^1 = L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ označavamo skup svih integrabilnih funkcija $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Iz Teorema 11 slijedi da je L^1 vektorski prostor. Za $f \in L^1$ definiramo

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu.$$

Zadatak 61. *Dokažite da je $\|\cdot\|_1$ polunorma na L^1.*

Rj. Dokaz je zapravo jednostavna posljedica Teorema 11. Najprije uočimo da za $f = 0$ očito vrijedi $\|f\|_1 = 0$. Uzmimo sada $f \in L^1$ i $c \in \mathbb{R}$. Koristeći drugu tvrdnju Teorema 11 imamo

$$\|cf\|_1 = \int_X |cf| \, d\mu = |c| \cdot \int_X |f| \, d\mu = |c| \cdot \|f\|_1.$$

Uzmimo sada $f, g \in L^1$. Iz druge i treće tvrdnje Teorema 11 zaključujemo da

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 = \int_X |f + g| \, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) \, d\mu &\leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

□

Dakle, $\|\cdot\|_1$ je polunorma. No uočimo da $\|\cdot\|_1$ nije norma jer iz $\|f\|_1 = 0$ ne slijedi da je $f = 0$ već samo da $f = 0$ a.e. (vidi Propoziciju 9). Sada možemo napraviti slijedeću poznatu konstrukciju. Definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ na L^1 sa: $f \sim g$ ako i samo ako $f = g$ a.e. Lagano je pokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Označimo sa $L^1/\sim$ kvocijentni prostor i neka $[f]$ označava klasu ekvivalencije funkcije $f \in L^1$. Sada definiramo normu $\|\cdot\|$ na $L^1/\sim$ sa

$$\|[f]\| = \|f\|_1.$$

Lagano je pokazati da je ova definicija dobra, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika klase. Nadalje, $\|\cdot\|$ je norma na prostoru $L^1/\sim$.

Dakle, u grubo rečeno, ako identificiramo funkcije koje su jednake a.e. L^1 postaje normiran prostor obzirom na $\|\cdot\|_1$. Kako je raditi sa funkcijama puno zgodnije nego raditi sa klasama, mi ćemo uvijek na L^1 gledati kao na prostor funkcija, s time da uvijek imamo na umu da identificiramo funkcije koje su jednake a.e. Na primjer, pogledajmo funkciju f iz Primjera 12. Kako je $\mathbb{Q}$ skup Lebesgueove mjere nula imamo da $f = 0$ a.e., pa ih kao elemente prostora L^1 identificiramo, tj. $f = 0$.

Slijedeći teorem daje dodatnu informaciju o normiranom prostoru L^1.

Teorem 14. *L^1 je Banachov prostor.*

Sada ćemo uvesti nekoliko različitih tipova konvergencije niza funkcija i diskutirati vezu između njih. Najprije, ako je $(f_n)_n$ niz funkcija iz L^1 i $f \in L^1$. Kažemo da niz funkcija f_n konvergira ka f u L^1 ako $\|f_n - f\|_1 \to 0$ kada $n \to \infty$.[1]

Primjer 14. *Pogledajmo prostor mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ i definirajmo niz funkcija f_n sa $f_n = \chi_{\langle n,n+1\rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $f_n(x) \to f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ali f_n ne konvergira ka f u L^1 jer*

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\langle n,n+1\rangle}\, dm = 1$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dakle, konvergencija po točkama ne implicira konvergenciju u L^1. Slijedeći primjer pokazuje da niti obrat ne vrijedi.

Primjer 15. *Pogledajmo prostor mjere $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$ i definirajmo niz funkcija $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_7 = \chi_{[3/4,1]}, \ldots$. Lagano je pokazati da $f_n \to 0$ u L^1 dok s druge strane niz $(f_n(x))_n$ ne konvergira niti za jedan $x \in [0,1]$.*

Bez obzira na gornje primjere neki parcijalni rezultati vrijede. O tome više kasnije, a za sada dokažimo jednostavnu tvrdnju formuliranu u slijedećem zadatku.

Zadatak 62. *Pretpostavimo da $f_n \to f$ a.e. i $|f_n| \le g \in L^1$ za svaki n. Dokažite da $f_n \to f$ u L^1.*

Rj. Definirajmo niz funkcija $g_n = f_n - f$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $g_n \to 0$ a.e. i

$$|g_n| \le |f_n| + |f| \le 2|g| \in L^1.$$

[1] Uočite da ovdje nema ništa specijalno. Ovako se definira konvergencija u proizvoljnom normiranom prostoru

Koristeći Teorem 12 zaključujemo da

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_X |g_n| \, d\mu \to 0,$$

pa $f_n \to f$ u L^1. $\square$

Sada uvodimo pojam konvergencije po mjeri.

Definicija 10. *Neka je $(f_n)_n$ niz izmjerivih funkcija te neka je f izmjeriva funkcija. Kažemo da f_n konvergira ka f po mjeri ako za svaki $\epsilon > 0$*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0 \quad \textit{kada } n \to \infty.$$

Zadatak 63. *Pretpostavimo da niz $(f_n)_n$ konvergira istodobno ka f i ka g po mjeri. Dokažite da $f = g$ a.e.*

Rj. Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\} \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq 1/2k\} \cup \\ \cup \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq 1/2k\},\end{aligned}$$

iz čega slijedi da

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq 1/2k\}) \\ + \mu(\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq 1/2k\}).\end{aligned}$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$ dobijemo da

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}) = 0$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi da $f = g$ a.e. $\square$

Zadatak 64. *Pretpostavimo da $f_n \to f$ u L^1. Dokažite da $f_n \to f$ po mjeri.*

Rj. Za $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$ definirajmo

$$F_{n,\epsilon} = \{x \in X : |f - f_n| \geq \epsilon\}.$$

Vrijedi

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \geq \int_{F_{n,\epsilon}} |f_n - f| \, d\mu \geq \epsilon \mu(F_{n,\epsilon})$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz čega direktno zaključujemo da vrijedi

$$\mu(F_{n,\epsilon}) \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Tvrdnja zadatka je time dokazana. $\square$

Slijedeći primjer pokazuje da obrat prethodnog zadatka ne vrijedi.

Primjer 16. *Pogledajmo prostor mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ i definirajmo niz funkcija f_n sa $f_n = n^{-1}\chi_{\langle 0,n\rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$ i neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $1/n < \epsilon$ za sve $n \geq n_0$. Uočimo da vrijedi*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

za sve $n \geq n_0$. Dakle, $f_n \to 0$ po mjeri. S druge strane, $\int_X |f_n|\, dm = 1$ za svaki n, pa f_n ne konvergira ka 0 u L^1.

Zadatak 65. *Neka $f_n \to f$ po mjeri i $g_n \to g$ po mjeri. Dokažite da $f_n + g_n \to f + g$ po mjeri.*

Rj. Definirajmo $h_n = f_n + g_n$ i $h = f + g$. Uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$. Slično kao i u Zadatku 63 imamo

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |h_n(x) - h(x)| \geq \epsilon\}) \leq\ & \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon/2\}) \\ & + \mu(\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \epsilon/2\}).\end{aligned}$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$ dobivamo

$$\mu(\{x \in X : |h_n(x) - h(x)| \geq \epsilon\}) \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Dakle, $h_n \to h$ po mjeri.

□

Teorem 15. *Ako $f_n \to f$ po mjeri, onda postoji podniz $(f_{n_k})_k$ takav da $f_{n_k} \to f$ a.e.*

Zadatak 66. *Ako $f_n \to f$ u L^1, tada postoji podniz $(f_{n_k})_k$ takav da $f_{n_k} \to f$ a.e.*

Rj. Tvrdnja zadatka slijedi direktno iz Zadatka 64 i Teorema 15. □

Zadatak 67. *Ako $f_n \geq 0$ i $f_n \to f$ po mjeri, onda*

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Rj. Odaberimo podniz $(f_{n_k})_k$ takav da

$$\liminf_n \int_X f_n\, d\mu = \lim_k \int_X f_{n_k}\, d\mu.$$

Očito $f_{n_k} \to f$ po mjeri, pa iz Teorema 15 slijedi da postoji podniz $(f_{n_{k_j}})_j$ takav da $f_{n_{k_j}} \to f$ a.e. Iz Teorema 10 slijedi da

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_j \int_X f_{n_{k_j}}\, d\mu = \lim_k \int_X f_{n_k}\, d\mu = \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

□

Zadatak 68. *Pretpostavimo da $|f_n| \leq g \in L^1$ i $f_n \to f$ po mjeri. Dokažite da*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$

Rj. Pretpostavimo da tvrdnja zadatka nije istinita. Tada postoji $\epsilon > 0$ i podniz $(f_{n_k})_k$ takav da

$$\left| \int_X f\,d\mu - \int_X f_{n_k}\,d\mu \right| \geq \epsilon \tag{7.1}$$

za sve k. Iz Teorema 15 slijedi da postoji podniz $(f_{n_{k_j}})_j$ takav da $f_{n_{k_j}} \to f$ a.e. Koristeći Teorem 12 zaključujemo da vrijedi

$$\lim_j \int_X f_{n_{k_j}}\,d\mu = \int_X f\,d\mu,$$

što je u kontradikciji sa (7.1). □

Zadatak 69. *Neka je μ brojeća mjera na $\mathbb{N}$. Dokažite da $f_n \to f$ uniformno ako i samo ako $f_n \to f$ po mjeri.*

Rj. Lagano je pokazati da uniformna konvergencija uvijek povlači konvergenciju po mjeri (učinite to!). Pretpostavimo sada da $f_n \to f$ po mjeri i neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\mu(\{x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty. \tag{7.2}$$

Brojeća mjera μ poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, pa iz (7.2) slijedi da postoji n_0 takav da

$$\mu(\{x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

za sve $n \geq n_0$. Dakle,

$$\{x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \emptyset$$

za $n \geq n_0$, iz čega slijedi da

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

za sve $x \in \mathbb{N}$ te $n \geq n_0$. □

Navedimo na kraju i slijedeći važan rezultat.

Teorem 16. *(Egoroff) Neka je μ konačna mjera i $f_n \to f$ a.e. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji izmjeriv skup E takav da $\mu(E) < \epsilon$ i $f_n \to f$ uniformno na E^c. Nadalje, $f_n \to f$ po mjeri.*

Zadatak 70. *Neka je μ konačna mjera, $f_n \to f$ po mjeri i $g_n \to g$ po mjeri. Dokažite da $f_n g_n \to fg$ po mjeri.*

Rj. Iz Teorema 15 slijedi da postoji podniz (n_k) takav da $f_{n_k} \to f$ a.e. i $g_{n_k} \to g$ a.e. Dakle, $f_{n_k} g_{n_k} \to fg$ a.e. Tvrdnja zadatka sada slijedi direktno iz Teorema 16. □

Chapter 8

L^p prostori

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere te $0 < p < \infty$. Za proizvoljnu izmjerivu funkciju f na X definiramo

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Nadalje, definiramo $L^p = L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ kao skup svih izmjerivih funkcija f na X sa svojstvom da $\|f\|_p < +\infty$, tj. $\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$. Uočimo da se u specijalnom slučaju kada je $p = 1$ ova definicija podudara sa definicijom prostora L^1 kojeg smo uveli u prethodnom poglavlju.

Zadatak 71. *Dokažite da je L^p vektorski prostor.*

Rj. Pokazati ćemo da je L^p zatvoren na operaciju zbrajanja funkcija. Doista, neka su $f, g \in L^p$. Tada imamo

$$|f + g|^p \le [2 \max\{|f|, |g|\}]^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

iz čega slijedi da

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \le 2^p \int_X |f|^p \, d\mu + 2^p \int_X |g|^p \, d\mu < +\infty.$$

Dakle, $f + g \in L^p$. Lagano je pokazati da je L^p zatvoren na operaciju množenja sa skalarom. $\square$

Iz istih razloga kao i u specijalnom slučaju $p = 1$, najbolje što možemo očekivati je da je funkcija $\|\cdot\|_p$ polunorma na L^p.[1] Međutim diskusija u Follandu pokazuje da za $p \in (0, 1)$, $\|\cdot\|_p$ nije polunorma na L^p jer nije zadovoljena nejednakost trokuta. Iz ovog razloga, u nastavku ovog poglavlja ćemo se većinom ograničiti na situaciju kada je $p \in [1, \infty)$.

Slijedeći rezultat je važan.

[1] jer ponovno iz $\|f\|_p = 0$ ne slijedi da $f = 0$ već da $f = 0$ a.e.

Teorem 17. *(Holdeorova nejednakost) Neka je $1 < p < \infty$ i q takav da $1/p + 1/q = 1$ (tj. $q = p/(p-1)$).*[2] *Ako su f, g izmjerive funkcije na X, onda*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Specijalno, ako $f \in L^p$ i $g \in L^q$, onda $fg \in L^1$.

Prethodni teorem se koristi u dokazu idućeg.

Teorem 18. *(Nejednakost Minkowskog) Neka je $1 \leq p < \infty$ te $f, g \in L^p$. Tada vrijedi*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dakle, $\|\cdot\|_p$ zadovoljava nejednakost trokuta na L^p za $p \geq 1$. Nadalje, lagano se pokaže da za $f = 0$ vrijedi $\|f\|_p = 0$ te $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$ za svaki skalar c i $f \in L^p$. Zaključujemo da je $\|\cdot\|_p$ polunorma na L^p za $p \geq 1$. Sada možemo napraviti konstrukciju opisanu u prethodnom poglavlju te identificirati funkcije iz L^p koje su jednake a.e. Kao što smo i objasnili u prethodnom poglavlju, zgodnije je raditi sa funkcijama nego sa klasama funkcija, pa ćemo na L^p uvijek gledati kao na prostor funkcija uz napomenu da funkcije koje su jednake a.e. smatramo jednakima. Sada L^p postaje normiran prostor obzirom na $\|\cdot\|_p$. Slijedeći teorem daje dodatnu informaciju.

Teorem 19. *L^p je Banachov prostor za $p \in [1, \infty\rangle$.*

Zadatak 72. *Neka je μ konačna mjera te $0 < p \leq q < \infty$. Dokažite da $L^q \subseteq L^p$.*

Rj. Uzmimo funkciju $f \in L^q$. Uočimo da je $(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p})$ par konjugiranih eksponenata, pa primjenom Teorema 17 dobivamo

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_X 1 \, d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}}$$
$$= \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{\frac{q-p}{q}} < +\infty.$$

Dakle, $f \in L^p$. □

Napomena 8. *Sada ćemo pokazati da tvrdnja prethodnog zadatka ne vrijedi na prostoru beskonačne mjere. Štoviše, na prostoru beskonačne mjere općenito nemamo nikakvu inkluziju između prostora L^p i L^q. Pogledajmo $\langle 0, +\infty\rangle$ sa Lebesgueovom mjerom m te definirajmo familiju funkcija*

$$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Lagano se dokaže da vrijedi:

[2] Kažemo da je (p, q) konjugirani par eksponenata

1. $f_\alpha \chi_{\langle 0,1\rangle} \in L^p$ *ako i samo ako* $p < \alpha^{-1}$*;*

2. $f_\alpha \chi_{\langle 1,+\infty\rangle} \in L^p$ *ako i samo ako* $p > \alpha^{-1}$*.*

Sada za proizvoljne $p, q \in \langle 0, \infty\rangle$ *imamo da* $f_{1/q}\chi_{\langle 0,1\rangle}$ *je u* L^p*, a nije u* L^q *ako* $p < q$*, odnosno* $f_{1/q}\chi_{\langle 1,+\infty\rangle}$ *je u* L^p*, a nije u* L^q *ako* $p > q$*.*

Zadatak 73. *Neka je* $0 < p \leq q \leq r < \infty$*. Dokažite da vrijedi*

$$L^q \subseteq L^p + L^r.$$

Rj. Uzmimo $f \in L^q$ i definirajmo $A = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$. Nadalje, definirajmo

$$g = f\chi_A \quad \text{i} \quad h = f\chi_{A^c}.$$

Očito vrijedi $f = g + h$. Nadalje,

$$|g|^p = |f|^p\chi_A \leq |f|^q\chi_A \leq |f|^q,$$

pa iz $f \in L^q$ slijedi da $g \in L^p$. Slično,

$$|h|^r = |f|^r\chi_{A^c} \leq |f|^q\chi_{A^c} \leq |f|^q,$$

pa $h \in L^r$. Dakle, proizvoljnu funkciju iz L^q se može prikazati kao zbroj funkcije iz L^p i funkcije iz L^r, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

□

Zadatak 74. *Neka je* $0 < p \leq q \leq r < \infty$*. Dokažite da vrijedi*

$$L^p \cap L^r \subseteq L^q.$$

Rj. Kako $1/p \geq 1/q \geq 1/r$, imamo da postoji $\lambda \in [0, 1]$ takav da $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$. Sada uočimo da je $(\frac{p}{q\lambda}, \frac{r}{(1-\lambda)q})$ par konjugiranih eksponenata. Primjenom Teorema 17 imamo da za $f \in L^p \cap L^r$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_X |f|^q \, d\mu &= \int_X |f|^{\lambda q} \cdot |f|^{(1-\lambda)q} \, d\mu \leq \left(\int_X (|f|^{\lambda q})^{\frac{p}{q\lambda}} \, d\mu \right)^{\frac{q\lambda}{p}} \cdot \left(\int_X (|f|^{(1-\lambda)q})^{\frac{r}{q(1-\lambda)}} \, d\mu \right)^{\frac{q(1-\lambda)}{r}} \\ &= \|f\|_p^{q\lambda} \cdot \|f\|_r^{q(1-\lambda)} < +\infty.\end{aligned}$$

Dakle, $f \in L^q$. □

Zadatak 75. *Neka je* $(f_n)_n$ *niz funkcija u* L^2 *i* $f, g \in L^2$*. Nadalje, neka* $f_n \to f$ *u* L^2*. Dokažite da* $f_n g \to fg$ *u* L^1*.*

Rj. Uočimo da je $(2, 2)$ par konjugiranih eksponenata. Ponovno, koristeći Teorem 17 imamo

$$\begin{aligned}\int_X |f_n g - fg| \, d\mu = \int_X |g| \cdot |f_n - f| \, d\mu &\leq \left(\int_X |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X |f_n - f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g\|_2 \cdot \|f_n - f\|_2.\end{aligned}$$

Kako $f_n \to f$ u L^2 imamo da $\|f_n - f\|_2 \to 0$, pa $f_n g \to f_g$ u L^1. □

Slijedeći zadatak je generalizacija prethodnog.

Zadatak 76. *Neka su* $(f_n)_n$ *i* $(g_n)_n$ *nizovi funkcija u* L^2 *te neka su* $f, g \in L^2$. *Ako* $f_n \to f$ *u* L^2 *i* $g_n \to g$ *u* L^2, *tada* $f_n g_n \to fg$ *u* L^1.

Rj. Primjenom nejednakosti trokuta i Teorema 17 dobivamo

$$\begin{aligned}\int_X |f_n g_n - fg|\, d\mu &\leq \int_X |f_n g_n - f_n g|\, d\mu + \int_X |f_n g - fg|\, d\mu \\ &\leq \|g_n - g\|_2 \cdot \|f_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2.\end{aligned}$$

Kako je $(f_n)_n$ konvergentan niz u L^2 on nužno mora biti ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da $\|f_n\|_2 \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\int_X |f_n g_n - fg| \leq M\|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$ dobijemo tvrdnju zadatka. □

Zadatak 77. *Ako* $f_n \to f$ *u* L^p *onda* $f_n \to f$ *po mjeri.*

Rj. Uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$ i definirajmo

$$E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Imamo

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p\, d\mu \geq \int_{E_n} |f_n - f|^p\, d\mu \geq \epsilon^p \mu(E_n).$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$ zaključujemo da $\mu(E_n) \to 0$. Kako je $\epsilon > 0$ bio proizvoljan imamo da $f_n \to f$ po mjeri. □

Zadatak 78. *Pretpostavimo da* $f_n \to f$ *po mjeri i* $|f_n| \leq g \in L^p$ *za sve* n. *Tada* $f_n \to f$ *u* L^p.

Rj. Pretpostavimo da tvrdnja zadatka nije istinita. Tada postoji $\epsilon > 0$ i podniz $(n_k)_k$ od $\mathbb{N}$ takav da

$$\|f_{n_k} - f\|_p \geq \epsilon \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Kako $F_{n_k} \to f$ po mjeri, postoji podniz $(f_{n_{k_j}})_j$ takav da $f_{n_{k_j}} \to f$ a.e. Tada očito $|f_{n_{k_j}} - f|^p \to 0$ a.e. i štoviše

$$|f_{n_{k_j}} - f|^p \leq 2^p g^p \in L^1.$$

Primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da

$$\|f_{n_{k_j}} - f\|_p^p = \int_X |f_{n_{k_j}} - f|^p\, d\mu \to 0,$$

što je u kontradikciji sa (8.1). □

Slijedeći rezultat je koristan.

Propozicija 10. *Za $1 \leq p < \infty$ skup funkcija oblika*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

pri čemu su E_i izmjerivi skupovi konačne mjere je gust u L^p.

Zadatak 79. *Neka je $\mu(X) < +\infty$ i $1 \leq p < q < \infty$. Dokažite da je L^q gust u L^p. Da li je zatvoren?*

Rj. Prije svega uočimo da iz Zadatka 72 slijedi da $L^q \subseteq L^p$. Uzmimo $f \in L^p$ i $\epsilon > 0$. Iz prethodne propozicije slijedi da postoji ϕ kao u propoziciji takva da $\|f - \phi\|_p \leq \epsilon$. Sada je još potrebno samo uočiti da $\phi \in L^q$. Naime,

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \mu(E_i) < +\infty.$$

Dakle, L^q je gust u L^p. Kada bi L^q bio zatvoren u L^p dobili bi da $L^p = L^q$, a to općenito ne vrijedi. $\square$

Naposljetku uvodimo i prostor L^∞. Za izmjerivu funkciju f na X definiramo

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

pri čemu dogovorno uzimamo $\inf \emptyset = +\infty$. Tada definiramo L^∞ kao skup svih izmjerivih funkcija na X sa svojstvom da $\|f\|_\infty < +\infty$. Prije svega uočimo da za $f \in L^\infty$ vrijedi

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0,$$

tj. infimum iz definicije se postiže.

Zadatak 80. *L^∞ je vektorski prostor.*

Rj. Uzmimo $f, g \in L^\infty$. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\{x \in X : |(f+g)(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \cup \\ \cup \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\},\end{aligned}$$

iz čega dobivamo da

$$\mu(\{x \in X : |(f+g)(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0.$$

Dakle, $f+g \in L^\infty$. Štoviše, dokazali smo da vrijedi $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Lagano se pokaže da je L^∞ zatvoren obzirom na množenje sa skalarom. $\square$

Ako kao i prije identificiramo funkcije koje su jednake a.e., dobivamo slijedeći rezultat.

Teorem 20. *L^∞ je Banachov prostor.*

Slijedeći zadatak je verzija Teorema 17 za $(1, \infty)$ par konjugiranih eksponenata.

Zadatak 81. *Za izmjerive funkcije f i g vrijedi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

Rj. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $g \in L^\infty$, tj. da $\|g\|_\infty < +\infty$. Sada definiramo

$$E = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_\infty\}.$$

Kako $g \in L^\infty$, imamo da $\mu(E^c) = 0$. Dakle,

$$\int_X |fg| \, d\mu = \int_E |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_E |f| \, d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

$\square$

Koristeći argumente slične ovima u prethodnom zadatku lagano je (probajte to napraviti) generalizirati tvrdnje Zadataka 72, 73 i 74 na način da dopustimo da najveći indeks u iskazima zadataka bude jednak ∞.

Chapter 9

Realne mjere

9.1 Osnovni pojmovi. Hahnova i Jordanova dekompozicija

Uvodimo pojam realne mjere.

Definicija 11. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor. Funkcija $\nu \colon \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ je* realna mjera *ako:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$*;*
2. ν *poprima najviše jednu od vrijednosti* $\pm\infty$*;*
3. *ako je $(E_n)_n$ niz disjunktnih skupova u $\mathcal{M}$, onda*

$$\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n). \tag{9.1}$$

Istaknimo nekoliko važnih napomena. Uočimo da je svaka mjera ujedno i realna mjera. Dakle, pojam mjere koji je uveden u poglavlju 2 (često se u literaturi koristi termin pozitivne mjere) je specijalan slučaj pojma realne mjere. Nadalje, uočimo da zahtjevamo da realna mjera ν ne može poprimati obje vrijednosti $\pm\infty$. Naime, kada bi ν poprimala vrijednosti $\pm\infty$, onda bi s desne strane jednakosti (9.1) mogli imati neodređeni oblik $\infty - \infty$. Na posljetku uočimo da red s desne strane jednakosti (9.1) konvergira apsolutno ako je $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ konačan broj. Doista, kada taj red ne bi konvergirao apsolutno, onda bi permutacijom članova reda kao sumu mogli dobiti bilo koji broj. S druge strane, lijeva strana jednakosti (9.1) se ne mijenja permutacijom članova.

Slijedeći zadatak daje klasu primjera realnih mjeri.

Zadatak 82. *Neka su μ_1 i μ_2 mjere na $(X, \mathcal{M})$ od kojih je bar jedna konačna. Dokažite da je $\nu = \mu_1 - \mu_2$ realna mjera.*

Rj. Imamo $\nu(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) - \mu_2(\emptyset) = 0 - 0 = 0$. Nadalje, kako je bar jedna od mjera μ_i, $i = 1, 2$ konačna, ν ne može poprimiti obje vrijednosti $\pm\infty$. Konačno, (9.1) slijedi direktno iz σ-aditivnosti mjera μ_1 i μ_2. $\square$

Slijedeća propozicija generalizira neke tvrdnje Teorema 1.

Propozicija 11. *Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Tada vrijedi:*

1. *ako je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova u $\mathcal{M}$ sa svojstvom $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$, onda $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$;*
2. *ako je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova u $\mathcal{M}$ sa svojstvom $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ i $\nu(E_1) \in \mathbb{R}$, onda $\nu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$.*

Definicija 12. *Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Skup*

1. *$E \in \mathcal{M}$ je* pozitivan *ako $\nu(F) \geq 0$ za svaki $F \subseteq E$;*
2. *$E \in \mathcal{M}$ je* negativan *ako $\nu(F) \leq 0$ za svaki $F \subseteq E$;*
3. *$E \in \mathcal{M}$ je* nul-skup *ako $\nu(F) = 0$ za svaki $F \subseteq E$.*

Slijedeći rezultat je ključan za razumijevanje realnih mjera.

Teorem 21. *(Hahn) Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Tada postoje $P, N \in \mathcal{M}$ takvi da $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$, P je pozitivan skup i N je negativan skup. Nadalje, ako je (P', N') neki drugi par sa ovim svojstvom tada je $P \triangle P' = N \triangle N'$ nul-skup.*

Definicija 13. *Neka su μ i ν dvije realne mjere na $(X, \mathcal{M})$. Kažemo da su μ i ν* međusobno singularne *ako postoje $E, F \in \mathcal{M}$ takvi da $E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$, E je nul-skup obzirom na μ i F je nul-skup obzirom na ν. Koristimo zapis $\mu \perp \nu$.*

Grubo rečeno, dvije realne mjere su međusobno singularne ako "žive" na disjunktnim skupovima.

Primjer 17. *Neka je m Lebesegueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ te $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Mjere m i δ_x su međusobno singularne. Doista, lagano se provjeri da skupovi $E = \{x\}$ i $F = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ zadovoljavaju uvjete prethodne definicije.*

Slijedeći rezultat pokazuje da su primjeri realnih mjera konstruirani u Zadatku 82 zapravo jedini primjeri realnih mjera.

Teorem 22. *(Jordan) Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Tada postoje jedinstvene (pozitivne) mjere ν^+ i ν^- na $(X, \mathcal{M})$ takve da $\nu = \nu^+ - \nu^-$ i $\nu^+ \perp \nu^-$.*

Napomena 9. *Prethodni teorem je zapravo (gotovo) direktna posljedica Teorema 21. Doista, neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$ te neka je (P, N) dekompozicija prostora X iz Teorema 21. Za $E \in \mathcal{M}$ definiramo $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$ i $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$. Lagano se provjeri da su ν^+ i ν^- pozitivne mjere koje zadovoljavaju sve uvjete Teorema 22.*

Mjere ν^+ i ν^- iz Teorema 22 se nazivaju pozitivnom odnosno negativnom varijacijom realne mjere ν. Nadalje, definiramo

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Uočimo da je $|\nu|$ (pozitivna) mjera. Kažemo da je $|\nu|$ *totalna varijacija* mjere ν.

Zadatak 83. *Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$ te $E \in \mathcal{M}$. Dokažite da je E nul-skup obzirom na ν ako i samo ako $|\nu|(E) = 0$.*

Rj. Pretpostavimo da je E nul-skup. Neka je (P, N) dekompozicija dana Teoremom 21. Kako $E \cap P \subseteq E$, dobivamo da $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = 0$. Slično, $\nu^-(E) = 0$ pa $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$.

Pretpostavimo da $|\nu|(E) = 0$. Uzmimo $F \subseteq E$ izmjeriv. Iz monotonosti pozitivne mjere $|\nu|$ slijedi da $0 = |\nu|(F) = \nu^+(F) + \nu^-(F)$. Iz ovoga slijedi da $\nu^+(F) = \nu^-(F) = 0$, pa $\nu(F) = \nu^+(F) - \nu^-(F) = 0$. □

Konačno, želimo definirati integral obzirom na realnu mjeru. Neka je ν realna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{M})$. Funkcija $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ je integrabilna obzirom na ν ako je f integrabilna obzirom na ν^+ i ν^- i u tom slučaju definiramo

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\nu^+ - \int_X f \, d\nu^-.$$

Zadatak 84. *Neka je ν realna mjera te λ, μ pozitivne mjere takve da $\nu = \lambda - \mu$. Dokažite da vrijedi $\lambda \geq \nu^+$ i $\mu \geq \nu^-$.*

Rj. Za $E \in \mathcal{M}$ imamo

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \lambda(E \cap P) - \mu(E \cap P) \leq \lambda(E \cap P) \leq \lambda(E).$$

Dakle, $\lambda \geq \nu^+$. Slično se dokaže da vrijedi $\mu \geq \nu^-$. □

Zadatak 85. *Neka su ν_1 i ν_2 realne mjere na $(X, \mathcal{M})$ takve da obje ne poprimaju vrijednost $+\infty$ ili obje ne poprimaju vrijednost $-\infty$.*[1]*Dokažite da vrijedi $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.*

[1] Uz ove uvjete $\nu_1 + \nu_2$ je realna mjera

Rj. Neka je $\nu_1 = \nu_1^+ - \nu_1^-$ i $\nu_2 = \nu_2^+ - \nu_2^-$. Dakle,

$$\nu_1 + \nu_2 = (\nu_1^+ + \nu_2^+) - (\nu_1^- + \nu_2^-).$$

Koristeći prethodni zadatak zaključujemo da

$$\nu_1^+ + \nu_2^+ \geq (\nu_1 + \nu_2)^+ \quad \text{i} \quad \nu_1^- + \nu_2^- \geq (\nu_1 + \nu_2)^-.$$

Tvrdnja zadatka sada lagano slijedi iz definicije totalne varijacije. □

Zadatak 86. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i neka je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funkcija integrabilna u širem smislu. Definirajmo preslikavanje $\nu\colon \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ sa*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Dokažite da je ν realna mjera te odredite ν^+, ν^- i $|\nu|$.

Rj. Definirajmo

$$\lambda_1(E) = \int_E f^+\, d\mu \quad \text{i} \quad \lambda_2(E) = \int_E f^-\, d\mu$$

za $E \in \mathcal{M}$. Očito vrijedi $\nu = \lambda_1 - \lambda_2$. Nadalje, iz Zadatka 46 slijedi da su λ_1 i λ_2 pozitivne mjere. Kako je f integrabilna u širem smislu, bar jedna od ovih mjera je konačna. Koristeći Zadatak 82 zaključujemo da je ν realna mjera.

Neka je $P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ i $N = \{x \in X : f(x) < 0\}$. Očito, $P \cup N = X$ i $P \cap N = \emptyset$. Nadalje, P je pozitivan skup obzirom na ν i N je negativan skup obzirom na ν. Dakle,

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} f\, d\mu = \int_X f\chi_{E\cap P}\, d\mu = \int_X f^+\chi_E\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu$$

iz čega slijedi da $\nu^+ = \lambda_1$. Slično, $\nu^- = \lambda_2$. Napokon imamo

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_E f^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu.$$

□

Zadatak 87. *Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$ i $E \in \mathcal{M}$. Dokažite:*

1. $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{M}\}$;
2. $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{M}\}$;
3. $|\nu|(E) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^n |\nu(E_k)| : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \text{ disjunktni i } E = \cup_{k=1}^n E_k \right\}$.

Rj. Neka je (P, N) dekompozicija iz Teorema 21. Kako je $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$ i $E \cap P \subseteq E$, zaključujemo da vrijedi

$$\nu^+(E) \leq \sup\{\nu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{M}\}.$$

Uzmimo $F \in \mathcal{M}, F \subseteq E$. Tada

$$\nu(F) = \nu^+(F) - \nu^-(F) \leq \nu^+(F) \leq \nu^+(E),$$

iz čega slijedi da

$$\sup\{\nu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{M}\} \leq \nu^+(E).$$

Time smo dokazali prvu tvrdnju zadatka. Druga tvrdnja se dokazuje analogno. Dokažimo treću tvrdnju zadatka. Uočimo da za proizvoljan $E \in \mathcal{M}$ vrijedi

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = |\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)|.$$

Kako su skupovi $E \cap P$ i $E \cap N$ disjunktni i kako $E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$, imamo da

$$|\nu|(E) \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \text{ disjunktni i } E = \cup_{k=1}^{n} E_k\right\}.$$

Sada ćemo dokazati suprotnu nejednakost. Prije svega uočimo da za proizvoljan $E \in \mathcal{M}$ imamo da $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$. Neka je sada $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ disjunktni i $E = \cup_{k=1}^{n} E_k$. Imamo da

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\nu|(E_k) = |\nu|(E),$$

pri čemu smo u zadnjem koraku iskoristili aditivnost mjere $|\nu|$. Zaključujemo da

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \text{ disjunktni i } E = \cup_{k=1}^{n} E_k\right\} \leq |\nu|(E).$$

□

Sa $L^1(\nu)$ označavati ćemo skup svih integrabilnih funkcija obzirom na realnu mjeru μ.

Zadatak 88. *Neka je ν realna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Dokažite da vrijedi:*

1. $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$;
2. $|\int_X f \, d\nu| \leq \int_X |f| \, d|\nu|$ *za* $f \in L^1(\nu)$;
3. $|\nu|(E) = \sup\{|\int_E f \, d\nu| : |f| \leq 1\}$.

Rj. Sami dokažite prvu tvrdnju zadatka. Dokažimo drugu tvrdnju zadatka. Imamo

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\nu\right| = \left|\int_X f\,d\nu^+ - \int_X f\,d\nu^-\right| &\leq \left|\int_X f\,d\nu^+\right| + \left|\int_X f\,d\nu^-\right| \\ &\leq \int_X |f|\,d\nu^+ + \int_X |f|\,d\nu^- \\ &= \int_X |f|\,d|\nu|,\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku iskoristili Zadatak 55. Dokažimo sada zadnju tvrdnju zadatka. Uočimo da za $|f| \leq 1$ imamo (koristeći drugu tvrdnju zadatka)

$$|\int_E f\,d\nu| \leq \int_E |f|\,d|\nu| \leq |\nu|(E),$$

iz čega slijedi da

$$\sup\{|\int_E f\,d\nu| : |f| \leq 1\} \leq |\nu|(E).$$

Da bi dokazali suprotnu nejednakost, dovoljno je uočiti da vrijedi $|\nu|(E) = \int_E f\,d\mu$, pri čemu je $f = \chi_P - \chi_N$ (P, N iz Teorema 21) i očito $|f| \leq 1$. □

9.2 Apsolutna neprekidnost. Radon-Nikodymov teorem

Definicija 14. *Neka su ν realna mjera, a μ pozitivna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Kažemo da je ν* apsolutno neprekidna *u odnosu na μ ako za svaki $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = 0$ vrijedi $\nu(E) = 0$. Koristimo zapis $\nu << \mu$.*

Primjer 18. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i neka je f funkcija integrabilna u širem smislu. Neka je ν definirana kao u Zadatku 86. Tada očito vrijedi $\nu << \mu$.*

Primjer 19. *Neka je m Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ te $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Uočimo da m nije apsolutno neprekidna obzirom na δ_x jer $\delta_x(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$, a $m(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = +\infty$. Analogno, δ_x nije apsolutno neprekidna obzirom na m jer $m(\{x\}) = 0$, a $\delta_x(\{x\}) = 1$.*

Zadatak 89. *Dokažite da su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. $\nu << \mu$;
2. $|\nu| << \mu$;
3. $\nu^+ << \mu$ *i* $\nu^- << \mu$.

Rj. Dokažimo prvo da prva tvrdnja implicira drugu. Neka je (P, N) dekompozicija iz Teorema 21 za mjeru ν. Uzmimo $E \in \mathcal{M}$ takav da $\mu(E) = 0$. Tada očito vrijedi $\mu(E \cap P) = \mu(E \cap N) = 0$, pa iz pretpostavke zaključujemo da $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = 0$ i $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = 0$. Dakle, $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$. Da druga tvrdnja implicira treću slijedi direktno iz observacije da $\nu^+ \le |\nu|$ i $\nu^- \le |\nu|$. Konačno, treća tvrdnja implicira prvu jer $\nu = \nu^+ - \nu^-$. [2] $\square$

Slijedeći rezultat u neku ruku opravdava naziv "apsolutna neprekidnost" jer pokazuje da se apsolutna neprekidnost može izreći u obliku $\epsilon - \delta$ uvjeta.

Teorem 23. *Neka je ν konačna realna, a μ pozitivna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Tada $\nu << \mu$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $E \in \mathcal{M}$ sa svojstvom $\mu(E) < \delta$ vrijedi $|\nu(E)| < \epsilon$.*

Slijedeći zadatak je direktna posljedica prethodnog teorema.

Zadatak 90. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i f integrabilna funkcija (tj. $f \in L^1(\mu)$). Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $E \in \mathcal{M}$ sa svojstvom $\mu(E) < \delta$ vrijedi $|\int_E f\, d\mu| < \epsilon$.*

Rj. Definirajmo ν kao u Zadatku 86. Tada $\nu << \mu$, pa preostaje primjeniti prethodni teorem. $\square$

Slijedeći primjer pokazuje da se pretpostavka o konačnosti mjere ν u Teoremu 23 ne može eliminirati.

Primjer 20. *Neka je ν brojeća mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Nadalje, za $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo $\mu(E) = \sum_{n \in E} 2^{-n}$. Lagano je pokazati da je μ mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Nadalje, očito vrijedi $\nu << \mu$ (jedini skup koji ima μ mjeru nula je $\emptyset$). No, ne vrijedi tvrdnja Teorema 23. U suprotnome bi postojao $\delta > 0$ takav da za svaki $E \in \mathcal{M}$ sa svojstvom $\mu(E) < \delta$ vrijedi $\nu(E) < 1$. Odaberimo n takav da $2^{-n} < \delta$ i stavimo $E = \{n\}$. Tada imamo $\mu(E) < \delta$ i $\nu(E) = 1$. Time smo došli do kontradikcije.*

Slijedeći rezultat daje obrat Primjera 18 uz pretpostavku o σ-konačnosti mjera.

Teorem 24. *Neka je ν σ-konačna realna, a μ σ-konačna pozitivna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Ako $\nu << \mu$, onda postoji $f\colon X \to \mathbb{R}$ integrabilna u širem smislu (obzirom na μ) takva da*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu$$

za svaki $E \in \mathcal{M}$. Nadalje, funkcija f sa ovim svojstvom je jedinstvena $\mu - a.e.$ Ako je ν pozitivna mjera onda $f \ge 0$ $\mu - a.e.$ Funkciju f nazivamo Radon-Nikodymovom derivacijom mjere ν obzirom na μ i označavamo sa $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

[2] Detalje raspišite sami ako vam ovo nije očito

Napomenimo da se pretpostavka o σ-konačnost mjere ν može eliminirati. Međutim, pretpostavka o σ-konačnosti mjere μ se ne može eliminirati.

Zadatak 91. *Neka je $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $m =$ Lebesgueova mjera i $\mu =$ brojeća mjera. Dokažite da $m << \mu$ ali da ne postoji f takva da $f = \frac{dm}{d\mu}$.*

Rj. Trivijalno imamo da $m << \nu$. Doista, ako $\mu(E) = 0$ onda $E = \emptyset$, pa $m(E) = 0$. Pretpostavimo da postoji $f\colon X \to [0, +\infty]$ izmjeriva takva da

$$m(E) = \int_E f\, d\mu, \quad \text{za svaki } E \in \mathcal{M}.$$

Definirajmo $E_n = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Kada bi imali card $E_n > n$ za neki n, onda

$$m(E_n) = \int_{E_n} f\, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) > 1.$$

No, s druge strane imamo $E_n \subseteq [0,1]$, pa $m(E_n) \leq 1$. Dobili smo kontradikciju pa zaključujemo da card $E_n \leq n$ za svaki n. Definirajmo $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Skup E je prebrojiv, iz čega slijedi da $m(E^c) = 1$. Kako je $f = 0$ na E^c dobivamo da

$$1 = m(E^c) = \int_{E^c} f\, d\mu = 0.$$

Dakle, dobili smo kontradikciju. □

Zadatak 92. *Pretpostavimo da $\nu_1 << \mu$ i $\nu_2 << \mu$. Dokažite da $\nu_1 + \nu_2 << \mu$ i*

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \quad \mu - a.e.$$

Rj. Očito vrijedi $\nu_1 + \nu_2 << \mu$ jer iz $\mu(E) = 0$ slijedi $\nu_1(E) = \nu_2(E) = 0$ pa $(\nu_1 + \nu_2)(E) = 0$. Nadalje, za proizvoljan E izmjeriv vrijedi

$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu} d\mu + \int_E \frac{d\nu_2}{d\mu} d\mu = \int_E (\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}) d\mu,$$

iz čega slijedi i druga tvrdnja zadatka. □

Propozicija 12. *Pretpostavimo da $\nu << \mu$ i $\mu << \lambda$. Tada $\nu << \lambda$ i*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda - a.e.$$

Zadatak 93. *Ako $\lambda << \mu$ i $\mu << \lambda$, onda $\frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = 1$ a.e.*

Rj. Koristeći prethodnu propoziciju zaključujemo da vrijedi

$$\frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}.$$

Preostaje samo uočiti da vrijedi $\frac{d\lambda}{d\lambda} = 1$. □

Zadatak 94. *Neka su μ, ν pozitivne mjere na $(X, \mathcal{M})$ takve da $\nu << \mu$. Neka je $\lambda = \mu + \nu$ i $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$. Dokažite da je $0 \leq f < 1$ $\mu - a.e.$ i $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$.*

Rj. Koristeći Zadatak 92 dobivamo

$$1 = \frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + f \tag{9.2}$$

i

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\mu} + \frac{d\nu}{d\mu} = 1 + \frac{d\nu}{d\mu} \tag{9.3}$$

Iz (9.2) slijedi da $\frac{d\mu}{d\lambda} = 1 - f$, pa koristeći Zadatak 93 dobijemo da $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{1-f}$. Uvrstimo li ovo u (9.3) dobijemo da

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{1-f} - 1 = \frac{f}{1-f}.$$

□

Na kraju navodimo slijedeći fundamentalan rezultat.

Teorem 25. *(Radon-Nikodym) Neka je ν σ-konačna realna, a μ σ-konačna pozitivna mjera na $(X, \mathcal{M})$. Tada postoje jedinstvene σ-konačne realne mjere λ, ρ na $(X, \mathcal{M})$ takve da*

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho << \mu, \quad i \quad \nu = \lambda + \rho.$$

Chapter 10

Produktne mjere

Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dva prostora mjere. Želimo $X \times Y$ na "prirodan" način snabdijeti struktorom prostora mjere. Uočimo da najprije želimo na $X \times Y$ definirati σ-algebru koja je "generirana " σ-algebrama $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Definiramo $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ kao σ-algebru na $X \times Y$ generiranu sa skupovima oblika $A \times B$, pri čemu $A \in \mathcal{M}$ i $B \in \mathcal{N}$.

Primjer 21. *Može se pokazati da vrijedi* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

Sada imamo slijedeći važan rezultat.

Teorem 26. *Postoji mjera π na izmjerivom prostoru $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ takva da*

$$\pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad \text{za sve } A \in \mathcal{M} \text{ i } B \in \mathcal{N}. \tag{10.1}$$

Nadalje, ako su mjere μ i ν σ-konačne, onda je mjera π koja zadovoljava (10.1) *jedinstvena.*

Napomena 10. *Mjera π iz Teorema 26 naziva se produktom mjera μ i ν, te se označava sa $\mu \times \nu$.*

Propozicija 13. *Neka je $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

1. *za svaki $x \in X$ funkcija $f_x\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana sa $f_x(y) = f(x, y)$ je izmjeriva;*

2. *za svaki $y \in Y$ funkcija $f^y\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana sa $f^y(x) = f(x, y)$ je izmjeriva.*

Slijedeći rezultat je prvi važan teorem o integraciji na produktnim prostorima.

Teorem 27. *(Fubini-Tonelli) Neka su μ i ν σ-konačne mjere i $f\colon X \times Y \to [0, +\infty]$ izmjeriva funkcija. Tada su funkcije $g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ i $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ su izmjerive i vrijedi*

$$\int_{X \times Y} f \, d\pi = \int_X g \, d\mu = \int_Y h \, d\nu. \tag{10.2}$$

Napomena 11. *Koristeći definicije funkcija g i h, uočimo da jednakost* (10.2) *možemo napisati i u obliku*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\pi(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Dolazimo do najvažnijeg teorema u ovom poglavlju. Za razliku od prethodnog teorema sada promatramo općenite (tj. ne nužno samo nenegativne) funkcije.

Teorem 28. *(Fubini) Neka su μ i ν σ-konačne mjere i neka je $f \in L^1(\pi)$. Tada $f_x \in L^1(\nu)$ for a.e. $x \in X$ i $f^y \in L^1(\mu)$ za a.e. $y \in Y$. Nadalje, koristeći oznake iz prethodnog teorema, $g \in L^1(\mu)$, $h \in L^1(\nu)$ te* (10.2) *vrijedi.*

Napomena 12. *Uočimo da pretpostavka Teorema 28 glasi $f \in L^1(\pi)$. Postavlja se pitanje kako provjeriti taj uvjet u praksi. Iz Zadatka 52 slijedi da $f \in L^1(\pi)$ ako i samo ako $|f| \in L^1(\pi)$, tj. $\int_{X\times Y}|f|\,d\pi < +\infty$. Da bi pokazali konačnost integrala funkcije $|f|$ možemo iskoristiti Teorem 27. Dakle, pretpostavku Teorema 28 provjeravamo pomoću Teorema 27.*

Slijedeći zadatak pokazuje da se pretpostavke o σ-konačnosti mjera ne može eliminirati iz uvjeta Teorema 27 i 28.

Zadatak 95. *Neka je $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ te neka je μ Lebesgueova mjera i ν brojeća mjera. Neka je $D = \{(x,y) \in X \times Y : x = y\}$. Dokažite da*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_D(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) \neq \int_Y \left(\int_X \chi_D(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Rj. Za fiksan $x \in X$ preslikavanje $y \mapsto \chi_D(x,y)$ je jednako preslikavanju $\chi_{\{x\}}$, pa kako je ν brojeća mjera imamo

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y \chi_D(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) &= \int_X \left(\int_Y \chi_{\{x\}}(y)\,\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_X \nu(\{x\})\,d\mu(x)\\ &= \int_X d\mu(x) = 1.\end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned}\int_Y \left(\int_X \chi_D(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y) &= \int_Y \left(\int_X \chi_{\{y\}}(x)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &= \int_X \mu(\{y\})\,d\nu(y)\\ &= \int_X 0\,d\nu(y) = 0.\end{aligned}$$

□

Slijedeći zadatak je ostavljen vama za samostalno rješavanje.

Zadatak 96. *Neka je $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ te $\mu = \nu$ brojeća mjera. Definirajmo $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa*

$$f(m,n) = \begin{cases} 1; & m = n, \\ -1; & m = n+1, \\ 0; & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokažite da

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\nu(n) \right) d\mu(m) \neq \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m) \right) d\nu(n).$$

Razmislite malo o geometrijskoj interpretaciji idućeg zadatka.

Zadatak 97. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere te $f\colon X \to [0, +\infty]$ izmjeriva funkcija. Definirajmo*

$$G_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Dokažite da $G_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i

$$(\mu \times m)(G_f) = \int_X f\, d\mu,$$

pri čemu je m Lebesgueova mjera.

Rj. Definiramo preslikavanje $F\colon X \times [0, +\infty\rangle \to \overline{\mathbb{R}}$ sa $F(x,y) = f(x) - y$. Iz izmjerivosti funkcije f slijedi izmjerivost od F (dokažite to!). Uočimo da vrijedi $G_f = F^{-1}([0, +\infty))$, iz čega slijedi izmjerivost skupa G_f. Koristeći Teorem 27 imamo

$$\begin{aligned}
(\mu \times m)(G_f) &= \int_{X \times [0,+\infty\rangle} \chi_{G_f}(x,y)\, d(\mu \times m)(x,y) \\
&= \int_X \left(\int_{[0,+\infty\rangle} \chi_{G_f}(x,y)\, dm(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_{[0,+\infty\rangle} \chi_{[0,f(x)]}(y)\, dm(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X f(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 98. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor* σ*-konačne mjere te* $f, g \colon X \to [0, +\infty]$ *izmjerive funkcije takve da*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \leq \mu(\{x \in X : g(x) \geq t\}) \tag{10.3}$$

za svaki $t \geq 0$. *Dokažite da vrijedi* $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Rj. Pridružimo funkcijama f i g skupove G_f i G_g definirane kao u prethodnome zadatku. Iz prethodnog zadatka slijedi da je dovoljno dokazati da vrijedi

$$(\mu \times m)(G_f) \leq (\mu \times m)(G_g). \tag{10.4}$$

Koristeći Teorem 27 imamo da

$$\begin{aligned}
(\mu \times m)(G_f) &= \int_{X \times [0, +\infty\rangle} \chi_{G_f}(x, y) \, d(\mu \times m)(x, y) \\
&= \int_{[0, +\infty\rangle} \left(\int_X \chi_{G_f}(x, y) \, d\mu(x) \right) dm(y) \\
&= \int_{[0, +\infty\rangle} \left(\int_X \chi_{f^{-1}([y, +\infty])}(x) \, d\mu(x) \right) dm(y) \\
&= \int_{[0, +\infty\rangle} \mu(\{x \in X : f(x) \geq y\}) \, dm(y).
\end{aligned}$$

Isti račun ali za funkciju g daje

$$(\mu \times m)(G_g) = \int_{[0, +\infty\rangle} \mu(\{x \in X : g(x) \geq y\}) \, dm(y).$$

Sada vidimo da (10.4) slijedi direktno iz (10.3). $\square$